Aula 19

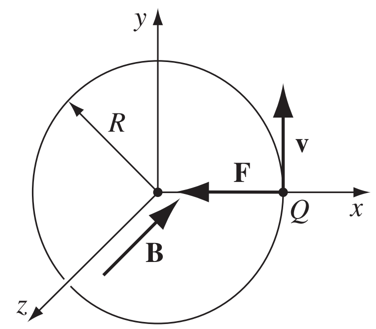
F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

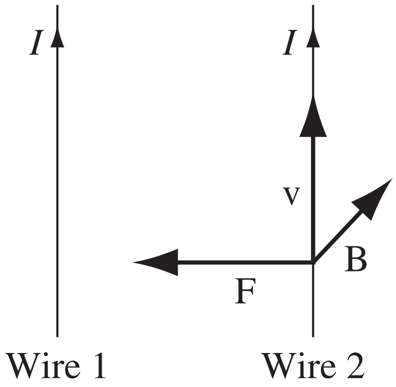
19/11/2020

Aulas passadas

Campos magnéticos atuam sobre correntes/cargas em movimento



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ d\mathbf{F} &= d\mathbf{I} \times \mathbf{B} \end{aligned}}$$



$$\begin{aligned} d\mathbf{I} &= \mathbf{I}dl = I d\mathbf{l} \\ d\mathbf{I} &= \mathbf{K}dS \\ d\mathbf{I} &= \mathbf{J}dV \end{aligned}$$

Aulas passadas

Lei de conservação (local) da carga

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ\left(V\right)}{dt}$$

Aulas passadas

Campo magnético de correntes estacionárias:
lei de Biot-Savart

Se: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Aulas passadas

Leis da magnestostática

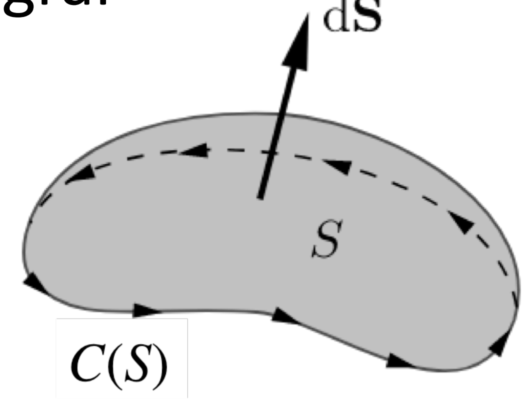
0

$\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B}) = \bar{\nabla}\cdot\bar{J}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}\ \ (\text{se } \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0) \end{aligned}$$

Lei de Ampère na forma integral

$$\oint_{C(S)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\,(S)$$



O potencial vetor e a invariância de calibre (gauge)

NA ELETROSTÁTICA: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

NA MAGNETOSTÁTICA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

QUE $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ IMPLICA $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, TAMBÉM PODE SER PROVADO.

O CAMPO VETORIAL $\vec{A}(\vec{r})$ É CHAMADO DE POTENCIAL VETOR.

NA ELETROSTÁTICA, O POTENCIAL ERA BEM DEFINIDO A MENOS DE UMA CONSTANTE.

$$V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + C \Rightarrow \underbrace{-\vec{\nabla} V'}_{\vec{E}'} = \underbrace{-\vec{\nabla} V}_{\vec{E}} \Bigg\} \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

NO CASO DA MAGNETOSTÁTICA, A INDETERMINAÇÃO DE $\vec{A}$ É AINDA MAIOR:

POSSO SOMAR A $\vec{A}$ UM CAMPO VETORIAL $\vec{G}$ DESDE QUE $\vec{\nabla}\times\vec{G}=0$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{G} \qquad \text{ONDE} \quad \vec{\nabla}\times\vec{G}=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{array}\right\} \quad \vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \cancelto{0}{\vec{\nabla}\times\vec{G}} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$$

MAS $\vec{\nabla}\times\vec{G}=0 \Longleftrightarrow \vec{G}=\vec{\nabla}\lambda$, OU SEJA, SE:

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda} \Rightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$$

TRANSFORMAÇÃO DE CALIBRE ("GAUGE").

O CAMPO $\vec{B}$ É DITO INVARIANTE POR TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE. O CAMPO $\vec{A}$, POR ISSO, NÃO É PASSÍVEL DE MEDIDA DIRETA. APENAS $\vec{B}$ É FÍSICO.

LEVANDO $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ NA LEI DE AMPÈRE:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

USANDO A INDETERMINAÇÃO DE $\vec{A}$ PODEMOS IMPOR

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (* VER DISCUSSÃO MAIS TARDE)

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

EM COMPONENTES:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

E

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

É SEMPRE POSSÍVEL TOMAR $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$?

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\end{array}\right\}$ PELO TEOREMA DE HELMHOLTZ É RAZOÁVEL SUPOR QUE SEMPRE PODEMOS IMPOR $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, JÁ QUE ESSA IGUALDADE É "METADE" DO TEOREMA

PROVA: SUPONHA QUE TENHAMOS $\vec{A}_0(\vec{r})$ TAL QUE $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}_0$, MAS $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0=f(\vec{r})\neq 0$. DEFINO:

$$\vec{A}=\vec{A}_0+\vec{\nabla}\lambda \Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

ALÉM DISSO: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0+\nabla^2\lambda=f(\vec{r})+\nabla^2\lambda$

QUERO IMPOR: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \Rightarrow \nabla^2\lambda+f(\vec{r})=0 \Rightarrow \underline{\nabla^2\lambda=-f(\vec{r})}$

MAS, DA SOLUÇÃO DA EQ. DE POISSON:

$$\lambda(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \Rightarrow$$ $\vec{A}=\vec{A}_0+\vec{\nabla}\lambda$ TEM AS PROPRIEDADES QUE EU PROCURO

O potencial vetor de correntes dadas

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \Rightarrow A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_i(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad i = x, y, z$$

VETORIALMENTE:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

SOLUÇÃO DA MAGNETOSTÁTICA

$$\text{IMPLÍCITO}\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \end{cases}$$

ANALOGAMENTE:

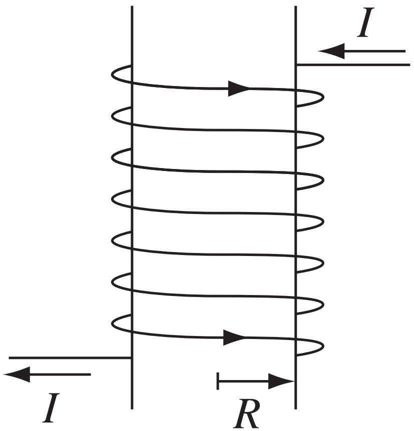
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')\,dS'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(\vec{r}\,')\,d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Solução geral da magnetostática em termos do potencial vetor

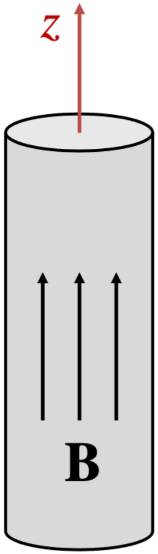
$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dl'
\end{aligned}}$$

$$\text{se } \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \text{ e } \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$$

Exemplo 5.12: O potencial vetor de um solenóide infinito



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} & \rho < R, \\ 0 & \rho > R. \end{cases}$$



$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

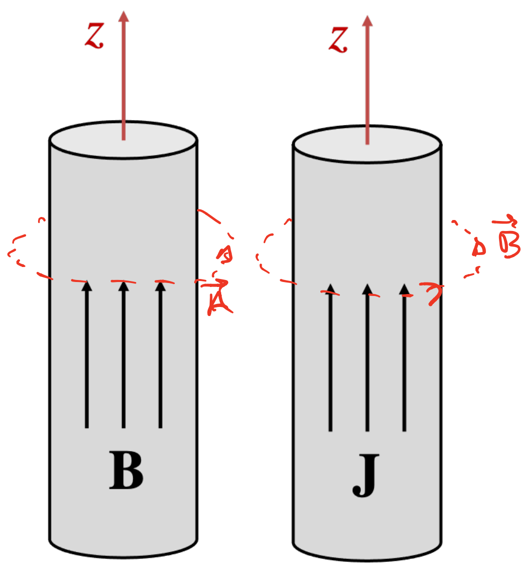
LEMBREMOS DA DICA DE QUE A DIREÇÃO DE $\vec{A}$ COSTUMA "SEGUIR" A DIREÇÃO DE $\vec{J}$

$\Rightarrow \vec{A} = A_\phi(\vec{r})\hat{\phi}$

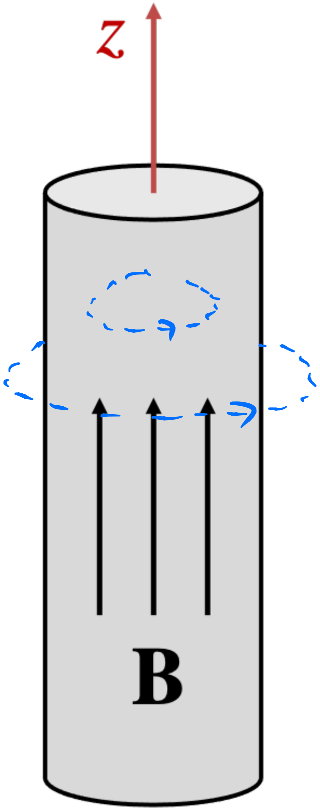
POR SIMETRIA $A_\phi(\rho)$

O poder de uma analogia

Lei de Ampère	Definição do potencial vetor
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
$\oint_{C(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I\,(S)$	$\oint_{C(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_B\,(S)$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{A}$
$\mu_0 \mathbf{J}$	$\mathbf{B}$
$\mu_0 I\,(S)$	$\Phi_B\,(S)$



PODEMOS USAR OS MESMOS ARGUMENTOS QUE FORAM USADOS PARA CALCULAR $\vec{B}$ DO FIO (SIMETRIA, AMPERIANAS CIRCULARES, LEI DE AMPÈRE) PARA ACHAR O $\vec{A}(\vec{r})$ DO SOLENOIDE



$$\oint_{C(S)} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi_B(S)$$

$$\downarrow$$

$$\int A_\phi(\rho)\,\rho\, d\phi = 2\pi\rho A_\phi(\rho)$$

i) $\rho < R$: $\displaystyle\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\,\pi\rho^2 = \mu_0 n I \pi \rho^2$

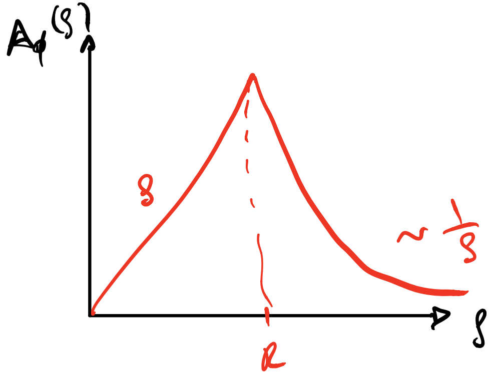
$$2\cancel{\pi}\cancel{\rho} A_\phi(\rho) = \cancel{\pi}\mu_0 n I \rho^{\cancel{2}}$$

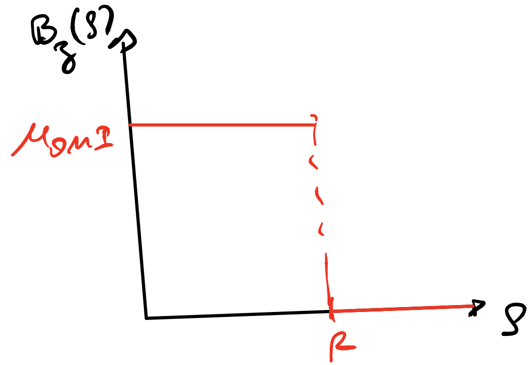
$$A_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 n I}{2}\rho \qquad (\rho < R)$$

ii) $\rho > R$: $\displaystyle\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\,\pi R^2 = \pi \mu_0 n I R^2$

$$2\cancel{\pi}\rho A_\phi(\rho) = \cancel{\pi}\mu_0 n I R^2$$

$$A_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{R^2}{\rho} \qquad (\rho > R)$$





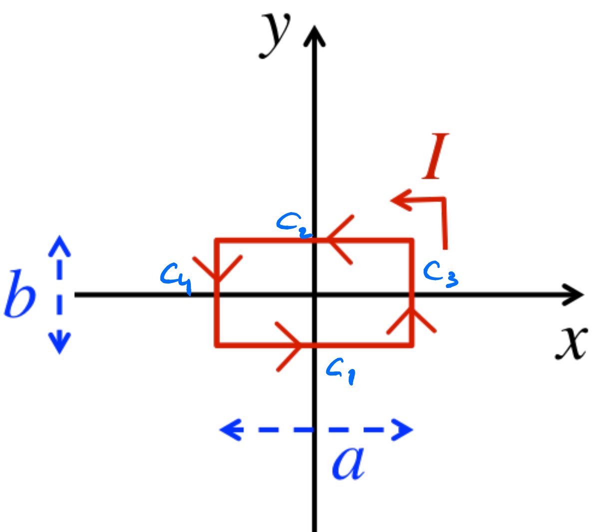
NOTEM QUE, FORA DO SOLENOIDE, $\vec{B}=0$,

MAS $\vec{A}(\vec{r}) \neq 0$!!!

TIREM A PROVA: CALCULEM $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ E

MOSTREM QUE OBTÉM-SE O $\vec{B}$ CORRETO.

Exemplo: O potencial vetor de um circuito retangular de corrente se $r \gg a,b$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1 \cup C_2} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_3 \cup C_4} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

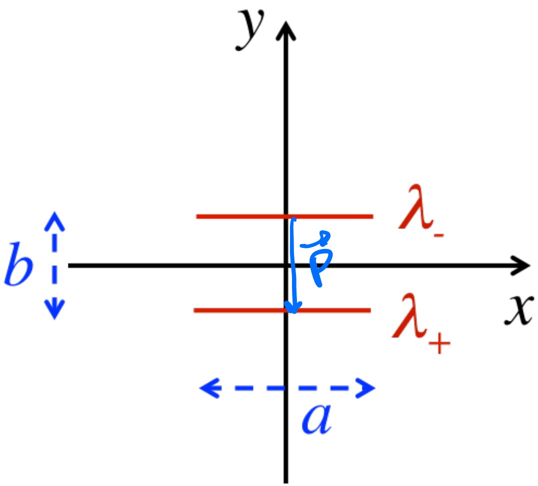
$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{C_2} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

$$d\vec{\ell}' = dx' \, \hat{x}$$

$$\vec{r}' = \begin{cases} -\frac{b}{2}\hat{y} + x'\hat{x} \in C_1 \\ +\frac{b}{2}\hat{y} + x'\hat{x} \in C_2 \end{cases}$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{x}}{4\pi} \left[\underset{C_1}{\int_{-\frac{a}{2}}^{+a/2}} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \underset{C_2}{\int_{-\frac{a}{2}}^{+a/2}} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

Qual é o potencial elétrico de duas linhas de carga de comprimento a?



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underset{C_1}{\int_{-a/2}^{+a/2}} \frac{\lambda_+\, dx'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \underset{C_2}{\int_{-a/2}^{+a/2}} \frac{\lambda_-\, dx'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

SUPONHA QUE:

$\lambda_+ = \mu_0 \epsilon_0 I$ E $\lambda_- = -\mu_0 \epsilon_0 I$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underset{C_1}{\int_{-a/2}^{a/2}} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

QUE É IGUAL AO A_{1x} QUE EU PROCURO.

POSSO USAR A EXPANSÃO MULTIPOLAR.

CARGA TOTAL: $\lambda_+ a + \lambda_- a = 0$

DIPOLO? $\Rightarrow \vec{p} = -q b \hat{y} = -(\lambda_+ a) b \hat{y} = -\mu_0 \epsilon_0 I a b \hat{y}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{r} = -\mu_0\epsilon_0 I a b\, \hat{y}\cdot\vec{r} = -\mu_0\epsilon_0 I a b\, y$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}(ab)\frac{y}{r^3} = A_{1x}(\vec{r})$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}(ab)\frac{y\hat{x}}{r^3}$$

ANALOGAMENTE: $\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(ab)\frac{x\hat{y}}{r^3}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_1(\vec{r}) + \vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(ab)}{r^3}\underbrace{(x\hat{y} - y\hat{x})}_{\hat{z}\times\vec{r}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(Iab)\frac{\hat{z}\times\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}}$$

$$I ab\,\hat{z} \equiv \vec{m} = I(\text{área})\,\hat{z}$$