

# Aula 22

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

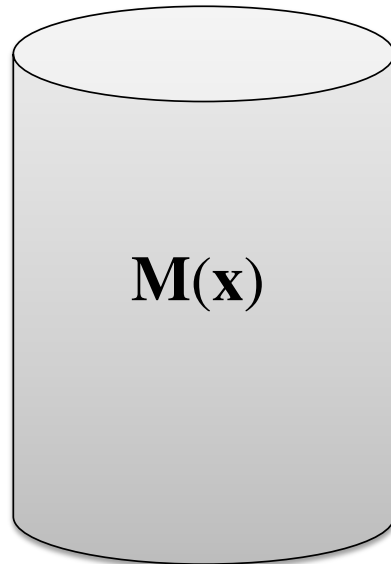
01/12/2020

# Aulas passadas

## Magnetostática em meios materiais

O campo vetorial magnetização:

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V}$$

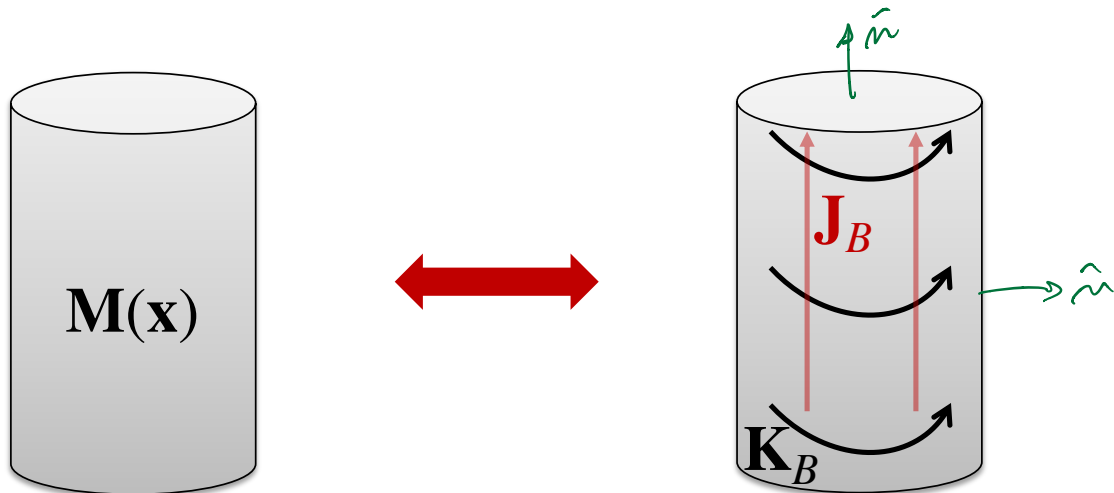


# Aulas passadas

Um corpo com magnetização  $\mathbf{M}$  é equivalente a distribuições de correntes de **volume e superfície**:

$$\mathbf{J}_B = \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$



# Aulas passadas

Separamos as correntes em ligadas e livres (o resto):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{J}_B + \mathbf{J}_F) \\ &= \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{J}_F)\end{aligned}$$

Definimos o campo **H**:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

# Aulas passadas

Leis da magnetostática em meios materiais:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

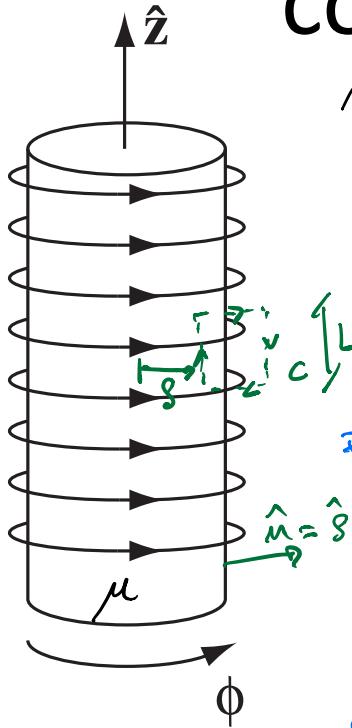
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_F \quad (\text{se } \nabla \cdot \mathbf{J}_F = 0)$$

Se o meio é linear e isotrópico:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

# Exemplo 6.3: solenoide infinito com cilindro dentro



$n$  ESPIRAS POR UNIDADE DE COMPRIMENTO  
CORRENTE  $I$

CAMPOS  $(\vec{B}, \vec{H}, \vec{M})$  DENTRO DO SOLENOIDE

FORA DO SOLENOIDE  $(\vec{B} = \vec{H} = \vec{M} = 0)$

ALTA SIMETRIA:  $\vec{B} = B_z(\rho) \hat{z}, \vec{H} = H_z(\rho) \hat{z}, \vec{M} = M_z(\rho) \hat{z}$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{J}_F \Rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_F(s)$$

$$\cancel{L} H_z(\rho) = (\cancel{\mu} L) I \Rightarrow \boxed{H_z(\rho) = n I}$$

$$B_z(\rho) = \mu H_z(\rho) = \mu n I$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_z(\rho) &= \frac{B_z(\rho)}{\mu_0} - H_z(\rho) = \underbrace{\left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}_{\chi_m} n I = \chi_m n I \\ \vec{M} &= \chi_m n I \hat{z} \end{aligned} \right.$$

SE O MATERIAL É PARAMAGNÉTICO,  $\mu > \mu_0$

$$\Rightarrow B > B_0$$

ONDE  $B_0$  É O CAMPO DO SOLENOIDE NA AUSÊNCIA DO MATERIAL MAGNÉTICO.

SE O MATERIAL FOR DIAMAGNÉTICO,  $\mu < \mu_0$

$$\Rightarrow B < B_0$$

SE O MATERIAL FOR FERROMAGNÉTICO,  $\mu \gg \mu_0$ ,  $\chi_m \gg 1$

$$\Rightarrow B \gg B_0$$

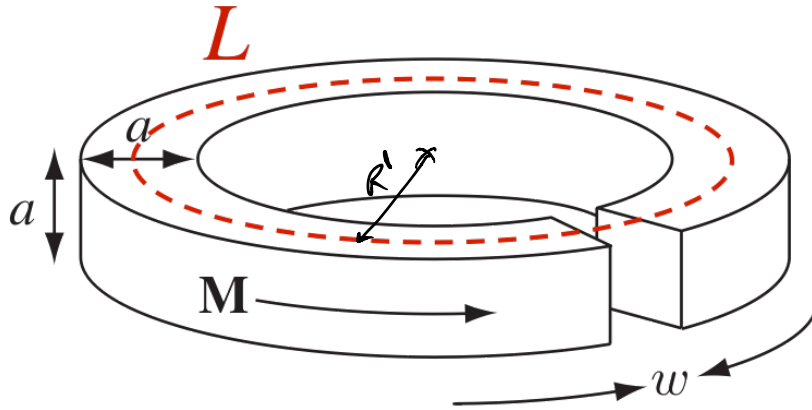
POR QUÊ? DE  $\vec{H} = \chi_m \mu_0 \vec{I} \hat{z} \Rightarrow \vec{J}_B = \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$

$$\vec{K}_m = \vec{H} \times \hat{M} = M_z \hat{z} \times \hat{s} = M_z \hat{\phi}$$

$$K_m = M_z = \chi_m \mu_0 I \gg \mu_0 I$$

COMO SE FOSSE UM SEGUNDO SOLENOIDE DENTRO DO PRIMEIRO COM CORRENTE  $\chi_m I \gg I$

# Problema 6.10



$$w \ll a \ll L = 2\pi R'$$

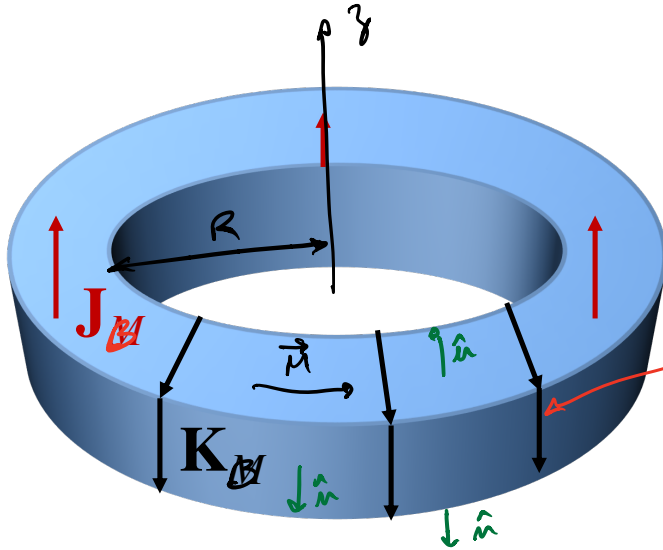
QUERO  $\vec{B}$  NO CENTRO  
DA LACUNA DE EXTENSÃO  $w$   
MAGNETIZAÇÃO CONGELADA  
DE VALOR  $\vec{M}$ .

ESTRATÉGIA É CALCULAR  $\vec{B}$  DO TORO COMPLETO  
E SUBTRAIR A CONTRIBUIÇÃO DO PEQUENO  
SEGMENTO DA TORO DE ESPESSURA  $w$  NECESSÁRIO  
PARA PREENCHER A LACUNA DO PROBLEMA ACIMA.

VAMOS CALCULAR AS DUAS CONTRIBUIÇÕES  
SEPARADAMENTE.



# Campo de um toroide magnetizado



$$\vec{M} = M \hat{\phi} \quad \text{COORD. CILÍNDRICAS}$$

$$\vec{J}_B = \nabla \times \vec{M} = \frac{M}{s} \hat{z}$$

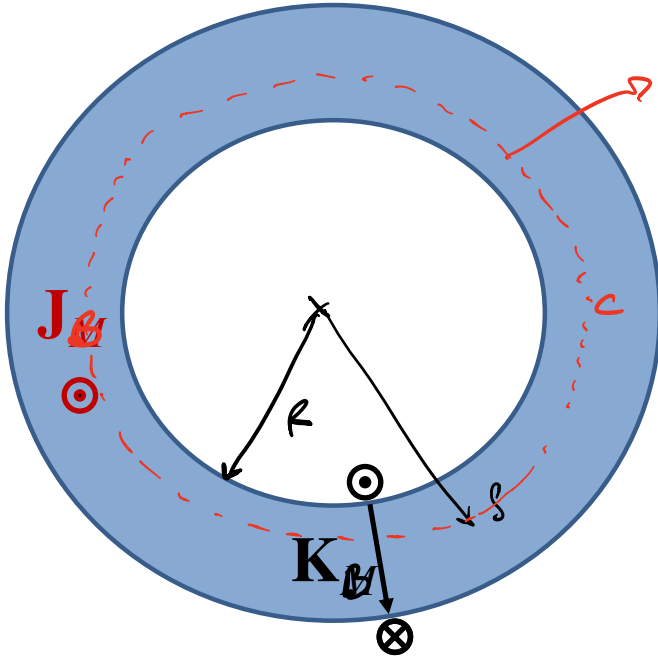
$$\vec{K}_B = \vec{M} \times \hat{n} \Rightarrow |\vec{K}_B| = K_B = M$$

DIREÇÃO E SENTIDO DE  $\vec{K}_B$   
CIRCULA AO LONGO DO  
PERÍMETRO DA SEÇÃO RETA

A CONTRIBUIÇÃO DE  $\vec{K}_B$  É EQUIVALENTE A UM SOLENOIDE TOROIDAL COM  $NI = K_B$  ESPIRAS POR UNIDADE DE COMPRIMENTO, CALCULADO NO EXEMPLO 5.10 DO LIVRO

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 K_B R}{s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 M R}{s} \hat{\phi}$$

# Vista do alto



$$\vec{B}_2 = B_\phi(z, s) \hat{\phi}$$

$$\oint_{C(s)} \vec{B} \cdot d\vec{Q} = \mu_0 I(s)$$

$$\Rightarrow 2\pi s B_\phi(z, s) = \mu_0 \int J_\phi dS$$

$$= \mu_0 \int J_\phi s dS d\phi$$

$$= \mu_0 \int \frac{M}{s} s dS d\phi$$

$$= 2\pi\mu_0 \int_R^s M dS$$

$$= 2\pi\mu_0 M (s - R)$$

$$\Rightarrow B_\phi(s, z) = \frac{\mu_0 M (s - R)}{s} = \mu_0 M \left(1 - \frac{R}{s}\right)$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 M \left(1 - \frac{R}{s}\right) \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 n \frac{B}{s} \hat{\phi} + \mu_0 n \left(1 - \frac{B}{s}\right) \hat{\phi} = \mu_0 n \hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{B}_T = \mu_0 \vec{H}}$$

# Derivação alternativa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad (\vec{J}_F = 0)$$

$$\text{MAS: } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\mu_0(\vec{H} + \vec{M})] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \psi_m$$

PARECIDO COM ELETROSTÁTICA!

SO FUNCIONA SE  $\vec{J}_F = 0$ !

$$\nabla^2 \psi_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \text{COMPARE COM } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

EQ. DE POISSON

NESSE CASO,  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  É FONTE DE  $\psi_m$ .

$$\Rightarrow \psi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[-\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')] dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

COMPARE COM A ELETROSTÁTICA ONDE UM CORPO COM POLARIZAÇÃO  $\vec{P}$  É EQUIVALENTE A:

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

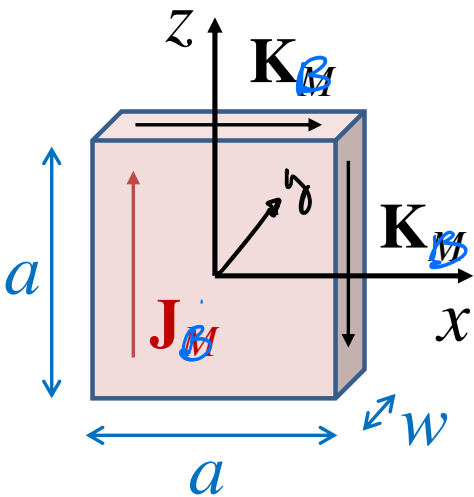
NOTE QUE  $\sigma_B$  APARECE PORQUE  $\vec{P}$  TEM UM SALTO NA SUPERFÍCIE E  $(\vec{\nabla} \cdot)$  É UMA DERIVADA DESSE SALTO  $\rightarrow$  DELTA DE DIRAC NA SUPERFÍCIE.

$$\vec{M} = M \hat{\phi} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

$\vec{M} \cdot \hat{n} = 0$  JÁ QUE  $\vec{M}$  É  $\parallel$  À SUPERFÍCIE E  $\perp \hat{n}$

$$\Rightarrow \psi_m(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \psi_m = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{M}}$$

# Campo do pequeno segmento de toro



$$K_B = M \quad \vec{J}_B = \frac{M}{s} \hat{z}$$

O CAMPO NA ORIGEM DEVIDO A  $K_B$   
É O MESMO DE UMA ESPIRA  
QUADRADA DE LADO  $a$  NO SEU  
CENTRO:

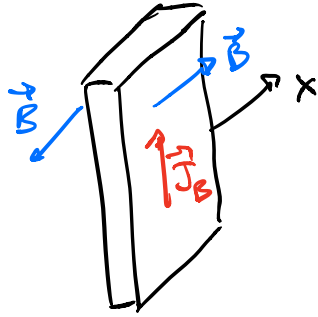
$$\text{CORRENTE } I = K_B \times w = M w$$

CAMPO DA ESPIRA É A SOMA DAS  
CONTRIBUIÇÕES DE CADA LADO: (EQ. 5.35)

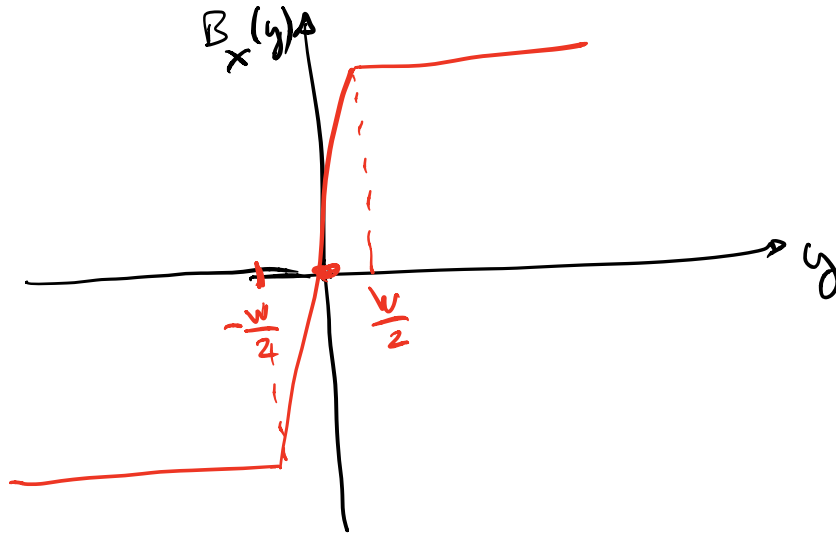
$$B_{\text{LADO}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \mu_0 \frac{I}{a}$$

$$B_{\text{ESPIRA}} = 2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \mu_0 \frac{I}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \mu_0 M \frac{w}{a} \quad \vec{B}_{\text{ESPIRA}} \parallel \hat{y}$$

O CAMPO DEVIDO A  $\vec{J}_B$  E' O CAMPO DE  
UMA PLACA DE CORRENTE:



LONGE DAS BORDAS, A PLACA  
E' EFETIVAMENTE INFINITA  
(PROBLEMA 5.14)



$$\Rightarrow B_x(y=0) = 0!$$

O CAMPO DEVIDO A SEGMENOTO DE TORO:

$$\vec{B}_s = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \mu_0 H \frac{w}{a} \hat{\phi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{w}{a} \mu_0 \vec{H}$$

FINALMENTE, O CAMPO PROCURADO É:

$$\vec{B}_{LACUNA} = \vec{B}_T - \vec{B}_s = \mu_0 \vec{H} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{w}{a} \right]$$

PEQUENA  
CORREÇÃO  
SE  $w \ll a$