Aula 16

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

10/11/2029

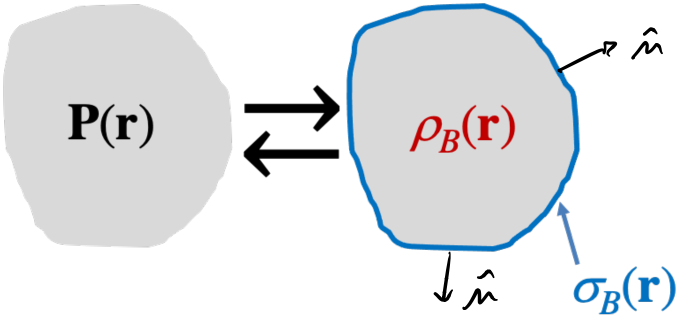
Aulas passadas

Polarização: dipolo total por unidade de volume

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}}$$

Cargas ligadas: Um corpo com uma polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é equivalente a

$$\begin{aligned} \sigma_B(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ \rho_B(\mathbf{r}) &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$



Aulas passadas

Cargas livres e cargas ligadas:

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = \rho_B\left(\mathbf{r}\right) + \rho_F\left(\mathbf{r}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{r}\right) + \rho_F\left(\mathbf{r}\right)$$

Deslocamento elétrico: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$

Leis da eletrostática em meios materiais:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} &= \rho_F \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= 0 \end{aligned}}$$

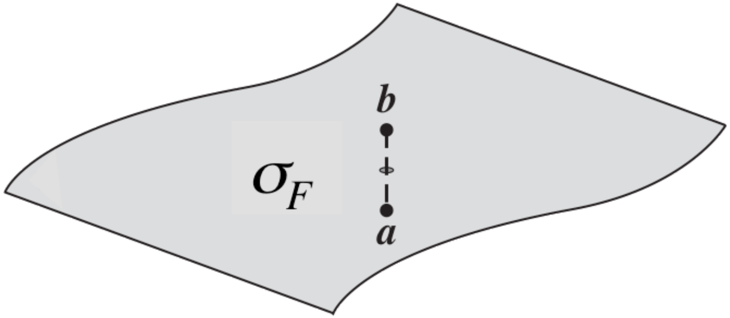
Aulas passadas

Condições de contorno na presença de dielétricos:

$$\Delta D^{\perp} = \sigma_F$$

$$\Delta \mathbf{E}^{\parallel} = 0$$

$$\Delta V = 0$$



EM UM MEIO LINEAR COM PERMISSIVIDADE ϵ

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Energia eletrostática na presença de dielétricos

NA AUSÊNCIA DE DIELÉTRICOS, A ENERGIA W DE UMA CONFIGURAÇÃO DE CARGAS FOI DEFINIDA COMO O TRABALHO TOTAL REALIZADO CONTRA AS FORÇAS ELÉTRICAS PARA CONSTRUIR A CONFIGURAÇÃO DE CARGAS.

NA PRESENÇA DE DIELÉTRICOS, É, NO ENTANTO, MAIS ÚTIL DEFINIR O TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS SOBRE AS CARGAS LIVRES APENAS, POIS AS CARGAS LIGADAS APARECERÃO NATURALMENTE, À MEDIDA QUE OS CORPOS SE POLARIZAREM, SEM QUE FAÇAMOS FORÇAS ADICIONAIS SOBRE ELAS.

DADA UMA CONFIGURAÇÃO COM POTENCIAL $V(\vec{r})$ O TRABALHO SOBRE A ADIÇÃO DE CARGAS LIVRES $\delta\rho_F(\vec{r})$ SERÁ:

$$\delta W = \int_{\substack{\text{TODO} \\ \text{O} \\ \text{ESPAÇO}}} \delta\rho_F(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_F$ $\qquad$ $\delta\rho_F = \rho_F - \rho_F^0$ $\qquad$ $\delta\vec{D} = \vec{D} - \vec{D}^0$

ONDE
$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{D}^0 = \rho_F^0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_F \end{array}\right\}$$

SUBTRAINDO:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{D} - \vec{D}_0) = \rho_F - \rho_F^0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{D}) = \delta\rho_F$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_{T.E.} \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{D})\, V(\vec{r})\, dV$$

USANDO: $\vec{\nabla}\cdot[V\delta\vec{D}] = [\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{D}]V + \delta\vec{D}\cdot\vec{\nabla}V$

$$\Rightarrow \delta W = \int_{T.E.} \vec{\nabla}\cdot[V\delta\vec{D}]\,dV - \int_{T.E.} \delta\vec{D}\cdot\vec{\nabla}V\,dV = \int_{S_\infty} V\,\delta\vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{T.E.} \vec{E}\cdot\delta\vec{D}\,dV$$

MAS, NO INFINITO, PARA UMA DISTRIBUIÇÃO LOCALIZADA DE CARGAS:

$$V(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \quad (r \to \infty)$$

$$\delta\vec{D}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \quad (r \to \infty)$$

$$V\,\delta\vec{D}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{r^3}$$

ASSIM, O PRIMEIRO TERMO SE ANULA.

$$\Rightarrow \delta W = \int_{T.E.} \left(\vec{E}\cdot\delta\vec{D}\right) dV$$

SUPONDO QUE HÁ APENAS MEIOS LINEARES: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$$\delta\vec{D} = \epsilon\,\delta\vec{E} \Rightarrow \vec{E}\cdot\delta\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}\cdot\delta\vec{E} = \frac{\epsilon}{2}\,\delta\left[\vec{E}\cdot\vec{E}\right] = \delta\left[\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_{T.E.} \delta\left[\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}\right] dV = \delta\left[\int_{T.E.} \left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}\right) dV\right]$$

INTEGRANDO AS VARIAÇÕES DO INÍCIO AO FIM:

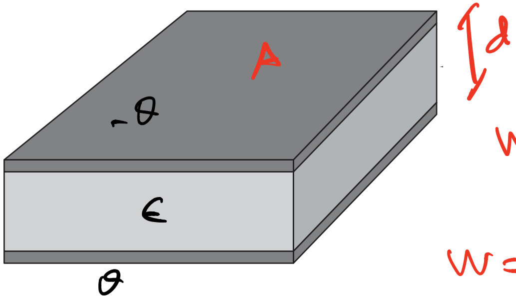
$$\boxed{W = \int_{T.E.} \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right) dV}$$

COMPARE COM:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} E^2\, dV$$

Energia de um capacitor de placas paralelas com dielétrico

COMO VIMOS:



$\sigma_f = \dfrac{Q}{A}$ $\qquad D = \boxed{\dfrac{Q}{A} = \epsilon E}$ $\qquad C = \dfrac{Q}{|\Delta V|} = \dfrac{\epsilon A}{d}$

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{\epsilon}{2}\int E^2\,dV = \frac{\epsilon}{2}E^2(Ad)$$

$$W = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{Q}{A\epsilon}\right)^2 Ad = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{A\epsilon}$$

$1/C$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

E AS EXPRESSÕES PARA A ENERGIA CONTINUAM VÁLIDAS, COM $\underline{C}$ DADA COMO CALCULADO ANTERIORMENTE.

Forças em dielétricos devido a cargas externas

COMO CALCULAR $\vec{F}$?

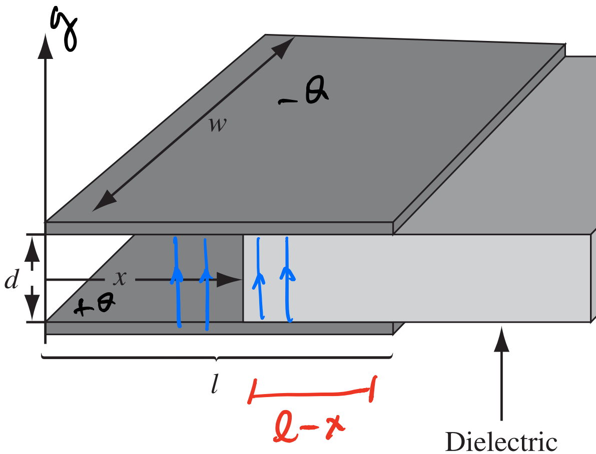
SE APLICARMOS $\vec{F}_{EXT} = -\vec{F}$ SOBRE O DIELÉTRICO E O DIELÉTRICO SE DESLOCAR DE $\delta\vec{r}$, O TRABALHO DESSA FORÇA EXTERNA SERÁ IGUAL À VARIAÇÃO DE ENERGIA ARMAZENADA:

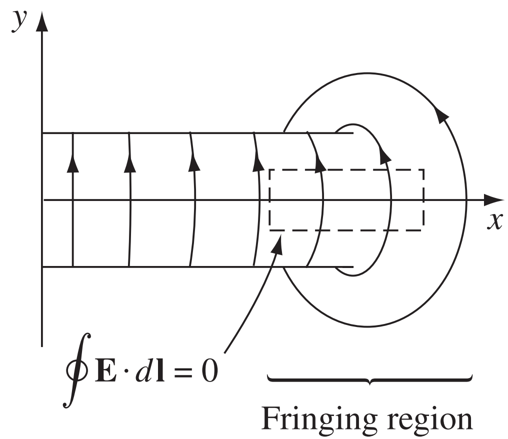
$$\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \delta\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$ SE $\delta\vec{r} = \delta x\, \hat{x}$

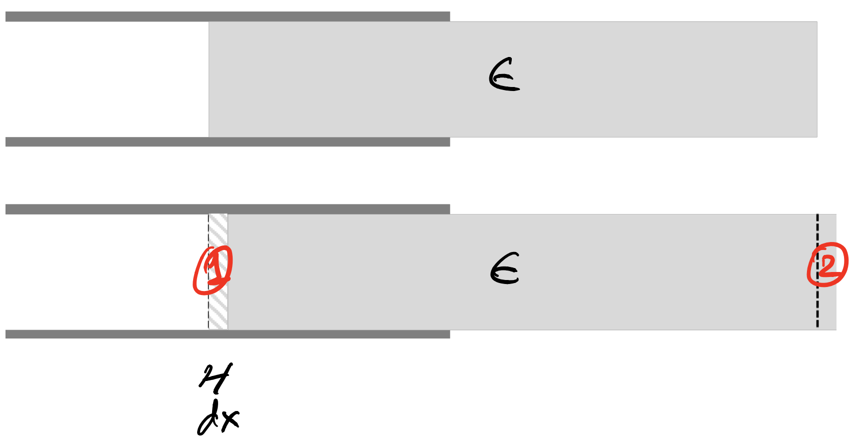
$$\Rightarrow \delta W = -F\, dx \Rightarrow F = -\left.\frac{\delta W}{\delta x}\right|_{Q}$$

ESSA NOTAÇÃO IMPLICA QUE A VARIAÇÃO É CALCULADA MANTENDO AS CARGAS LIVRES FIXAS.

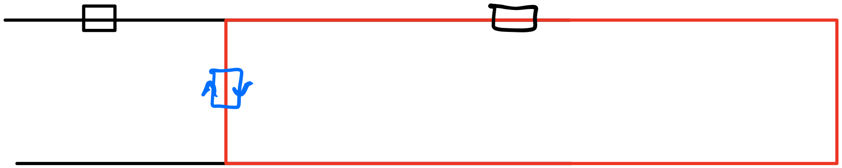
Força sobre uma placa dielétrica dentro de um capacitor







SE O DIELÉTRICO COMEÇA BEM DENTRO DO CAPACITOR E TERMINA LONGE DA BORDA, SÓ HÁ CONTRIBUIÇÃO PARA A VARIAÇÃO DE $W = \int \frac{\epsilon}{2} E^2 dV$ NA REGIÃO 1, POIS EM 2 $\vec{E} \simeq 0$



DO CIRCUITO EM AZUL E $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow E^D = E^F = E$

ONDE D E F SIGNIFICAM "DENTRO" E "FORA" DO DIELÉTRICO

DAS CAIXINHAS EM PRETO: $D^F = \sigma^F$ E $D^D = \sigma^D$

E DE $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$ $\quad D^F = \epsilon_0 E^F$ E $D^D = \epsilon E^D$

$$\Rightarrow Q = \left[\sigma^F (w x) + \sigma^D [w(\ell - x)]\right] = w\left[D^F x + D^D(\ell - x)\right] = w\left[\epsilon_0 E^F x + \epsilon E^D (\ell - x)\right]$$

$$Q = wE\left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)\right] = w\frac{V}{d}\left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{w}{d}\left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)\right]} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = \frac{w}{d}\left[\epsilon_0 - \epsilon\right] = -\frac{w}{d}(\epsilon - \epsilon_0)$$

$$W = \int \epsilon(x)\frac{E^2}{2}dV = \int_{\text{DENTRO}} \epsilon(x)\frac{E^2}{2}dV + \int_{\text{FORA}} \epsilon(x)\frac{E^2}{2}dV$$

ISSO É COMPLICADO PORQUE ENVOLVE AS BORDAS

MAS A VARIAÇÃO DE W QUANDO DESLOCAMOS O DIELÉTRICO DE dx <u>NÃO</u> ENVOLVE AS BORDAS.

PORTANTO, PODEMOS OLHAR APENAS:

$$W' = \int_{\substack{\text{BEM}\\ \text{DENTRO}\\ \text{DO}\\ \text{CAPACITOR (BDC)}}} \frac{\epsilon(x)}{2} E^2 \, dV = \frac{E^2}{2} \int_{\text{BDC}} \epsilon(x)\, dV = \frac{E^2}{2} (wd) \int \epsilon(x)\, dx$$

$$= \frac{(wd)}{2} E^2 \left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x) \right]$$

USANDO: $E = \dfrac{Q}{w\left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)\right]}$

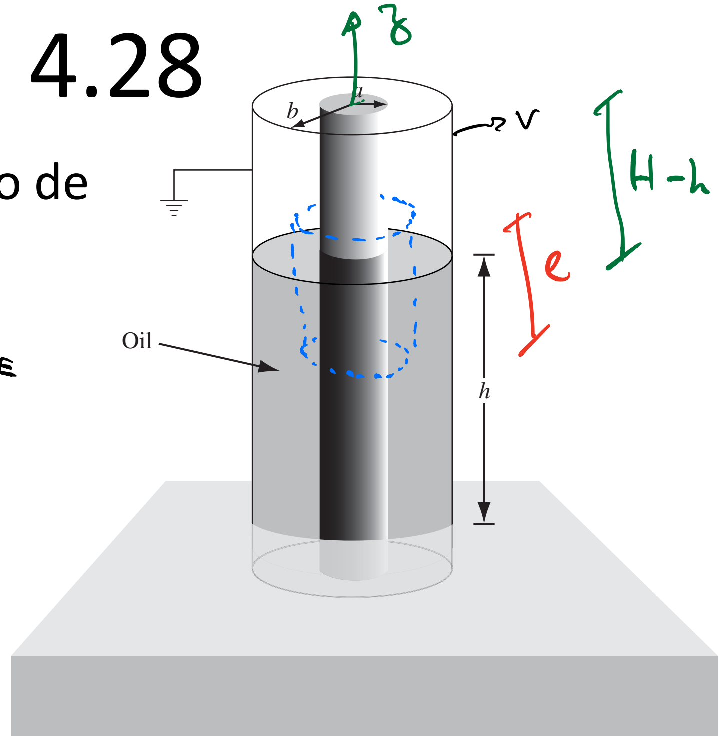
$$\Rightarrow W' = \frac{(d\cancel{w})}{2} \frac{Q^2}{w^{\cancel{2}} \left[\quad \right]^{\cancel{2}}} \cancel{\left[\quad \right]} = \frac{d Q^2}{2w\left[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)\right]} = \frac{Q^2}{2C(x)}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{dW'}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2(x)} \frac{dC(x)}{dx} = -\frac{Q^2}{2C^2(x)} \frac{w}{d} (\epsilon - \epsilon_0) = -\frac{(\Delta V)^2}{2} \frac{w}{d} (\epsilon - \epsilon_0)$$

$$\Rightarrow F < 0$$

Problema 4.28

Altura de uma coluna de óleo (ϵ) dentro de um capacitor coaxial carregado.



O PROBLEMA É ESSENCIALMENTE O MESMO QUE O ANTERIOR, EXCETO QUE A GEOMETRIA É CILÍNDRICA.

POR $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow E_\rho$ NÃO DEPENDE DE z

$$E_\rho^D = E_\rho^F = E_\rho$$

DA LEI DE GAUSS: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q(V)$

$$(\cancel{2\pi}\rho)\cancel{\ell}\, D_\rho = (\cancel{2\pi}a)\cancel{\ell}\,\sigma \Rightarrow D_\rho = \sigma \frac{a}{\rho}$$

DENTRO ($z < h$): $D_\rho^D = \epsilon E_\rho = \sigma^D \frac{a}{\rho}$

FORA ($z > h$): $D_\rho^F = \epsilon_0 E_\rho = \sigma^F \frac{a}{\rho}$

$$E_\rho = \frac{\sigma^D}{\epsilon}\frac{a}{\rho} = \frac{\sigma^F}{\epsilon_0}\frac{a}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^D}{\epsilon} = \frac{\sigma^F}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\Delta V| = \int_a^b E_\rho \, d\rho = \frac{\sigma^D}{\epsilon} a \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sigma^D a}{\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\sigma^F}{\epsilon_0} a \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

CÁLCULO DA CAPACITÂNCIA:

$$Q = 2\pi a\left[h\sigma^D + (H-h)\sigma^F\right]$$

$$= 2\pi \cancel{a}\left[h\frac{\epsilon|\Delta V|}{\cancel{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + (H-h)\frac{\epsilon_0|\Delta V|}{\cancel{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]$$

$$Q = 2\pi\frac{|\Delta V|}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\epsilon h + \epsilon_0(H-h)\right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\epsilon h + \epsilon_0(H-h)\right]} \Rightarrow \frac{dC}{dh} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\epsilon - \epsilon_0)$$

A ENERGIA W' É SIMILAR AO CASO ANTERIOR

E PODE SER ESCRITA:

$$W' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)} \Rightarrow \frac{dW'}{dh} = -\frac{Q^2}{2[C(h)]^2}\frac{dC}{dh} = -\frac{|\Delta V|^2}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\epsilon - \epsilon_0)$$

$$\Rightarrow F = -\frac{dW'}{dh} = \frac{|\Delta V|^2\pi(\epsilon - \epsilon_0)}{\ln(b/a)}$$

IGUALANDO A FORÇA AO PESO DA COLUNA DE ÓLEO:

ρ_0 = DENSIDADE DO ÓLEO

$$P = \rho_0 g (\text{Volume}) = \rho g \pi (b^2 - a^2) h$$

$$\Rightarrow P = F \Rightarrow \cancel{\pi} \rho_0 g h (b^2 - a^2) = \cancel{\pi} \frac{(\Delta V)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon - \epsilon_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{(\Delta V)^2}{\rho_0 g} \frac{(b^2 - a^2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon - \epsilon_0)}$$