

Aula 20

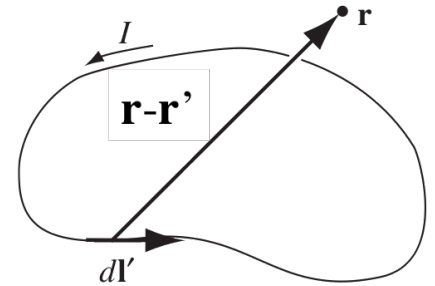
F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

24/11/2020

Aulas passadas

Campo magnético de correntes estacionárias: **lei de Biot-Savart**



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \text{se } \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Leis da magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{se } \nabla \cdot \mathbf{J} = 0)$$

Aulas passadas

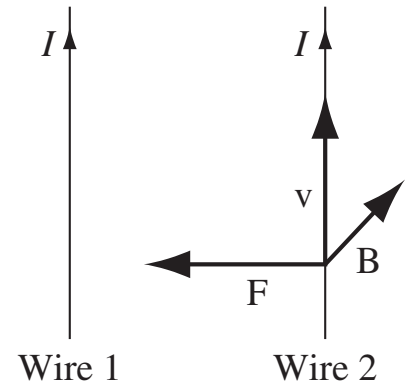
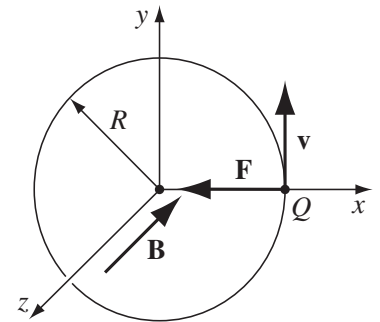
Campos magnéticos atuam sobre correntes/cargas em movimento

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$
$$d\mathbf{F} = d\mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{I} = \mathbf{I}dl = Idl$$

$$d\mathbf{I} = \mathbf{K}dS$$

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J}dV$$



Aulas passadas

Potencial vetor:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Liberdade ou invariância de **calibre**:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

Equação de Poisson no **calibre de Coulomb**:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{se} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Aulas passadas

Solução geral das equações da magnetostática

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'\end{aligned}$$

se $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

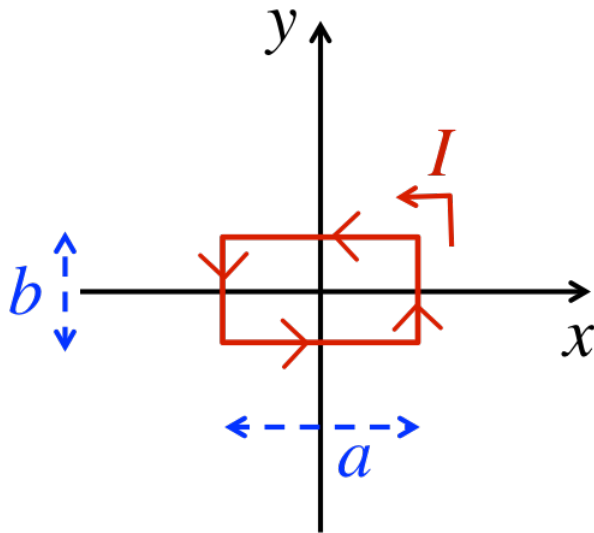
A expansão multipolar na magnetostática

Aula passada ($r \gg a, b$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{m} = Iab\hat{\mathbf{z}}$$

COMPARE COM: $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

EXPANSÃO MULTIPOLAR: SE O CIRCUITO DE CORRENTE TEM DIMENSÃO d , QUEREMOS $\vec{A}(\vec{r})$ PARA $|\vec{r}| \gg d$.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma) \quad (r > r')$$

$$\cos \gamma = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r'}$$

TERMO $l=0$: $\frac{1}{r} P_0(\cos \gamma) = \frac{1}{r}$

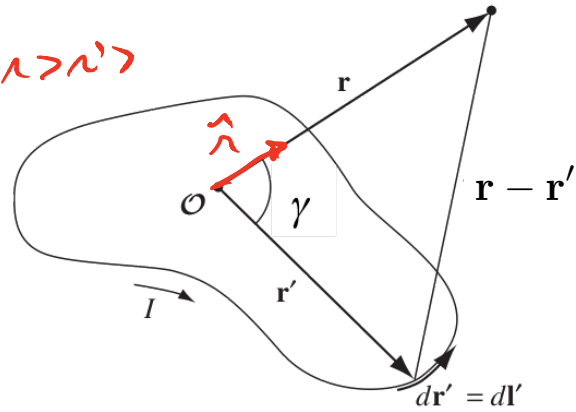
$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\vec{r}'$$

CORRENTE ESTACIONÁRIA

⇒ TERMO DE MONOPOLO MAGNÉTICO É SEMPRE NULO.

ISSO REFLETE A INEXISTÊNCIA DE MONOPOLOS (CARGAS) MAGNÉTICAS NA NATUREZA:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

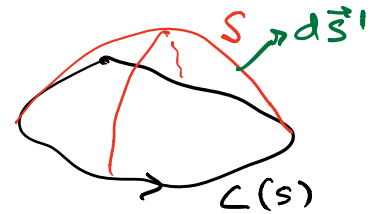


$$\text{TERMO } Q=1: \frac{1}{r} \frac{r'}{r} P_1(\cos\gamma) = \frac{r'}{r^2} \cos\gamma = \frac{r'}{r^2} \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{r} = \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{r^2}$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{r^2} d\vec{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{n} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{n} \cdot \left[\oint \vec{r}' d\vec{r}' \right]$$

COMO MOSTRADO NAS NOTAS:

$$\oint_C (\hat{n} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = -\hat{n} \times \int_S d\vec{S}'$$



$$\Rightarrow \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[-\hat{n} \times \int_S d\vec{S}' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \underbrace{\left[I \int_S d\vec{S}' \right]}_{\vec{m}} \times \hat{n}$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \hat{n}$$

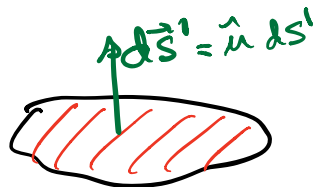
$$\vec{m} = I \int_S d\vec{S}' \quad \text{MOMENTO DE DIPOLLO MAGNETICO.}$$

$$\vec{M} = I \int_S d\vec{S}'$$

VALE PARA QUALQUER CIRCUITO EM 3D
MESMO QUE ELE NÃO SEJA PLANAR.

$$\int_S d\vec{S}' \Rightarrow \text{ÁREA VETORIAL DO CIRCUITO}$$

SE O CIRCUITO FOR PLANAR, PODEMOS TOMAR \underline{S}
COMO A SUPERFÍCIE PLANAR CUJA BORDA É O
CIRCUITO



$$\left| \int_S d\vec{S}' \right| = \left| \hat{n} \int_S ds' \right| =$$

= ÁREA PLANAR DO
CIRCUITO

$$\Rightarrow \vec{M} = I A \hat{n}$$

ONDE $A =$ ÁREA PLANAR DO
CIRCUITO

$\hat{n} =$ NORMAL AO PLANO DO
CIRCUITO

TERMOS SUPERIORES DA EXPANSÃO ($l = 2, 3, \dots$)

NOS DÃO OS TERMOS DE QUADRUPOLO MAGNÉTICO,
OCTUPOLO MAGNÉTICO, ...

O CAMPO MAGNÉTICO \vec{B} RELATIVO AO DIPOLO
MAGNÉTICO É:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{\mu} \times \hat{r}}{r^2} \right] \rightarrow \sin\theta \hat{\phi}$$

TOMANDO $\vec{\mu} = \mu \hat{z}$: $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2} \right]$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

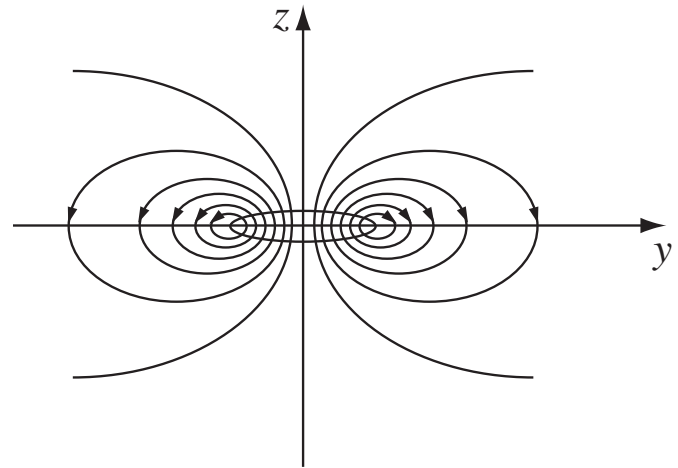
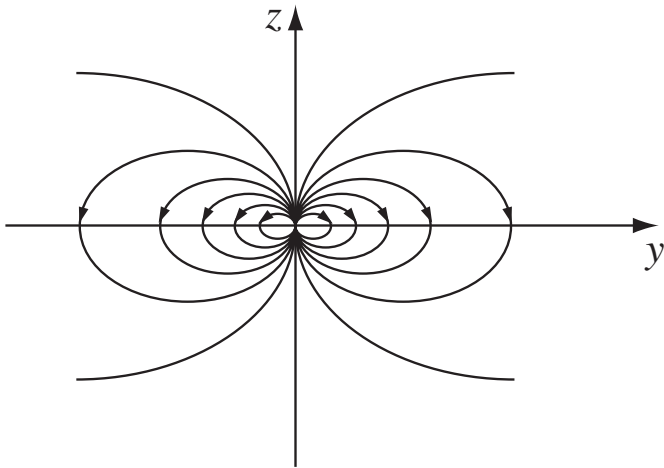
QUE É A MESMA DEPENDÊNCIA DO CAMPO ELÉTRICO
DE UM DIPOLO ELÉTRICO:

$$\Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

Campo e potencial de dipolo magnético

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]}{r^3}$$



Problema 5.35: O momento de dipolo de um disco carregado girante

σ = DENSIDADE SUPERFICIAL DE CARGA ELÉTRICA

VAMOS CALCULAR $d\vec{m}$ DE ANÉIS DE RAIO r E ESPESSURA dr E SOMAR AS VÁRIAS CONTRIBUIÇÕES

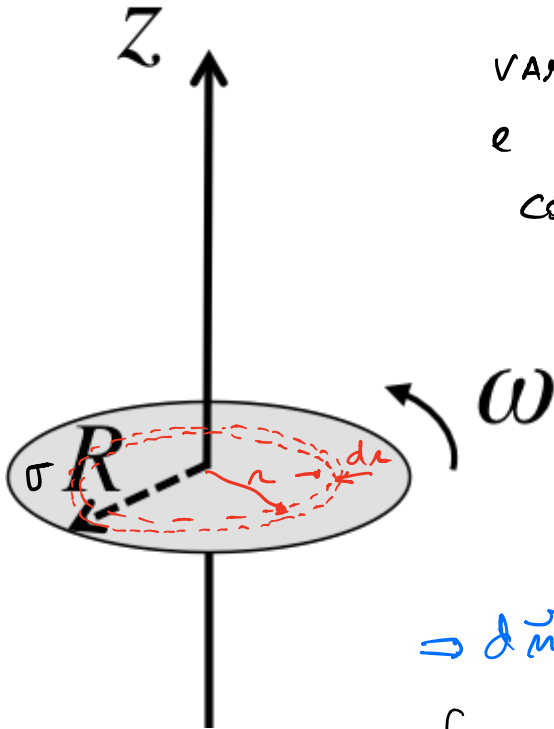
$$d\vec{m} = \hat{z} (dI) \pi r^2$$

$$K = |\vec{K}| = \frac{dI}{dr} = \sigma \omega r = \sigma(\omega r)$$

$$\Rightarrow dI = \sigma \omega r dr$$

$$\Rightarrow d\vec{m} = \pi \sigma \omega r^3 dr \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \int d\vec{m} = \pi \sigma \omega \hat{z} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4} \hat{z}$$



Razão entre o momento de dipolo e o momento angular

$$L = I \omega$$

$$I_{\text{Disco}} = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow L = \frac{MR^2}{2} \omega$$

$$\frac{|\vec{m}|}{|L|} = \frac{m}{L} = \frac{\pi \sigma \cancel{R^2} \cancel{R^2}}{4 \cancel{2} \frac{MR^2 \cancel{\omega}}{2}} = \frac{\sigma \pi R^2}{2M} = \frac{Q}{2M}$$

ESSA RAZÃO $\frac{Q}{2M}$ PARA $\frac{m}{L}$ É VÁLIDA PARA

QUALQUER CORPO GIRANTE UNIFORME.

PARTÍCULAS SUB-ATÔMICAS TÊM MOMENTO ANGULAR INTRÍNSECO E MOMENTO DE DIPLO MAGNÉTICO ASSOCIADO.

O momento de dipolo magnético de partículas elementares

Algumas partículas elementares tem um momento angular intrínseco (spin) e também um momento de dipolo magnético intrínseco:

$$\text{Elétron : } \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} \approx 2 \times \frac{e}{2m_e}$$

$$\text{Próton : } \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} \approx 5.59 \times \frac{e}{2m_p}$$

$$\text{Neutron : } \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} \approx 3.83 \times \frac{e}{2m_p}$$

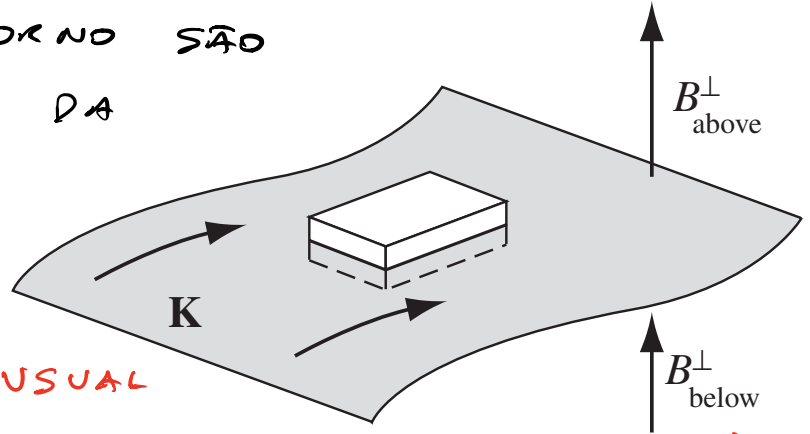
Condições de contorno na magnetostática

AS CONDIÇÕES DE CONTORNO SÃO DETERMINADAS PELAS EQS. DA MAGNETOSTÁTICA:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

USANDO O RACIOCÍNIO USUAL

(VOLUME DA CAIXA ENDO A ZERO, COM ALTURA $h \ll \sqrt{A}$, ONDE A É A ÁREA DA BASE)



$$B_{\text{ABOVE}}^{\perp} - B_{\text{BELOW}}^{\perp} = 0 \Rightarrow B^{\perp} \text{ É CONTÍNUA ATRAVÉS DA INTERFACE}$$

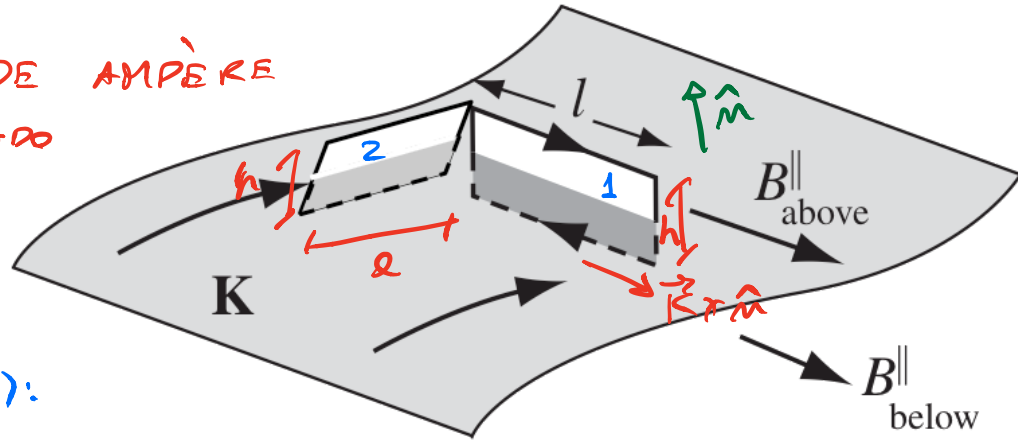
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I(s)$$

APLICANDO A LEI DE AMPÈRE

AOS CIRCUITOS AO LADO

COM $h \rightarrow 0$, $l \rightarrow 0$

MAS $h \ll l$:



CIRCUITO 1 (\perp A \vec{K}):

$$(B_{\text{ABOVE}}^{\parallel} - B_{\text{BELOW}}^{\parallel})l = \mu_0 I(s) = \mu_0 K l$$

$$B_{\text{ABOVE}}^{\parallel} - B_{\text{BELOW}}^{\parallel} = \mu_0 K = \text{DESCONTINUIDADE DE } \vec{B}^{\parallel} \text{ DEVIDO A } \vec{K}$$

NESSE CASO $\vec{B}^{\parallel} \perp \vec{K}$

CIRCUITO 2 (\parallel A \vec{K}):

$$(B_{\text{ABOVE}}^{\perp} - B_{\text{BELOW}}^{\perp})l = 0 \Rightarrow \vec{B}^{\perp} \text{ É CONTÍNUO}$$

NESSE CASO $\vec{B}^{\perp} \parallel \vec{K}$

OS DOIS CASOS SÃO CASOS PARTICULARES DE:

$$\vec{B}_{\text{ABOVE}}^{\parallel} - \vec{B}_{\text{BELOW}}^{\parallel} = \mu_0 \vec{K} \times \hat{m}$$

POTENCIAL VETOR \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \int_{C(s)} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B(s)$$

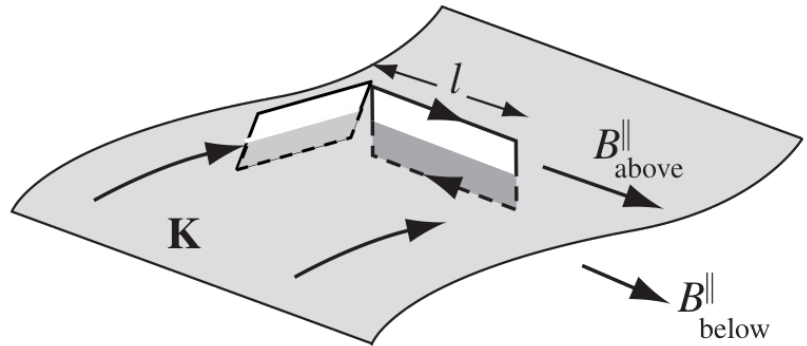
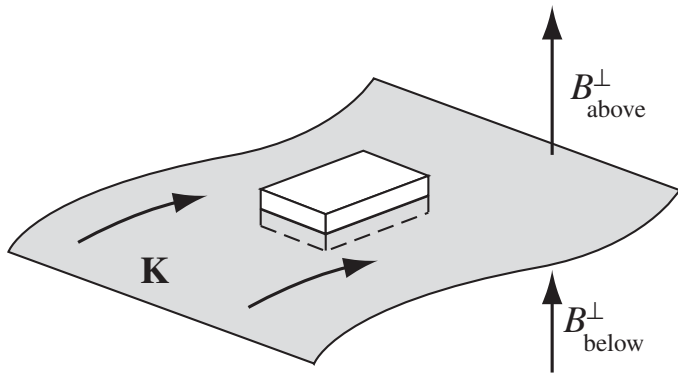
APLICANDO AOS CIRCUITOS DO SLIDE ANTERIOR:

$$(A''_{\text{ABOVE}} - A''_{\text{BELOW}}) \cancel{L} = B \cancel{L} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow A''$ É CONTÍNUO NA INTERFACE

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = ?$ SE $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, ENTÃO

$\Rightarrow A^\perp$ É CONTÍNUO NA INTERFACE



$$\Delta B_{\perp} = 0$$

$$\Delta \mathbf{B}_{\parallel} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad \text{se} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

POLÍGONO DE n LADOS

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} n \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$



$$n \rightarrow \infty \quad n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\approx n \times \frac{\pi}{n} = \pi$$

$$s \rightarrow R$$

$$B_{n \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \pi = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

QUE É O RESULTADO DO
CÍRCULO