Aula 23

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

03/12/2020

Eletrodinâmica

Lei de Ohm

PARA QUE CARGAS EM CONDUTORES SE MOVAM E PERMANEÇAM EM MOVIMENTO É NECESSÁRIO QUE HAJA UMA FORÇA ATUANDO SOBRE ELAS. O CASO MAIS COMUM É A FORÇA ELÉTRICA.

DE MANEIRA GERAL:

$$\vec{J} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E} \rightarrow \text{LEI DE OHM}$$

σ: CONDUTIVIDADE DO MATERIAL

É PRECISO QUE SEMPRE HAJA UMA FORÇA, OU OS ELÉTRONS IRÃO PARAR: SOBRE ELES SEMPRE AGE UMA ESPÉCIE DE "FORÇA VISCOSA" (DEVIDO À REDE DO CRISTAL, IMPUREZAS, ETC.) QUE PRECISA SER CONTRAPOSTA PARA QUE HAJA UMA CORRENTE PERMANENTE.

A FORÇA QUE AGE SOBRE OS ELÉTRONS PODE TAMBÉM SER MAGNÉTICA:

$$\vec{J} \propto \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{J} = \sigma (\vec{v} \times \vec{B})$$

DE MANEIRA GERAL:

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

ONDE $\vec{f}$ É A FORÇA EM QUESTÃO, POR UNIDADE DE CARGA.

CONDUTIVIDADE DO COBRE:

$$\sigma_{Cu} = 1,68 \times 10^{-8} (Ohm\text{-}m)^{-1}$$

$$OHM = \frac{VOLT}{AMPÈRE}$$

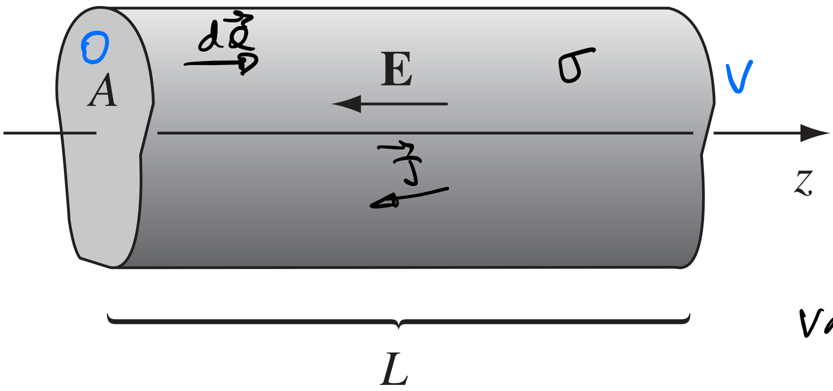
INVERSO DA CONDUTIVIDADE É A RESISTIVIDADE:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Material	Resistivity	Material	Resistivity
Conductors:		*Semiconductors:*	
Silver	1.59×10^{-8}	Sea water	0.2
Copper	1.68×10^{-8}	Germanium	0.46
Gold	2.21×10^{-8}	Diamond	2.7
Aluminum	2.65×10^{-8}	Silicon	2500
Iron	9.61×10^{-8}	*Insulators:*	
Mercury	9.61×10^{-7}	Water (pure)	8.3×10^{3}
Nichrome	1.08×10^{-6}	Glass	$10^{9} - 10^{14}$
Manganese	1.44×10^{-6}	Rubber	$10^{13} - 10^{15}$
Graphite	1.6×10^{-5}	Teflon	$10^{22} - 10^{24}$

TABLE 7.1 Resistivities, in ohm-meters (all values are for 1 atm, 20° C). *Data from Handbook of Chemistry and Physics,* 91st ed. (Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2010) and other references.

A corrente e o campo elétrico em um condutor cilíndrico



$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

SE O CAMPO É UNIFORME NO FIO, A CORRENTE $\vec{J}$ TAMBÉM SERÁ.

VAMOS ASSUMIR ISSO (VER ADIANTE).

$I = JA = \sigma A E \Longrightarrow I = \sigma A \dfrac{V}{L} = \underbrace{\left(\dfrac{\sigma A}{L}\right)}_{1/R} V$

$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

$\Delta V = V - 0 = V = -\int_{ESQ}^{DIR} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\vec{E} \cdot \int_{ESQ}^{DIR} d\vec{\ell} = EL \Rightarrow V = EL$

$V = RI$ (LEI DE OHM)

$R = \dfrac{L}{\sigma A} = \dfrac{\rho L}{A}$ RESISTÊNCIA DO FIO

$G = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sigma A}{L} = \dfrac{A}{\rho L}$ CONDUTÂNCIA DO FIO

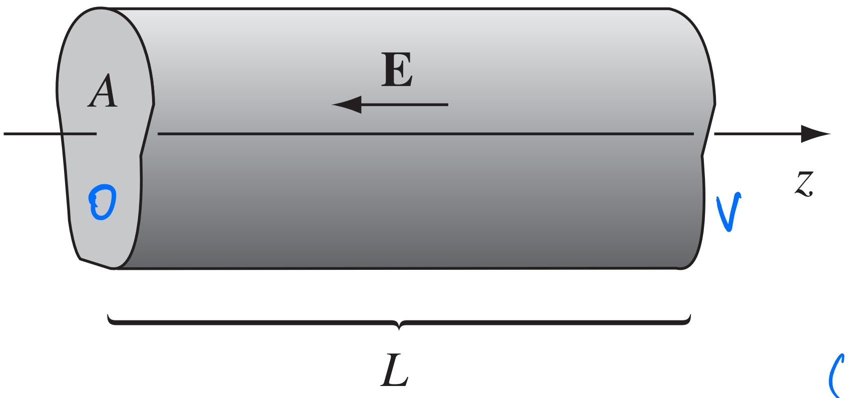
$[R] = [\rho]\dfrac{L}{L^2} = \dfrac{[\rho]}{L} = \dfrac{1}{[\sigma]L}$

$[\sigma] = \dfrac{1}{[R]L}$ $[\rho] = [R]L$

NO SI: $[\rho] = \text{OHM}\cdot\text{m} = [R]L$

$\Rightarrow [R] = \text{OHM}$

Prova de que o campo elétrico num fio de corrente é uniforme



(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sigma}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ (FIO UNIFORME)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (CORRENTE ESTACIONÁRIA)

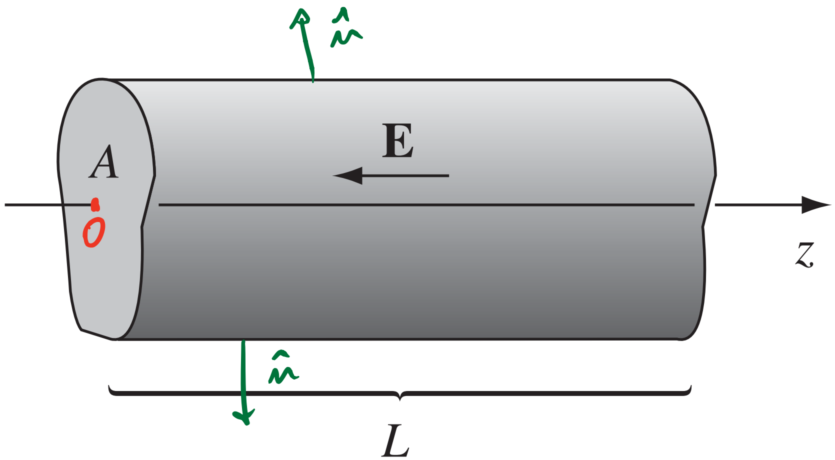
(b) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$\Rightarrow \nabla^2 V = 0$ O POTENCIAL NO FIO SATISFAZ A EQ. DE LAPLACE

(c) CONDIÇÕES DE CONTORNO SOBRE V:

NAS TAMPAS: $V(\vec{r}) = \text{CONST.} \begin{cases} 0 & \text{NA ESQUERDA} \\ V & \text{NA DIREITA} \end{cases}$

NA VERDADE, O FIO NÃO TEM TAMPA (CORRENTE ESTACIONÁRIA)



NAS PAREDES LATERAIS:

$$\vec{J}\cdot\hat{n}=0$$

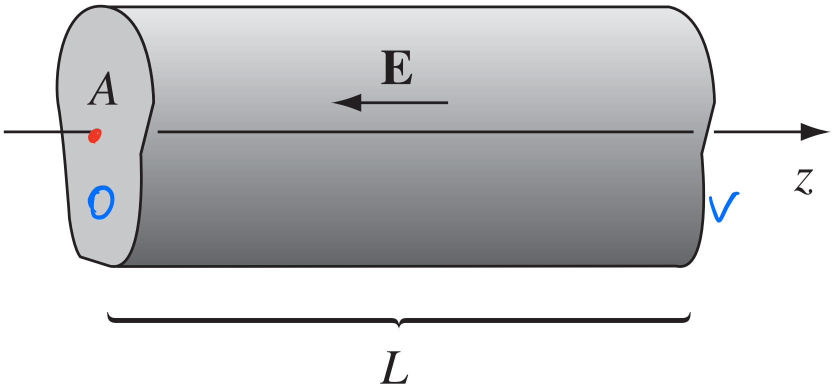
NÃO HÁ CORRENTE SAINDO PELA LATERAL DO FIO

$$\Rightarrow \frac{\vec{E}}{\rho}\cdot\hat{n}=0 \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{n}=0$$

$\Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{\nabla}V=0$ OU $\dfrac{\partial V}{\partial \hat{n}}=0$

NA REGIÃO DO FIO: $\left\{ \begin{array}{l} V = \text{CONST. EM ALGUMAS PARTES DE } S \text{(VOLUME)} \\ \\ \dfrac{\partial V}{\partial \hat{n}} = 0 \quad \text{EM OUTRAS PARTES} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ SOLUÇÃO ÚNICA



CONSIDERE A SEGUINTE SOLUÇÃO:

$$V(\vec{r}) = \frac{V}{L} z$$

$$\nabla^2 V = 0 \checkmark$$

NAS LATERAIS $\hat{n} \perp \hat{z}$

$$\vec{\nabla} V = \frac{V}{L} \hat{z} \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{\nabla} V = 0 \checkmark$$

NAS TAMPAS:

$$V(0) = 0 \checkmark$$

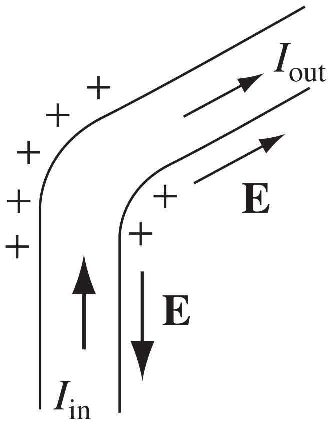
$$V(L) = \frac{V}{L} L = V \checkmark$$

ESSA É $\underline{\underline{A}}$ SOLUÇÃO:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V}{L} \hat{z}$$

$\Rightarrow$ UNIFORME Q.E.D.

Carga não se acumula em condutores em situação estacionária



FISICAMENTE:

. DESBALANÇO DE CORRENTE GERA CAMPO ELÉTRICO LOCAL QUE AGE CONTRA O DESBALANÇO E O DESTRÓI.

MATEMATICAMENTE: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ (LEI CONS. CARGA)

$= -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (LEI DE OHM)

$= -\sigma \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$ (LEI DE GAUSS)

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho} \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\sigma/\epsilon_0 t} = \rho_0(\vec{r}) e^{-t/\tau}$

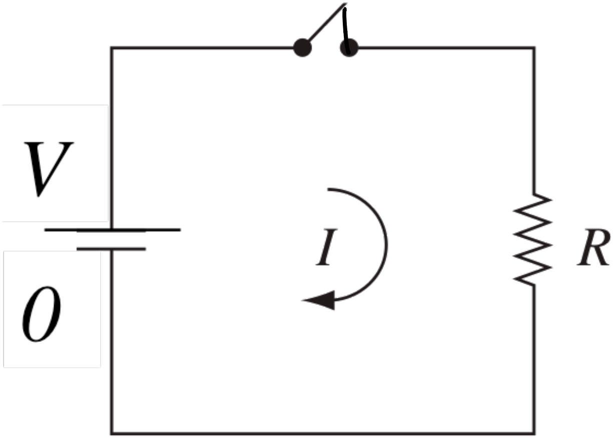
$\rho_0(\vec{r})$ = CARGA EM $t = 0$

A CARGA INICIAL ACUMULADA DECAI A ZERO COM O TEMPO NUMA ESCALA TEMPORAL:

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \Rightarrow \tau_{Cu} = 1.5 \times 10^{-15}\ s$$

TEMPO CURTÍSSIMO!

Força eletromotriz (emf)



PARA QUE A CORRENTE CIRCULE PERMANENTEMENTE, COMO VIMOS, TEM QUE HAVER FORÇA EXTERNA.

ELA PODE SER PURAMENTE ELÉTRICA?

INTEGRANDO A CORRENTE $\vec{J}$ AO LONGO DE TODO O CIRCUITO:

$$0 \neq \oint \vec{J}\cdot d\vec{\ell} = \oint \sigma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \sigma \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \neq 0$ O QUE É ABSURDO NUMA SITUAÇÃO ELETROSTÁTICA

$\Rightarrow$ TEM QUE HAVER OUTRAS FORÇAS ATUANDO NAS CARGAS.

DENTRO DA BATERIA, OUTRAS FORÇAS ("QUÍMICAS") ATUAM, ALÉM DE $\vec{E}$, QUE CHAMAREMOS DE:

$\vec{f}_s$ (FORÇAS OUTRAS POR UNIDADE DE CARGA)

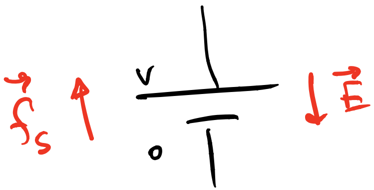
HÁ VÁRIAS ORIGENS POSSÍVEIS PARA $\vec{f}_s$ (MECÂNICA, MAGNÉTICA, ETC.)

FORÇA TOTAL POR UNIDADE DE CARGA: $\vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_s$

DEFINO, PARA UM CIRCUITO $\underline{C}$, A FORÇA ELETROMOTRIZ $\underline{\mathcal{E}}$ (FEM):

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{f}_s + \vec{E}) \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell}$$

NUMA SITUAÇÃO ELETROSTÁTICA



SUPONHAMOS QUE A BATERIA SEJA IDEAL: NÃO TEM RESISTÊNCIA INTERNA

NESSE CASO: $\sigma = \infty$, $\varrho = 0$

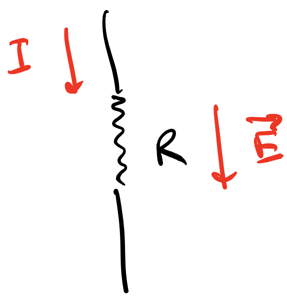
$\Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{f} \longrightarrow \vec{J} \neq 0$ com $\vec{f} = 0$

$\Rightarrow \vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{f}_s = -\vec{E}}$

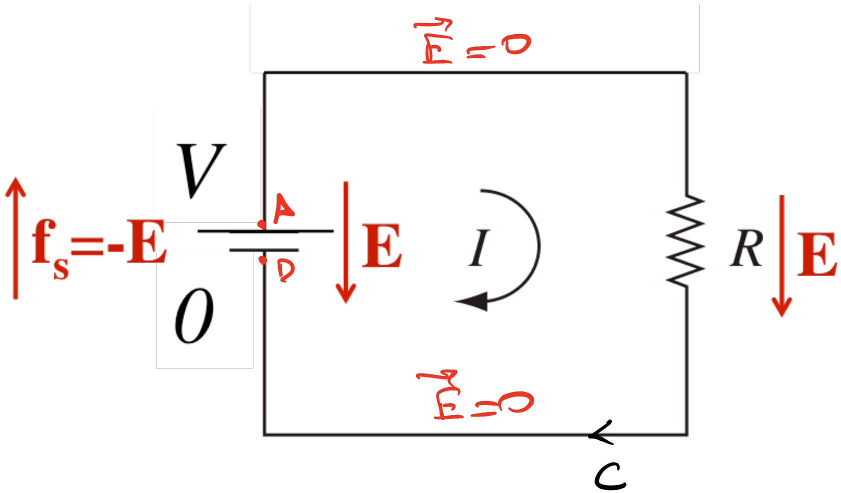
DENTRO DA BATERIA

NOS FIOS $(\sigma = \infty) \Rightarrow \vec{f} = \vec{E} = 0$

NO RESISTOR $(\sigma \neq \infty)$: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\vec{f}_s = 0$



Resumindo



$$\varepsilon = \Delta V$$

$$\varepsilon = V - 0 = V$$

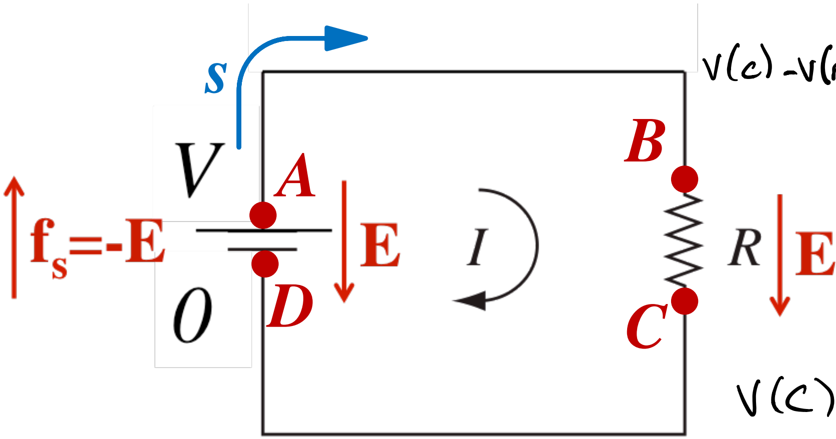
$$\oint \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = \int_D^A \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = -\int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= V(A) - V(D) = V$$

Força eletromotriz (emf):

$$\varepsilon = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{f}_s + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l}$$

Percorrendo o circuito

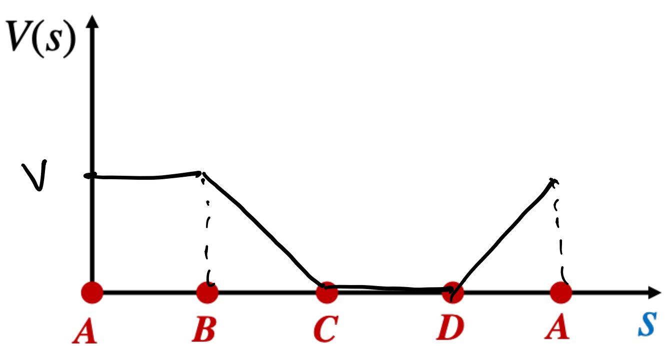


$V(C)-V(B) = -\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = V_1 < 0$

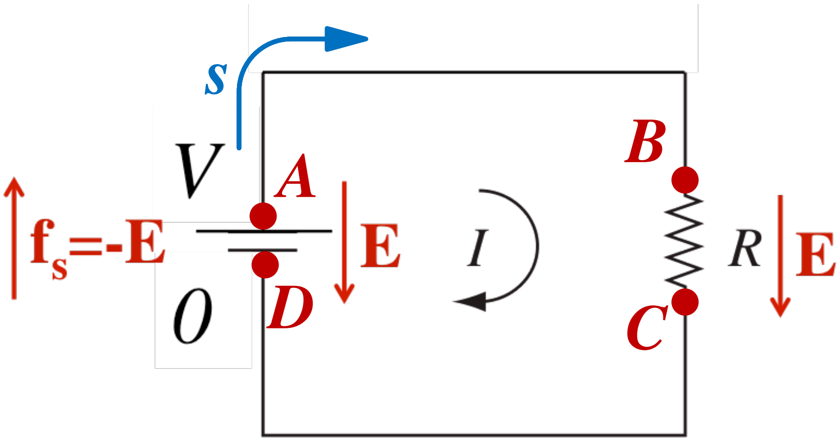
$V(A)-V(D) = V - 0 = V$

$V(A) = V(B)$ E $V(C) = V(D)$

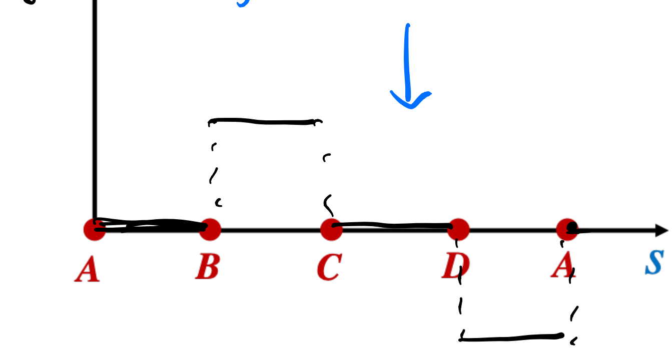
$V(C)-V(B) = V_1 = V(D)-(A) = -V$



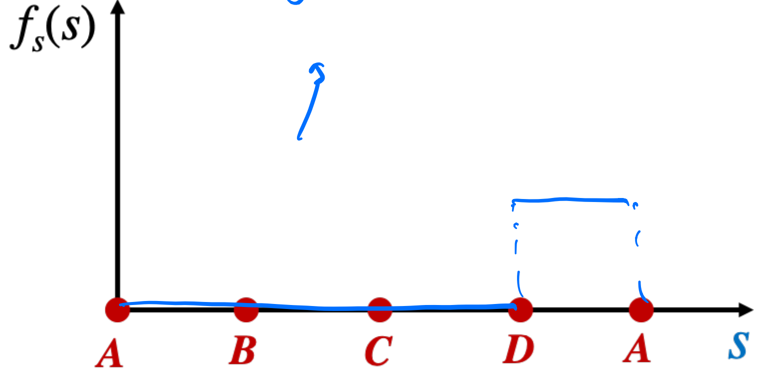
Percorrendo o circuito



$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$

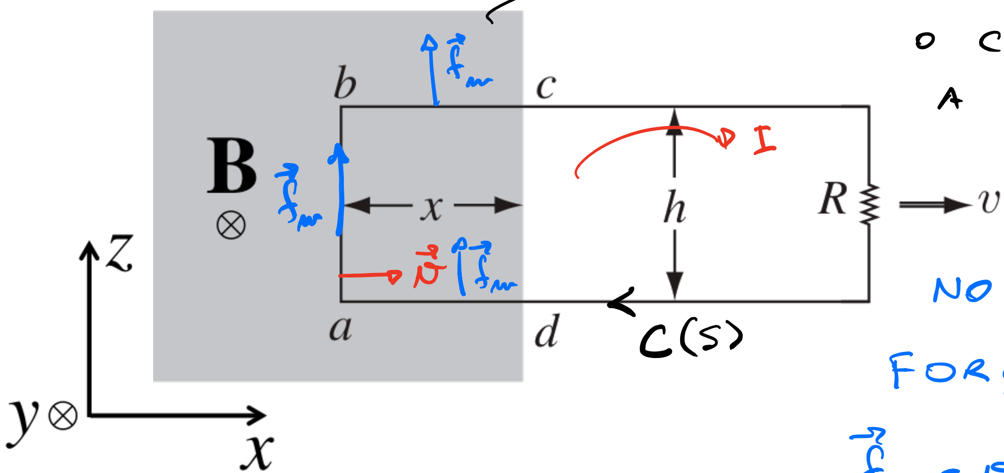


$\oint \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon = V$



emf gerada por movimento

CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME



O CIRCUITO É PUXADO PARA A DIREITA COM VELOCIDADE INSTANTÂNEA $\underline{v}$

NO BRAÇO ab A FORÇA MAGNÉTICA:

$$\vec{f}_m = vB\hat{z}$$

ESSA FORÇA GERA CORRENTE NO CIRCUITO

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_m\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_m\cdot d\vec{l} = vBh$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBh}{R}$$

QUAL É O FLUXO DE $\vec{B}$ PELA SUPERFÍCIE $\underline{S}$ CUJA BORDA É O CIRCUITO $\underline{C}$: $d\vec{S} = dS\,\hat{y}$

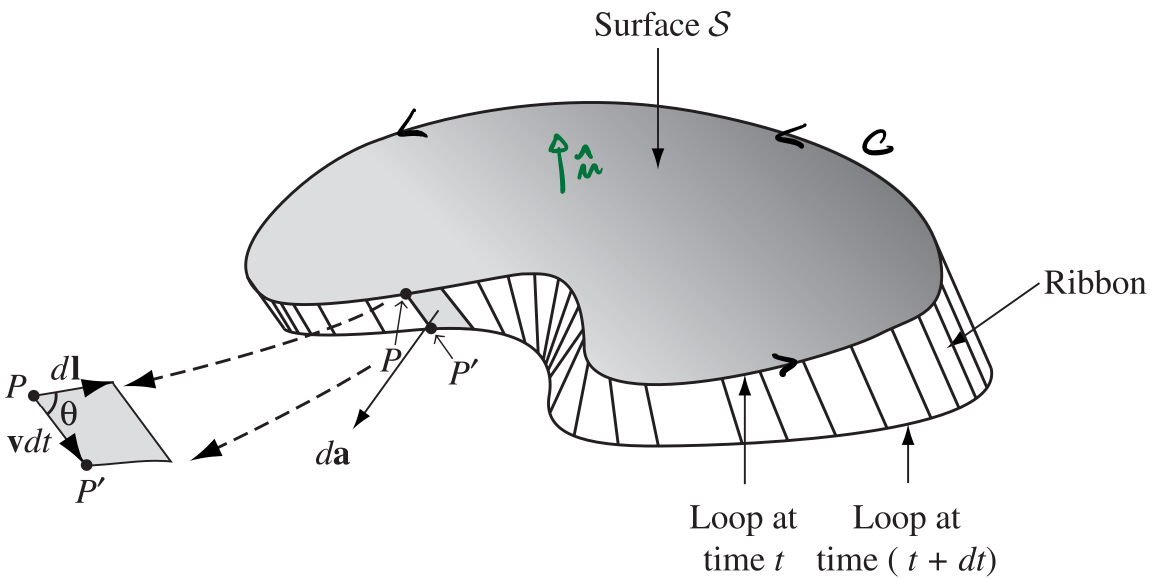
$$\Phi_B(S) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \int dS = Bhx$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bh \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-v} = -Bhv$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

LEI DO FLUXO

A lei é válida para movimentos genéricos do circuito (prova no livro)



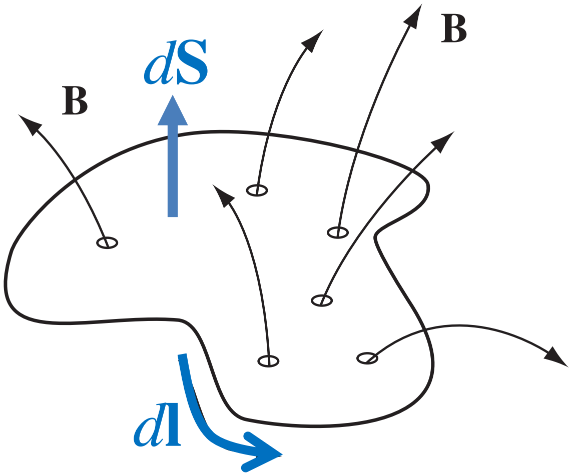
Lei do fluxo:

$\vec{f}_m$

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Cuidado com o sinal na lei do fluxo

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

LEI DE LENZ