Aula 24

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

10/12/2020

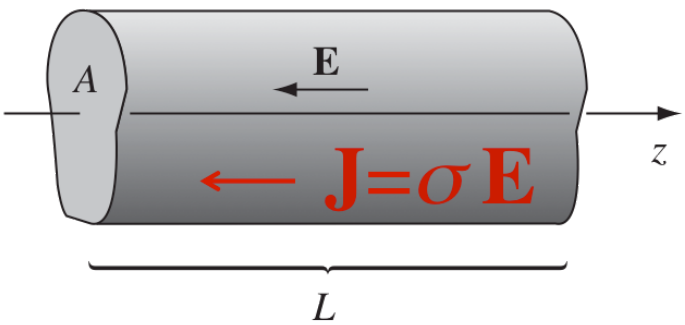
Aula passada

Lei de Ohm: $\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}}$ σ = CONDUTIVIDADE DO MATERIAL

$\mathbf{f}$: força por unidade de carga dos portadores.

Por exemplo: $\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{f}_s + \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

Lei de Ohm num fio:



$$V = RI; \;\; R = \frac{\rho L}{A}$$

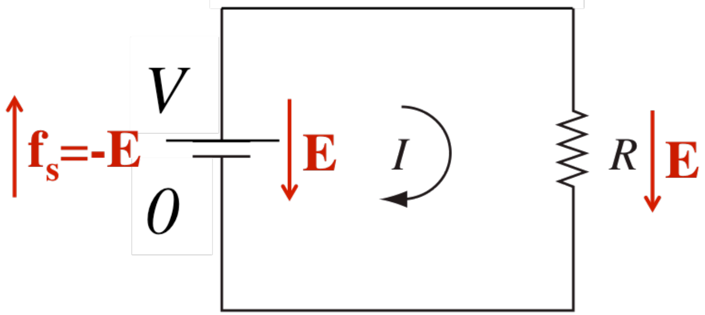
ρ: resistividade do material $= \frac{1}{\sigma}$

Aula passada

Força eletromotriz (emf): $\boxed{\varepsilon = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}$

Força eletromotriz (emf) num circuito *V*-*R*:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{f}_s + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l}$$

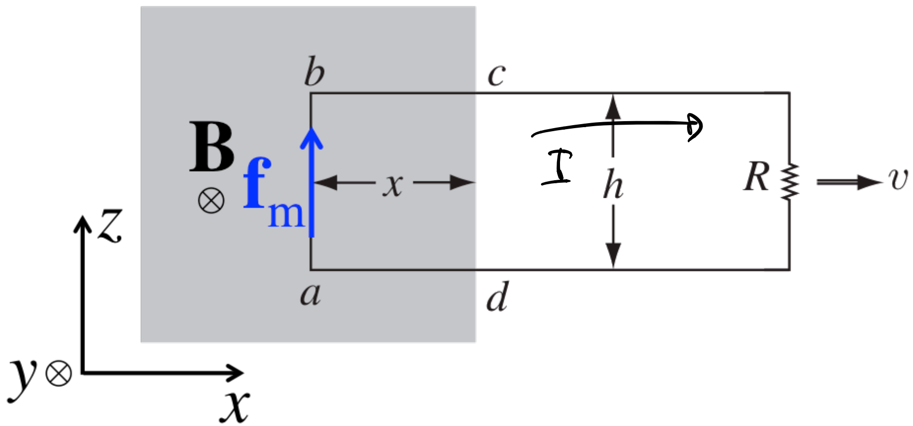


$$\varepsilon = \Delta V$$
$$\varepsilon = V - 0 = V$$

A emf resulta de forças químicas dentro da bateria.

Aula passada

Força eletromotriz gerada por movimento



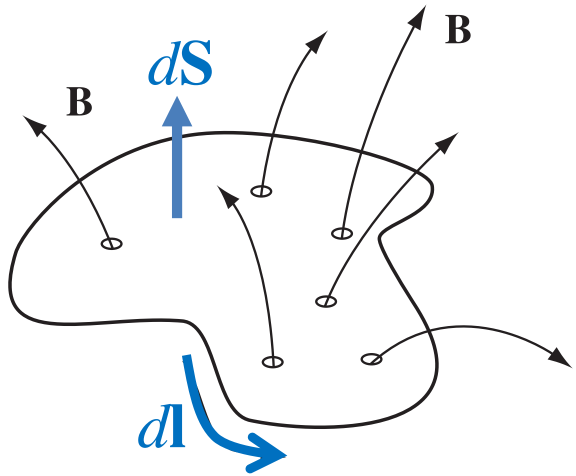
A emf é gerada pela força magnética $\mathbf{f}_\text{m}$ em *ab*:

$$\varepsilon = \oint_{C[S(t)]} \mathbf{f}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C[S(t)]} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

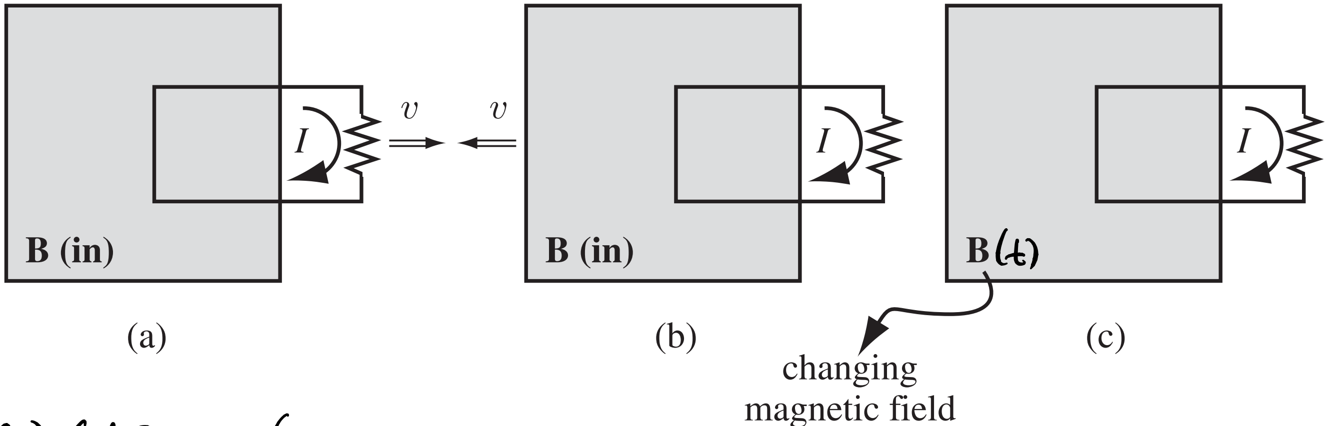
Lei do fluxo

Aula passada

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



Lei de indução de Faraday



(a) CASO JÁ ANALISADO:

$$\mathcal{E} = \int_{c(s)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left[\int_{s} \vec{B} \cdot d\vec{s}\right]$$

(b) E (c): TAMBÉM VALE A LEI DO FLUXO: (FARADAY)

$$\mathcal{E} = \int_{c(s)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left[\int_{s} \vec{B} \cdot d\vec{s}\right]$$

NESSES CASOS, NÃO HÁ FORÇA MAGNÉTICA: $\vec{f} = ?$

FARADAY: SUPÔS QUE $\vec{f} = \vec{E}$ (CAMPO ELÉTRICO)

NESSE CASO:

$$\oint_{C(S)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right] =$$

$$= \int_S \left[\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}\right]$$

T. STOKES: $\oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$

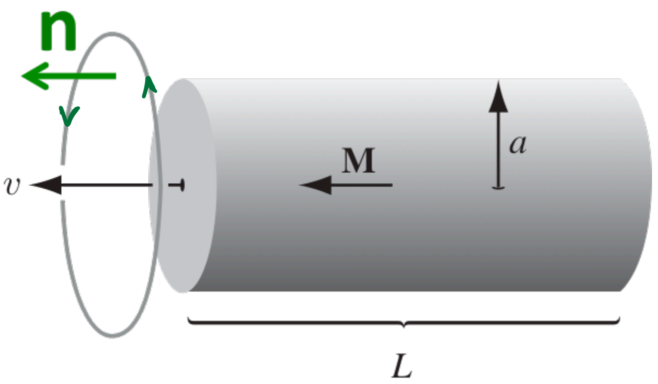
COMO $\underline{S}$ É ARBITRÁRIA: $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (LEI DE FARADAY)

ASSIM COMO ρ ERA FONTE DE $\vec{E}$, TAMBÉM $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ O É.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \oplus \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

Lei de Lenz

Exemplo 7.5: um cilindro magnetizado longo passando por dentro de um loop.



CAMPO MAGNÉTICO DO LOOP LONGO:

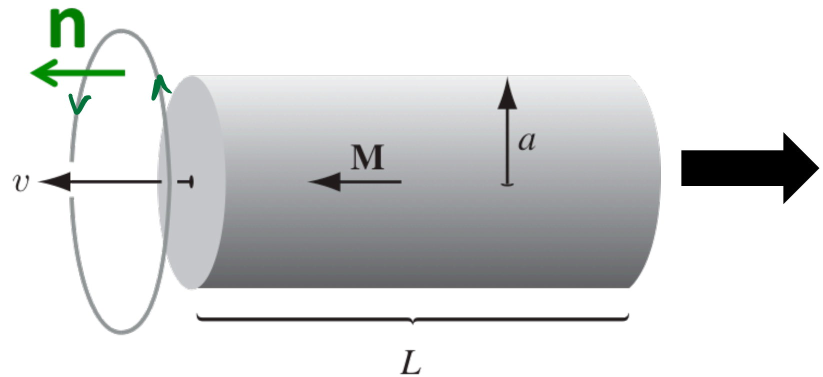
(a) $\vec{B} = 0$ FORA DO CILINDRO

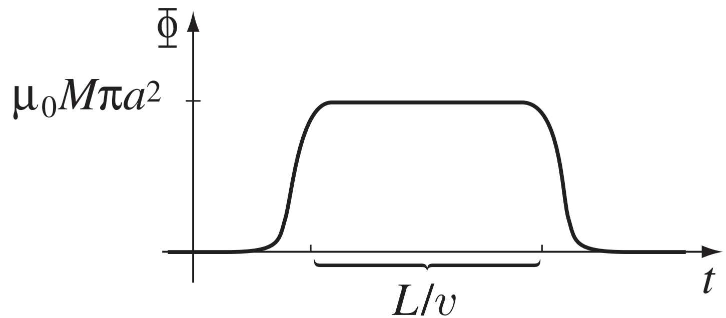
(b) $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ DENTRO DO CILINDRO

DESPREZANDO EFEITOS DE BORDA

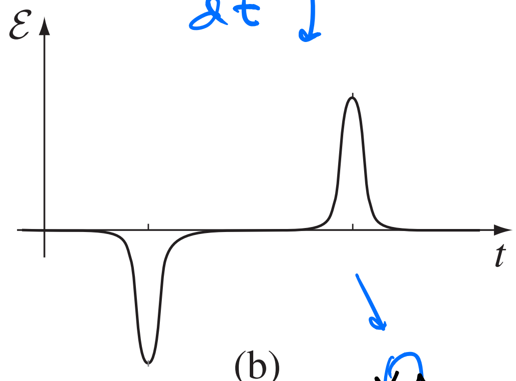
VAMOS CARACTERIZAR A $\mathcal{E}$ E A CORRENTE I NO LOOP.

Lei de Lenz





$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$



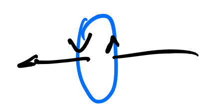
FLUXO DEVIDO AO CILINDRO ATRAVÉS DO LOOP É:

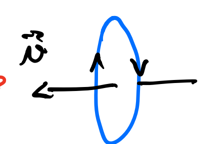
(a) 0, SE O CILINDRO ESTIVER FORA

(b) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint \mu_0 \vec{M}\cdot d\vec{S} = \mu_0 M \int dS$

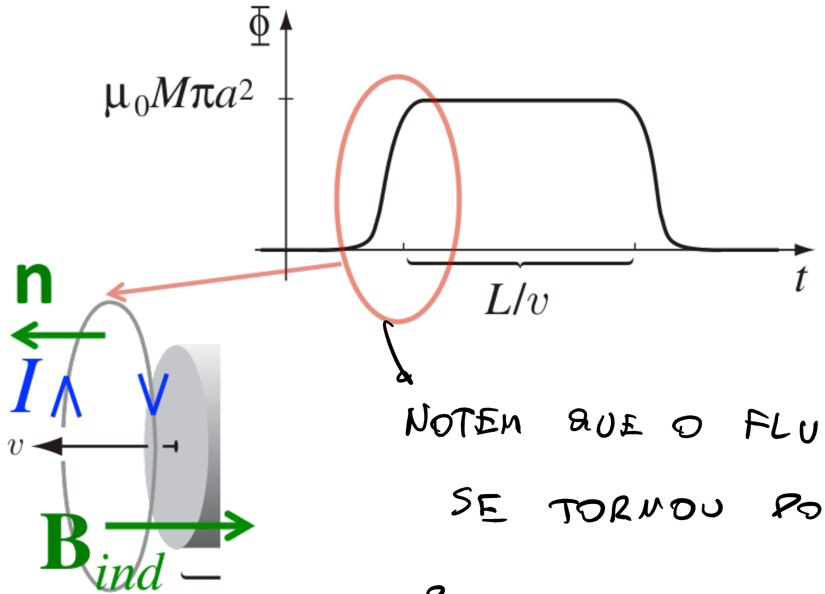
$= \mu_0 M (\pi a^2)$

DEPOIS QUE O CILINDRO ENTRA NO LOOP





Lei de Lenz



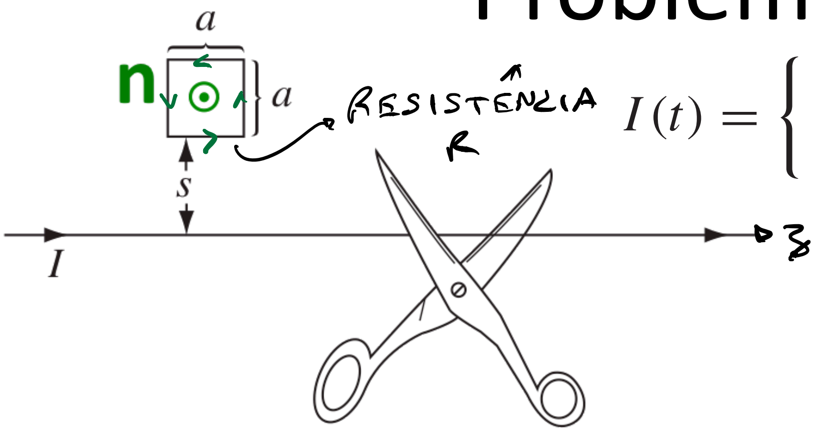
NOTEM QUE O FLUXO ERA ZERO E SE TORNOU POSITIVO, NA DIREÇÃO $\hat{n}$

PORTANTO, SUA VARIAÇÃO É NO SENTIDO DE $\hat{n}$.

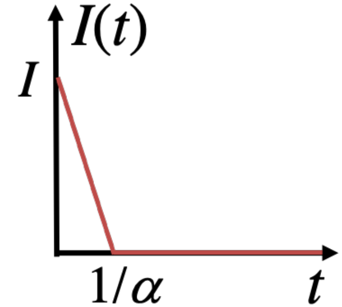
O CAMPO INDUZIDO NO LOOP $\vec{B}_{IND}$ É CONTRÁRIO A ESSA VARIAÇÃO:

$\vec{B} \propto -\hat{n}$ (LEI DE LENZ)

Problema 7.18



$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I, & \text{for } 0 \le t \le 1/\alpha, \\ 0, & \text{for } t > 1/\alpha. \end{cases}$$



a) Qual é a direção da corrente?

b) Qual é a carga total que passa por um ponto?

a) FLUXO ANTES : SENTIDO DE $\hat{n}$

" DEPOIS : 0

VARIAÇÃO DO FLUXO $\rightarrow -\hat{n}$

CAMPO INDUZIDO NO LOOP $\rightarrow$ SENTIDO $\hat{n}$

CORRENTE NA DIREÇÃO ANTI-HORÁRIO

O CAMPO $\vec{B}$ DEVIDO À CORRENTE ESTACIONÁRIA I É:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho} \quad \text{(COORD. CILINDRÍCAS)}$$

APROXIMAÇÃO QUASE ESTÁTICA:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho}$$

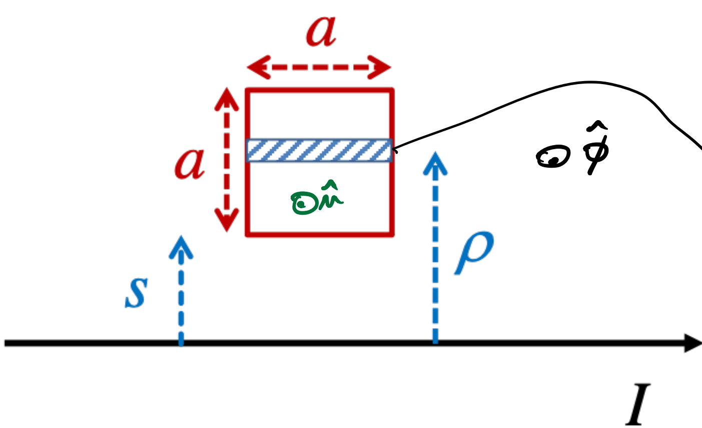
VÁLIDA PERTO DO FIO:

$$\rho \ll c T$$

T: TEMPO CARACTERÍSTICO DE VARIAÇÃO $T = \frac{1}{\alpha}$

c: VELOCIDADE DA LUZ

$$\rho \ll \frac{c}{\alpha} \Rightarrow (s, a) \ll \frac{c}{\alpha}$$



$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho}$$

$$d\vec{S} = ds\,\hat{n} = ds\,\hat{\phi}$$

$$ds = a\,d\rho$$

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_s^{a+s} \frac{a\,d\rho}{\rho}$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)\,a}{2\pi} \ln \rho \Big|_s^{a+s}$$

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I(t)\,a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{s}\right) \underbrace{\left(-\frac{dI}{dt}\right)}_{\alpha I}$$

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\alpha \mu_0 I a}{2\pi R} \ln\left(1+\frac{a}{s}\right)} \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{\alpha}$$

CARGA TOTAL POR UM PONTO:

$$Q = \int_0^{1/\alpha} I_{ind}\, dt = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln\left(1+\frac{a}{s}\right)$$

QUE NÃO DEPENDE DO TEMPO $\frac{1}{\alpha}$

DE DESLIGAMENTO DA CORRENTE.

Analogia com a lei de Ampère

Lei de Ampère: $$\oint_{C(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\left(S\right) = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{J}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

Lei de Faraday: $$\oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B\left(S\right)}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Ampère} & - & \text{Faraday} \\ \mu_0 \mathbf{J} & \leftrightarrow & -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{B} & \leftrightarrow & \mathbf{E} \end{array}}$$

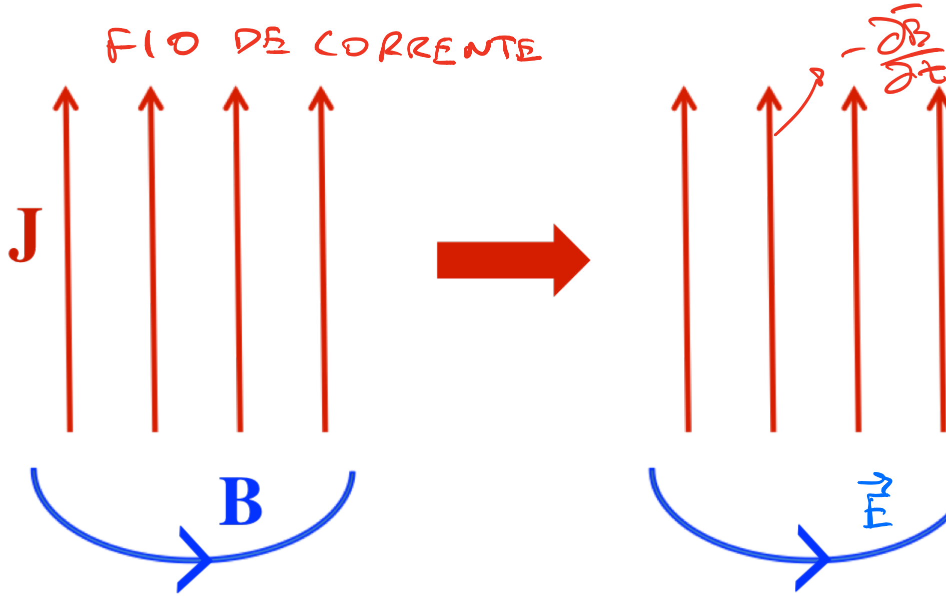
ESSA ANALOGIA É MUITO ÚTIL PARA DESCOBRIR A DIREÇÃO DE $\vec{E}$ INDUZIDO NUMA SITUAÇÃO DE ALTA SIMETRIA

Analogia com a lei de Ampère

Lei de Ampère: $$\oint_{C(S)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\,(S) = \int_S (\mu_0 \mathbf{J})\cdot d\mathbf{S}$$

Lei de Faraday: $$\oint_{C(S)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B\,(S)}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

Ampère	–	Faraday
$\mu_0\mathbf{J}$	$\leftrightarrow$	$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\mathbf{B}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{E}$

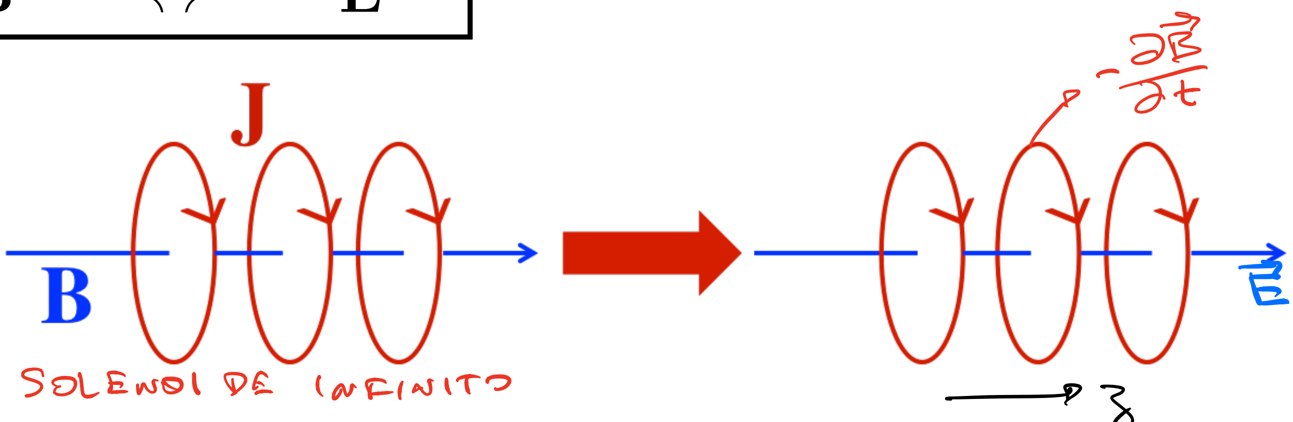


Analogia com a lei de Ampère

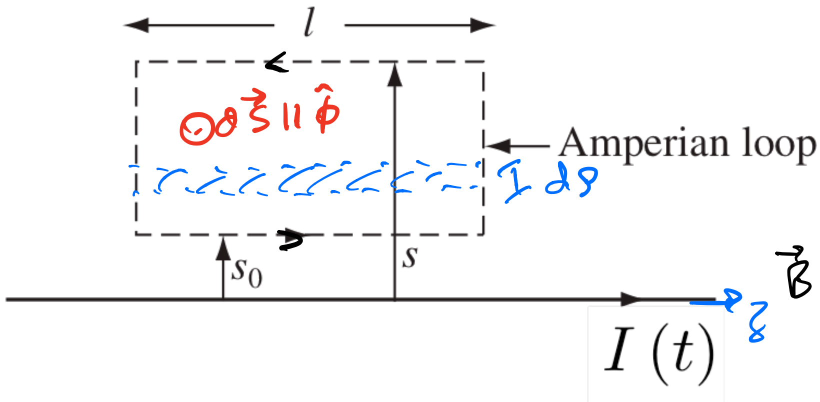
Lei de Ampère: $$\oint_{C(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\,(S) = \int_S (\mu_0 \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S}$$

Lei de Faraday: $$\oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B\,(S)}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

Ampère	–	Faraday
$\mu_0 \mathbf{J}$	$\leftrightarrow$	$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\mathbf{B}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{E}$



Exemplo 7.9



Achar o campo elétrico induzido

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi \rho}\,\hat{\phi} \quad \text{(QUASE ESTÁTICA)}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi\rho}\,\hat{\phi}\left(\frac{dI}{dt}\right)$$

USANDO A ANALOGIA COM A LEI DE AMPÈRE (SLIDE ANTERIOR) $\Rightarrow \vec{E} = E_z\,\hat{z} = E_z(\rho)\,\hat{z}$

USANDO A AMPERIANA ACIMA:

$$\oint_{C(S)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\int_S \underbrace{\hat{\phi}\cdot d\vec{S}}_{dS = \ell\, d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

$$\oint_{C(s)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \ell\, E_z(\rho = s_0) - \ell\, E_z(\rho = s)$$

$$E_z(s_0) - E_z(s) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z(s) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + E_z(s_0)}$$

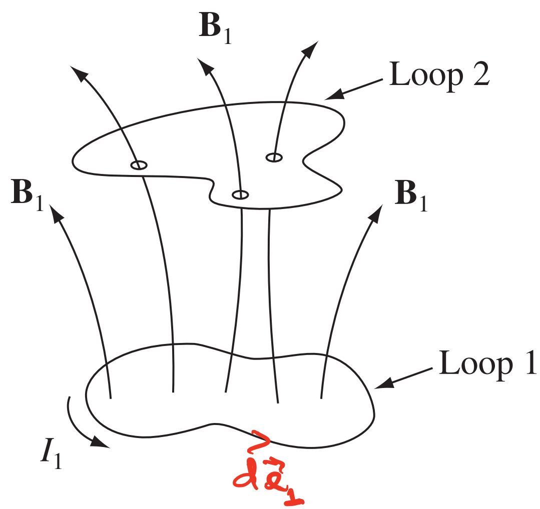
VÁLIDO APENAS PARA $s \ll c\,T$

(AP. QUASE-ESTÁTICA)

T : TEMPO TÍPICO DE VARIAÇÃO DE $I(t)$

Indutância

DADOS DOIS LOOPS DE FIO,
AO PASSAR CORRENTE I_1
PELO PRIMEIRO, CRIA-SE
FLUXO Φ_2 NO SEGUNDO:



$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}_2 \propto I_1$$

$$= \int_{S_2} \left[\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \cdot d\vec{S}_2 = M_{21} I_1$$

M_{21} É PURAMENTE GEOMÉTRICO

ANALOGAMENTE:

$$\Phi_1 = M_{12} I_2$$

O PRÓPRIO CIRCUITO GERA FLUXO NELE MESMO:

$$\Phi_1 = L_1 I_1$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2$$

EM GERAL:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

M_{12}, M_{21} : INDUTÂNCIAS MÚTUAS

L_1, L_2 : AUTO-INDUTÂNCIAS

PODE SER GENERALIZADO PARA $\underline{N}$ CIRCUITOS:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_j \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$M_{ii} = L_i$$

As indutâncias mútuas são simétricas

VAMOS MOSTRAR QUE $M_{ij} = M_{ji}$

$$\Phi_j = \int_{S_j} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_j = \int_{S_j} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_i) \cdot d\vec{S}_j = \oint_{C_j} \vec{A}_i(\vec{r}_j) \cdot d\vec{\ell}_j$$

$$\vec{A}_i(\vec{r}_j) = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_{C_i} \frac{d\vec{\ell}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

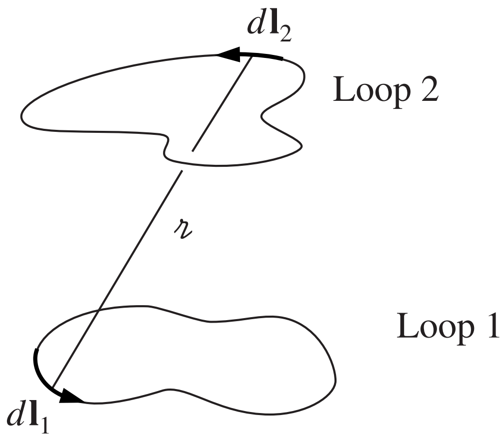
$$\Phi_j = \oint_{C_j} \left[\frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_{C_i} \frac{d\vec{\ell}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right] \cdot d\vec{\ell}_j$$

$$= \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{\ell}_i \cdot d\vec{\ell}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \equiv M_{ji} I_i$$

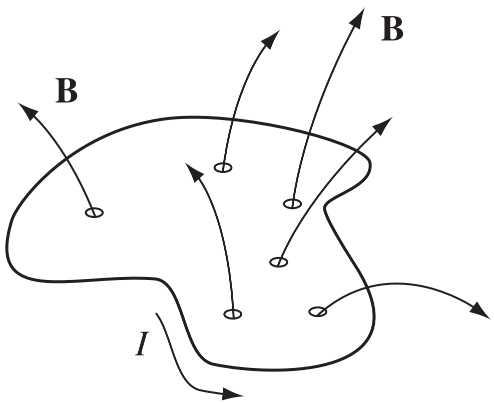
$$M_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{\ell}_i \cdot d\vec{\ell}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = M_{ji}$$ É SIMÉTRICA

POSSO INCLUSIVE FAZER $i = j$

Fórmula de Neumann



$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$



$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_i} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

CUIDADO QUANDO $\vec{r} = \vec{r}'$!