Aula 21

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

26/11/2020

Magnetostática em meios materiais

Aulas passadas

Leis da magnestostática:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \;\; (\text{se } \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

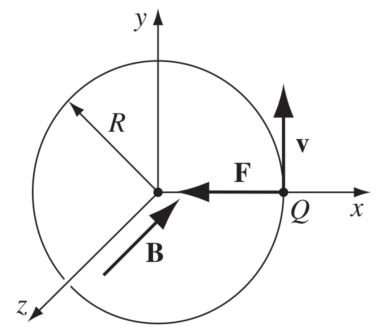
Solução geral:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \;\; \text{se } \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$$

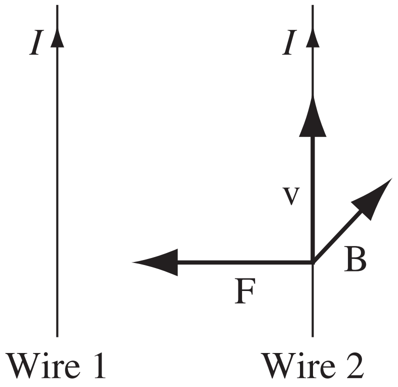
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Aulas passadas

Campos magnéticos atuam sobre correntes/cargas em movimento



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ d\mathbf{F} &= d\mathbf{I} \times \mathbf{B} \end{aligned}}$$



Força magnética sobre loops de correntes

Se o campo magnético é constante, não há força sobre loops de corrente:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \oint_C I \, d\vec{\ell} \times \vec{B}_0 = \left[I \cancel{\oint_C d\vec{\ell}} \right] \times \vec{B}_0$$

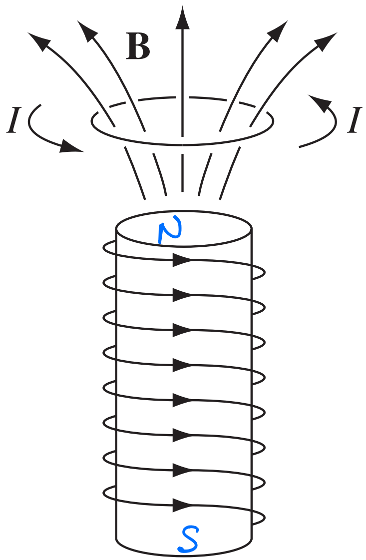
$$\nearrow 0$$

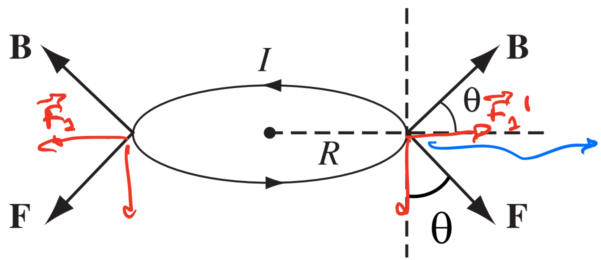
COMPARE COM O CASO ELÉTRICO

$\vec{E} = \vec{E}_0 = \text{CONST.} \Rightarrow$ FORÇA SOBRE UM DIPOLO ELÉTRICO É ZERO

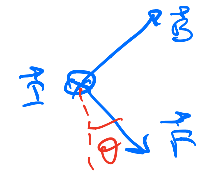
Força magnética sobre loops de correntes

Só há força, se o campo é **não uniforme**:





$$d\mathbf{F} = d\mathbf{I} \times \mathbf{B}$$



$dF = I \, d\ell \, B$

$dF_v = I \, d\ell \, B \cos\theta$

$F_v = \int dF_v = I B \cos\theta \, (2\pi R)$

$$F = 2\pi I R B \cos\theta .$$

Força magnética sobre dipolos magnéticos

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}\right)$$

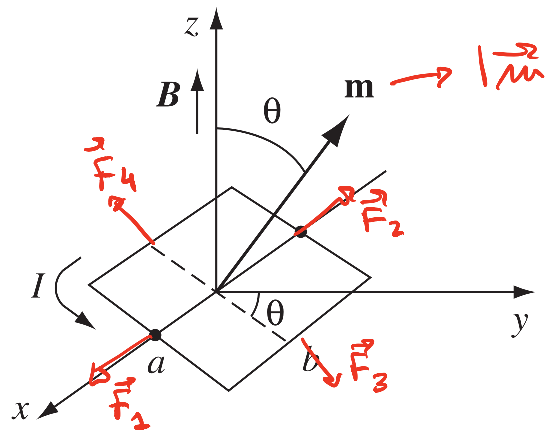
SE $\vec{m} = \vec{m}_0 =$ CONST.

$U = -\vec{m}\cdot\vec{B} \quad \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$

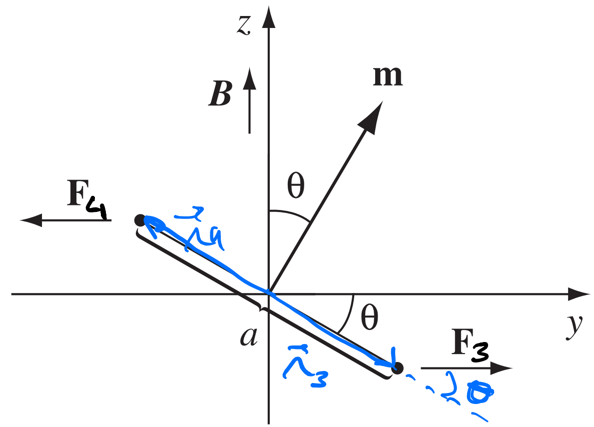
COMPARE COM O CASO ELÉTRICO:

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$ SE $\vec{p} = \vec{p}_0 =$ CONST.

Torque do campo magnético sobre loops de corrente



$\rightarrow |\vec m| = Iab$



TORQUE $\vec N = \vec r_3 \times \vec F_3 + \vec r_4 \times \vec F_4 \Rightarrow \vec N = N \hat x$

$$N = \frac{a}{2} F_3 \sin\theta + \frac{a}{2} F_4 \sin\theta = a \sin\theta (IbB) = IabB\sin\theta$$

$F_3 = F_4 = IbB$

$N = mB\sin\theta$

$$\boxed{\vec N = \vec m \times \vec B}$$

COMPARE COM

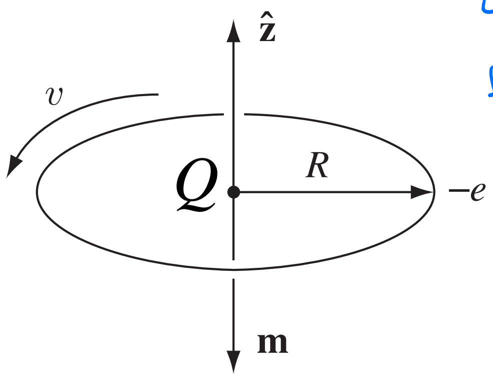
$\vec N = \vec p \times \vec E$

HÁ UMA TENDÊNCIA DOS DIPOLOS SE ALINHAREM AO CAMPO $\vec{B}$ APLICADO

Efeito do campo magnético em órbitas atômicas (clássicas)

Um modelo simplificado:

UM ELÉTRON NUMA ÓRBITA CIRCULAR EM TORNO DE UM NÚCLEO DE CARGA Q

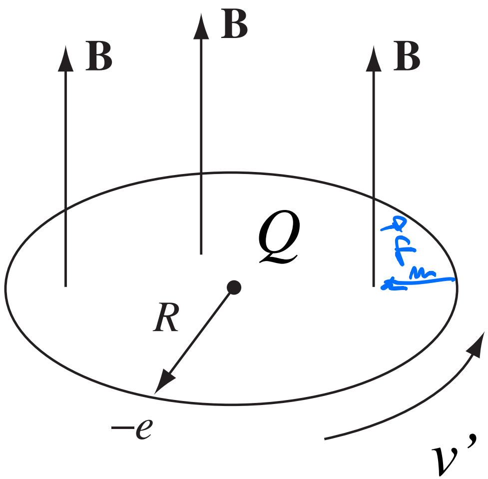


DIPOLO MAGNÉTICO: $\vec{m} = m\hat{z}$

$$\left.\begin{aligned} m &= IA = I\pi R^2 \\ I &= -\frac{e}{T} = -\frac{ev}{2\pi R} \end{aligned}\right\} m = -\frac{evR}{2}$$

$$\frac{m_e v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{R^2}$$

Na presença de um campo magnético:



SUPONHAMOS QUE O RAIO DA ÓRBITA PERMANEÇA O MESMO

⇒ A FORÇA MAGNÉTICA MODIFICA A VELOCIDADE: $v \to v'$

$\vec{F}_m$ ⇒ RADIAL PARA DENTRO

$$F_m = e v' B$$

$$\Rightarrow m_e \frac{(v')^2}{R} = \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qe}{R^2}}^{m_e v^2/R} + e v' B \Rightarrow e v' B = \frac{m_e}{R}\left[(v')^2 - v^2\right]$$

$$= \frac{m_e}{R}\underbrace{(v'-v)}_{\Delta v}(v+v')$$

QUERO CALCULAR $\Delta v = v' - v$

VAMOS SUPOR QUE $\Delta v \ll v, v'$, O QUE PODE SER COMPROVADO A POSTERIORI:
$$\begin{cases} v + v' \cong 2v \\ v' \cong v \end{cases}$$

$$\Rightarrow e\,\cancel{v}B = \frac{m_e}{R}\Delta v(2\cancel{v}) \Rightarrow \Delta v = \frac{eRB}{2m_e}$$

USANDO:

$$\left.\begin{aligned} B &= 10\,T \\ R &= 1\,\text{Å} = 10^{-10}\,m \\ v &= 10^{-2}\,c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta v \ll v$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{eR}{2}\Delta v\,\hat{z} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}B\hat{z} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}\vec{B}$$

NOTE QUE O RESULTADO DEPENDE DE (e^2)

$\Rightarrow$ O EFEITO DO CAMPO $\vec{B}$ É SEMPRE <u>DIMINUIR</u> O DIPOLO MAGNÉTICO

O PRIMEIRO EFEITO (TORQUE SOBRE $\vec{m}$) AUMENTA O DIPOLO MAGNÉTICO TOTAL. O 2º EFEITO (ORBITAL) TENDE A DIMINUIR O DIPOLO MAGNÉTICO

Magnetização

COMO NO CASO ELÉTRICO, A PRESENÇA DE DIPOLOS MAGNÉTICOS, INDUZIDOS OU PERMANENTES, TORNA ÚTIL A DEFINIÇÃO DE UM CAMPO VETORIAL $\vec{M}$ (MAGNETIZAÇÃO):

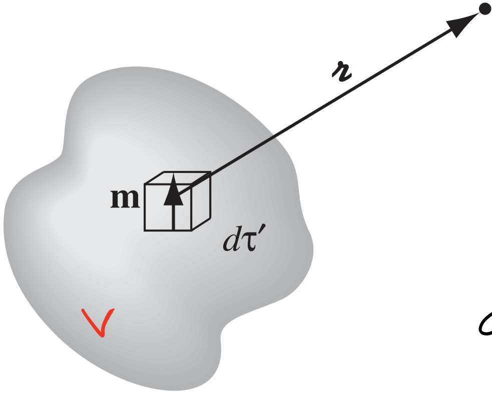
$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V}$$

$$[\vec{M}] = \frac{[\vec{m}]}{L^3} = \frac{I \cancel{L^2}}{L^{\cancel{3}}} = \frac{Q}{TL}$$

NOTEM QUE É A MESMA DIMENSÃO DA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE $\vec{K}$

Campo magnético de um corpo magnetizado

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$



$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\underbrace{[dm(\vec{r}\,')]}_{\vec{M}(\vec{r}\,')\,dV'}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M}(\vec{r}\,')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV'$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$$-\frac{d}{dx}f(x-x') = \frac{d}{dx'}f(x-x')$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dv'$$

$$\vec{\nabla}' \times (f\vec{C}) = (\vec{\nabla}' f) \times \vec{C} + f\, \vec{\nabla}' \times \vec{C}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left\{ -\vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] + \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right\} dv'$$

"TEOREMA DE GAUSS" PARA O ROTACIONAL (VER NOTAS)

$$\int_V (\vec{\nabla}' \times \vec{F})\, dv' = -\int_{S(V)} \vec{F} \times d\vec{S}\,'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{ \int_{S(V)} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times d\vec{S}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_V \frac{[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv' \right]$$

$$d\vec{S}\,' = \hat{n}'\, dS' \qquad \int_{S(V)} \frac{[\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n}']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dS'$$

$$\vec{J}_B = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{K}_B = \vec{M} \times \hat{n}$$

Correntes ligadas ou de magnetização

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{J}_B &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M} \\ \mathbf{K}_B &= \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}}$$

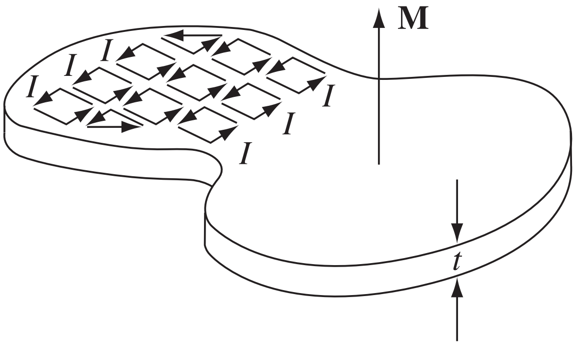
COMPARE COM O CASO ELETROSTÁTICO:

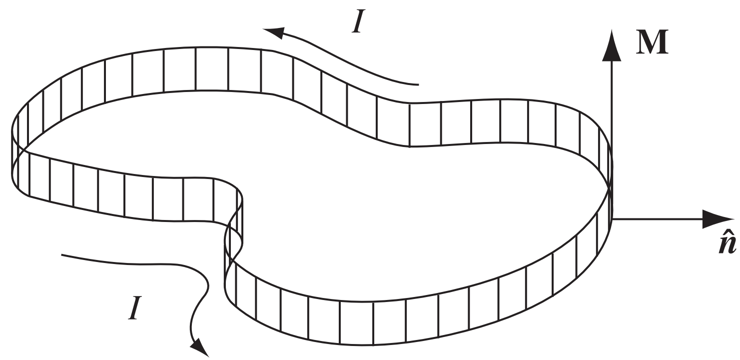
$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Interpretação física da corrente ligada

$$\mathbf{K}_B \quad = \quad \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

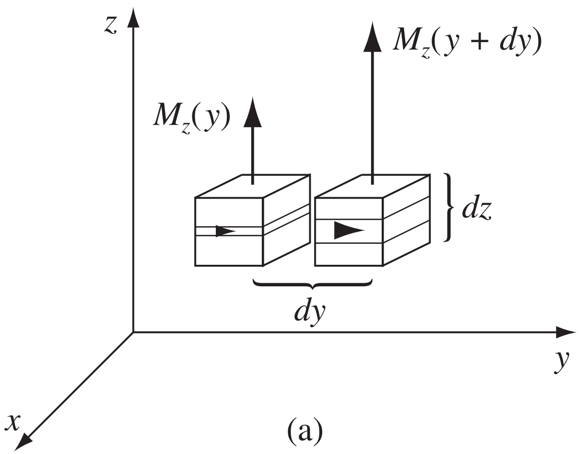




Interpretação física da corrente ligada

$$\mathbf{J}_B \quad = \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}$$

$$\hookrightarrow (J_B)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$



(a)

$$I_x = [M_z(y + dy) - M_z(y)]\, dz = \frac{\partial M_z}{\partial y}\, dy\, dz.$$

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

Separando correntes livres e ligadas

CORRENTE TOTAL COMO TENDO DUAS CONTRIBUIÇÕES: $\vec{J}_B$, $\vec{J}_F$

CORRENTE DOS ELÉTRONS LIVRES DOS METAIS

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_F + \vec{J}_B\right) = \mu_0 \vec{J}_F + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \underbrace{\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right]}_{\vec{H}} = \vec{J}_F$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

"CAMPO H"

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_F \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

POR SI SÓS, ESSAS EQS. NÃO SÃO SUFICIENTES PARA RESOLVER OS PROBLEMAS (T. HELMHOLTZ)

INFORMAÇÕES ADICIONAIS:

(i) $\vec{M}$ É DADO:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_F + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

(ii) $\vec{M}$ É DADO COMO RESPOSTA LINEAR AO CAMPO (MEIOS MAGNÉTICOS LINEARES)

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m = SUSCEPTIBILIDADE MAGNÉTICA

$$\vec{A} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow (1+\chi_m)\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \underbrace{\mu_0(1+\chi_m)}\vec{H} = \mu \vec{H}$$

μ : PERMEABILIDADE MAGNÉTICA DO MATERIAL

COMPARE COM O CASO ELÉTRICO:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

Susceptibilidade de alguns materiais

Material	Susceptibility	Material	Susceptibility
Diamagnetic:		*Paramagnetic:*	
Bismuth	-1.7×10^{-4}	Oxygen (O_2)	1.7×10^{-6}
Gold	-3.4×10^{-5}	Sodium	8.5×10^{-6}
Silver	-2.4×10^{-5}	Aluminum	2.2×10^{-5}
Copper	-9.7×10^{-6}	Tungsten	7.0×10^{-5}
Water	-9.0×10^{-6}	Platinum	2.7×10^{-4}
Carbon Dioxide	-1.1×10^{-8}	Liquid Oxygen ($-200°$ C)	3.9×10^{-3}
Hydrogen (H_2)	-2.1×10^{-9}	Gadolinium	4.8×10^{-1}

TABLE 6.1 Magnetic Susceptibilities (unless otherwise specified, values are for 1 atm, 20° C). *Data from Handbook of Chemistry and Physics,* 91st ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 2010) and other references.

Leis da magnetostácia em meios materiais

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_F \ \ (\text{se } \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_F = 0) \end{aligned}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$\vec{J}_B = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$\vec{K}_B = \vec{M} \times \hat{n}$

Em meios lineares isotrópicos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H} \end{aligned}$$