Aula 25

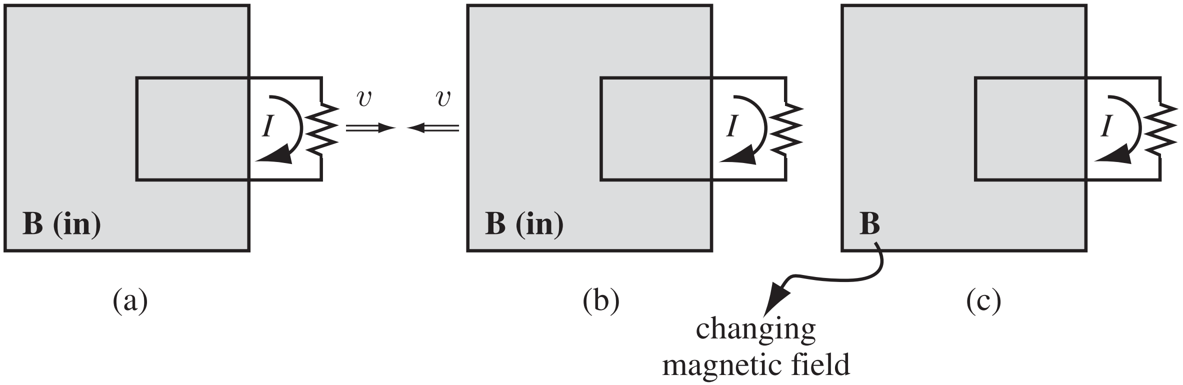
F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

15/12/2020

Aulas passadas

Experimentos de Faraday



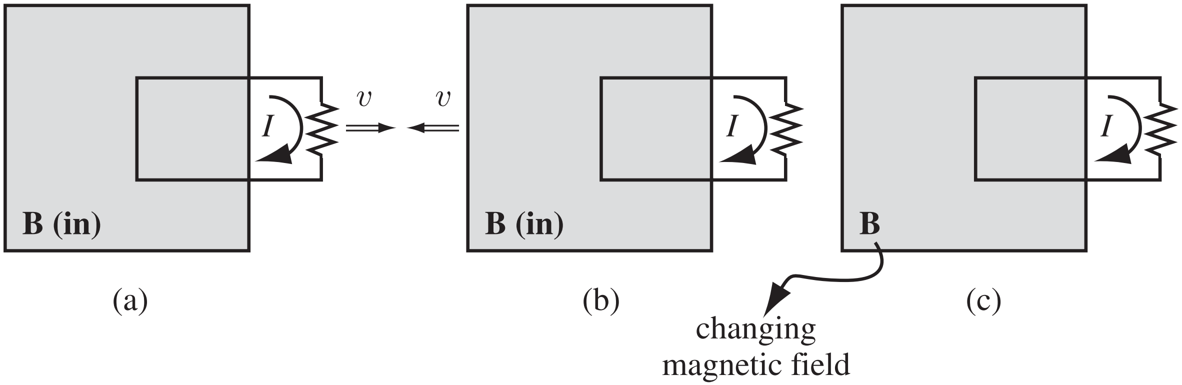
(a) (b) (c)

Em (a) a fem é gerada pela força magnética (força de Lorentz) num circuito que se move

$$\varepsilon = \oint_{C[S(t)]} \mathbf{f}_m \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Aulas passadas

Experimentos de Faraday



Mas em (b) e (c) a emf é gerada por campo elétrico gerado pelo campo magnético variável

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Aulas passadas

Lei de Faraday:

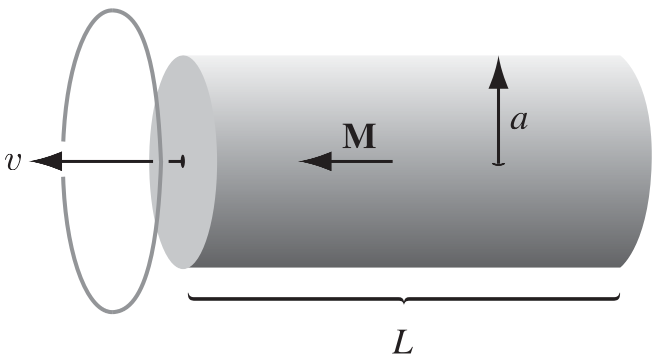
$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

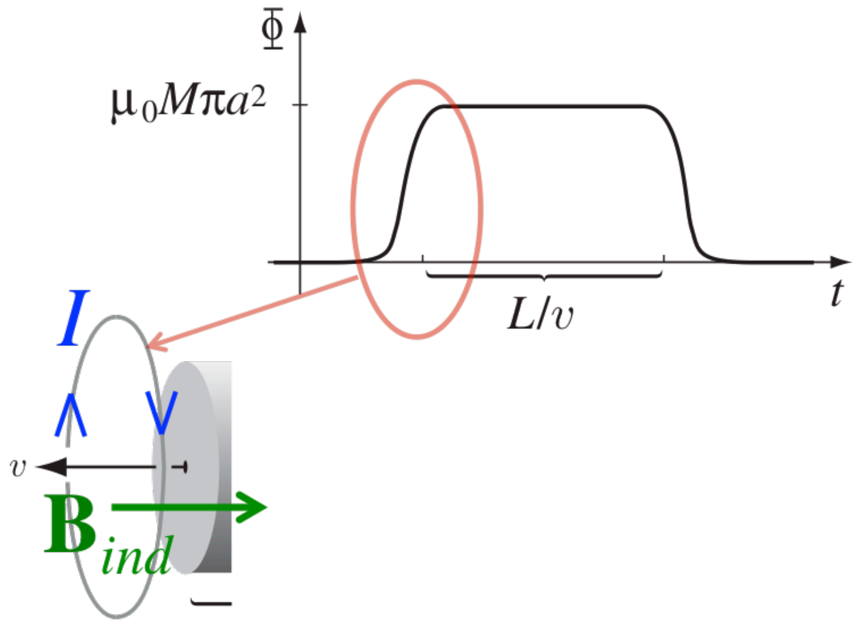
$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

Além de cargas, campos magnéticos dependentes do tempo geram campo elétrico.

Aulas passadas

Lei de Lenz: corrente induzida gera um fluxo magnético oposto à **<u>variação</u>** do fluxo magnético indutor da emf.





Aulas passadas

Analogia com a lei de Ampère (útil quando há alta simetria):

Lei de Ampère:
$$\oint_{C(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\left(S\right) = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{J}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

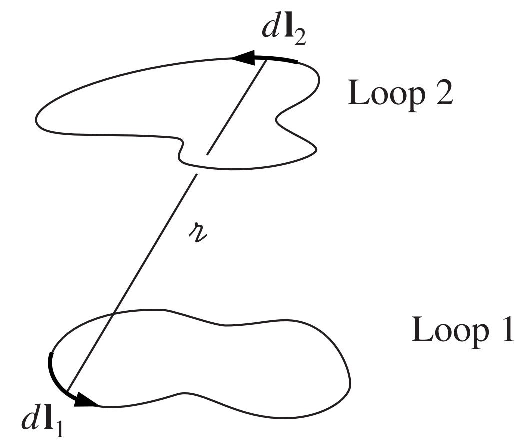
Lei de Faraday:
$$\oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B\left(S\right)}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Ampère} & - & \text{Faraday} \\ \mu_0 \mathbf{J} & \leftrightarrow & -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{B} & \leftrightarrow & \mathbf{E} \end{array}}$$

Aulas passadas

Indutância

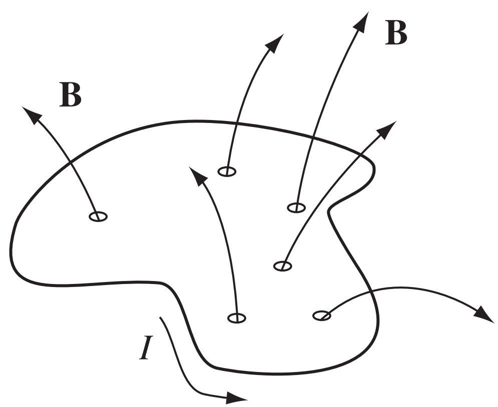
$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_1 &= M_{11}I_1 + M_{12}I_2 \\ \Phi_2 &= M_{21}I_1 + M_{22}I_2 \end{aligned}}$$



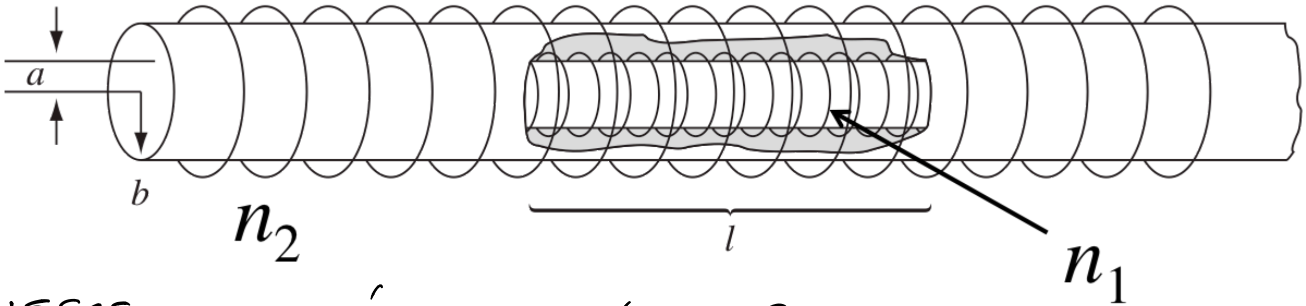
$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = M_{ji}$$

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_i} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Cuidado!



Exemplo 7.10: Indutância mútua de dois solenoides (um muito longo)



NESSE CASO, É MAIS FÁCIL PASSAR A CORRENTE PELO SOLENOIDE MAIS LONGO E CALCULAR O FLUXO ATRAVÉS DAS ESPIRAS DO MENOR: $\Phi_1 = M_{12} I_2$

O CAMPO DEVIDO A 2 NA REGIÃO DE 1 É CONSTANTE

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

Φ_1 (UMA ESPIRA) $= B_2 (\pi a^2) = \mu_0 n_2 (\pi a^2) I_2$

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_1 (\text{UMA ESPIRA}) = n_1 l \mu_0 n_2 I_2 (\pi a^2) = M_{12} I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{12} = M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 \underbrace{(\pi l a^2)}_{V_1}}$$

V_1 = VOLUME DO SOLENOIDE 1

Correntes induzidas

USANDO A FÓRMULA DOS FLUXOS EM TERMOS DAS CORRENTES E DERIVANDO NO TEMPO:

$$-\mathcal{E}_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = M_{12}\frac{dI_2}{dt} + M_{11}\frac{dI_1}{dt}$$

$$M_{11} = L_1$$

$$M_{22} = L_2$$

$$-\mathcal{E}_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = M_{21}\frac{dI_1}{dt} + M_{22}\frac{dI_2}{dt}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 = -L_1\dfrac{dI_1}{dt} - M\dfrac{dI_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{array}\right\}$$

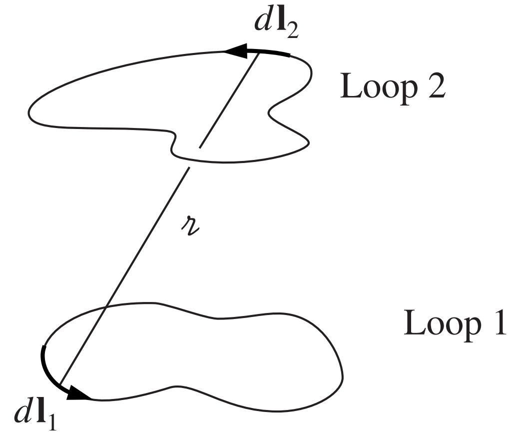
NO CASO DE UM CIRCUITO APENAS:

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}}$$

Correntes induzidas

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

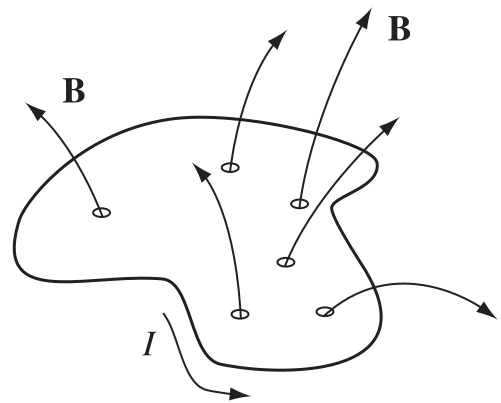
$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$



$$M_{11} = L_1$$

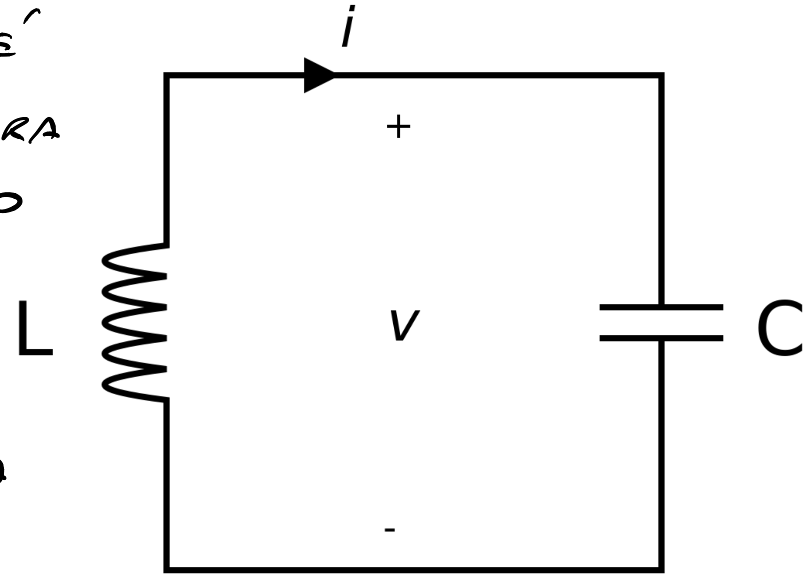
$$M_{22} = L_2$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$



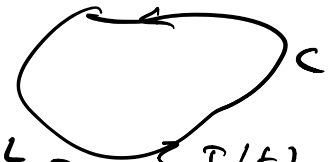
Energia magnética

A ENERGIA MAGNÉTICA É AQUELA NECESSÁRIA PARA CRIAR UMA CONFIGURAÇÃO DE CORRENTES, A PARTIR DO ZERO, <u>CONTRA</u> A FEM INDUZIDA. ESSA ENERGIA É RECUPERÁVEL (POR EXEMPLO, NUM CIRCUITO LC, COMO ACIMA)



E NÃO TEM NADA A VER COM PERDAS POR EFEITO JOULE ($P=RI^2$), QUE É IRREVERSIVELMENTE TRANSFORMADA EM ENERGIA TÉRMICA.

Para um circuito



I(t) VAI DE ZERO ATÉ O VALOR FINAL I

CONTRA A FEM

$$dW = -\mathcal{E}\, dq = +\frac{d\Phi_B}{dt} I\, dt = I\, d\Phi_B$$

PARA UM CIRCUITO: $\Phi_B = L\, I \Rightarrow d\Phi_B = L\, dI$

$$dW = L\, I\, dI$$

O TRABALHO TOTAL É A INTEGRAL DE dW:

$$W = \int dW = \int_0^I L\, I\, dI = L \left. \frac{I^2}{2} \right|_{I=0}^{I=I} = \frac{1}{2} L I^2$$

Para dois ou mais circuitos

$$dW_1 = I_1 d\Phi_{B1} = I_1 (L_1 dI_1 + M dI_2)$$

$$dW_2 = I_2 d\Phi_{B2} = I_2 (L_2 dI_2 + M dI_1)$$

$$\left.\right\} dW = dW_1 + dW_2$$

$$W = \int dW = \int (dW_1 + dW_2) = \int \Big[L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 +$$

$$M \underbrace{(I_1 dI_2 + I_2 dI_1)}_{d(I_1 I_2)} \Big] = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 +$$

$$+ M I_1 I_2$$

PARA N CIRCUITOS:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(I_i M_{ij} I_j \right) \quad (1)$$

SE $N=2$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} I_i M_{ij} I_j = \frac{1}{2} \Big(\overset{L_1}{M_{11}} I_1^2 + \overset{L_2}{M_{22}} I_2^2 + \overset{M}{M_{12}} I_1 I_2 + \underset{M}{M_{21}} I_1 I_2 \Big)$$

$\Rightarrow$ REOBTENHO A FÓRMULA ANTERIOR

LEMBRANDO QUE $\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_j$, DE (1) ACIMA

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i \underbrace{\int_{S_i} \vec{B}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{S}_i}$$

$$\hookrightarrow \int_{S_i} (\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}_i))\cdot d\vec{S}_i$$

USANDO STOKES:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{C(S_i)} \vec{A}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{\ell}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \oint_{C(S_i)} \vec{A}(\vec{r}_i)\cdot\left[I_i d\vec{\ell}_i\right]$$

DE MANEIRA GERAL: $\sum_{i=1}^{N} (\ \ ) I_i \cdot d\vec{\ell}_i = \int (\ \ ) \vec{J}\, dV$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{J}(\vec{r})\, dV = \frac{1}{2}\int_{T.E.} \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{J}(\vec{r})\, dV \quad (2)$$

COMPARE COM: $W_{el} = \frac{1}{2}\int_{T.E.} \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV$

Expressões gerais

$$W = \frac{1}{2} \int_{T.E.} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r})\, dV \quad (2)$$

DA LEI DE AMPÈRE: $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{T.E.} \bar{A}(\bar{r}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B})\, dV$$

USANDO: $\bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B})$

DO CÁLCULO VETORIAL

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{T.E.} \bar{B} \cdot \underbrace{(\bar{\nabla} \times \bar{A})}_{\bar{B}}\, dV - \int_{T.E.} \bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})\, dV \right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int (\vec{B} \cdot \vec{B})\, dV - \int_{S_\infty} (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot d\vec{S} \right]$$

PARA DISTRIBUIÇÕES LOCALIZADAS DE CORRENTES:

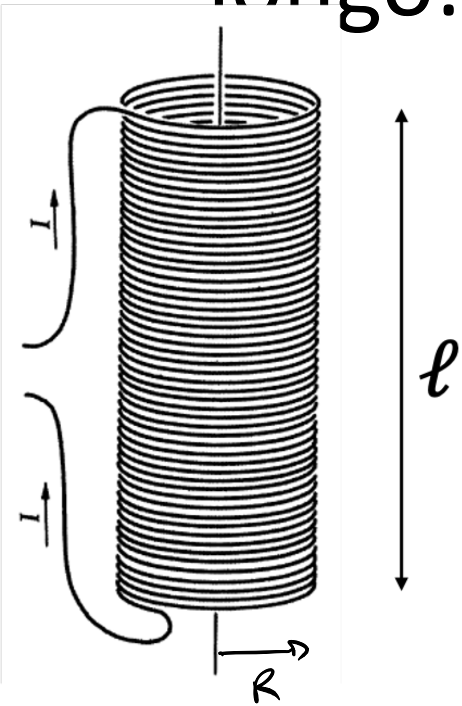
$$\left.\begin{array}{l}\vec{B} \sim \dfrac{1}{r^2} \\[2ex] \vec{A} \sim \dfrac{1}{r}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\vec{A}\times\vec{B} \sim \dfrac{1}{r^3} \\[2ex] d\vec{S} \sim r^2\end{array}\right\} \quad \int_{S_\infty} (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{T.E.} B^2\, dV \qquad (3)$$

COMPARE COM:

$$W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} E^2\, dV$$

Auto-indutância de um solenoide longo: pelo fluxo magnético



PASSO UMA CORRENTE I E CALCULO O FLUXO MAGNÉTICO Φ_B

$$\Phi_B = L\, I$$

$$B = \mu_0 n I$$

FLUXO POR UMA ESPIRA:

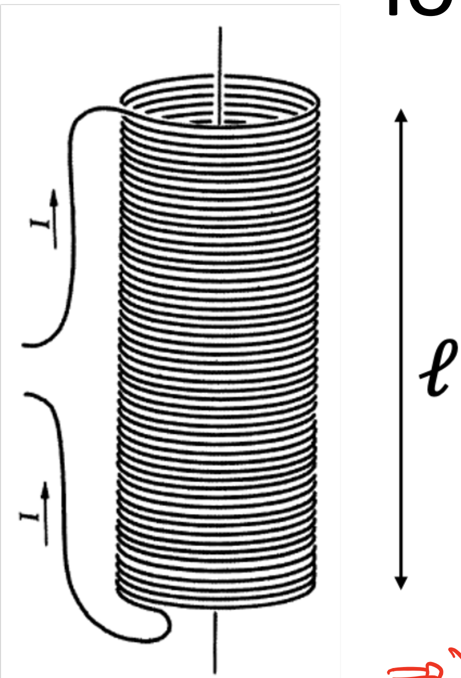
$$\Phi_1 = B(\pi R^2) = \pi \mu_0 n I R^2$$

FLUXO TOTAL:

$$\Phi_B = N \Phi_1 = (n \ell)\Phi_1 = \mu_0 n^2 (\ell \pi R^2)\, I$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 \underbrace{(\ell \pi R^2)}_{\text{VOLUME DO SOLENOIDE}} = \mu_0 n^2 (V) \; ; \; \frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 (\pi R^2)$$

Auto-indutância de um solenoide longo: pela energia



CALCULO A ENERGIA TOTAL ARMAZENADA

E IGUALO A $W = \frac{1}{2} L I^2$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{B^2}{2\mu_0} (\text{VOLUME})$$

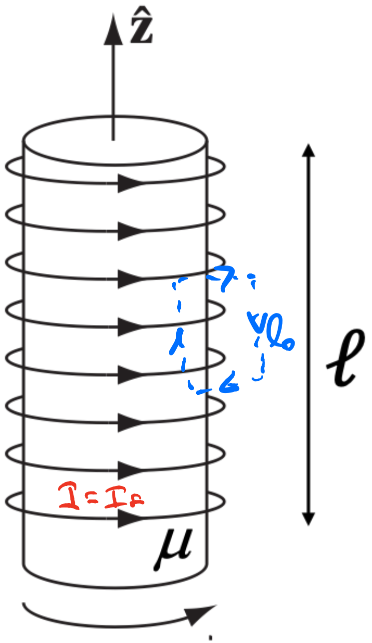
JÁ QUE $\vec{B}$ É CONSTANTE DENTRO DO SOLENOIDE E ZERO FORA DELE.

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 (\text{VOLUME}) = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 (\text{VOLUME})$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 (\text{VOLUME}) = \mu_0 n^2 (\ell \pi R^2) \quad \text{COMO ANTES}$$

$\Rightarrow$ TENTE CALCULAR $W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{K} \, dS$ $\quad K = nI$

Auto-indutância de um solenoide longo com miolo de material magnético



PARA CALCULAR O CAMPO MAGNÉTICO USA-SE A LEI DE AMPÈRE PARA MEIOS MATERIAIS: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_F \Rightarrow \oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_F(S)$

$H = 0$ FORA DO SOLENOIDE ; $\vec{H} = H_z \hat{z}$

$$H_z(\rho)\cancel{\ell_0} = K \ell_0 = n I \cancel{\ell_0}$$

$$H_z(\rho) = nI \Rightarrow B_z = \mu H_z = \mu n I$$

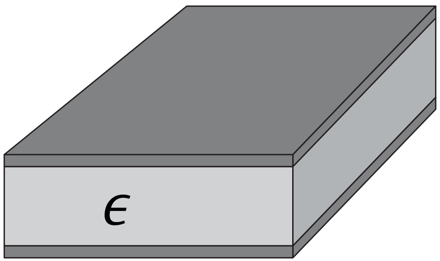
A INDUTÂNCIA PODE SER OBTIDA PELA ENERGIA: $W = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} BH(\text{VOLUME})}_{\Downarrow} = \frac{\mu}{2\mu_0}(nI)^2(\text{VOLUME})$

$\Downarrow$

PODE SER PROVADA

$$\Rightarrow L = \frac{\mu}{\mu_0} n^2 I^2 (\text{VOLUME})$$

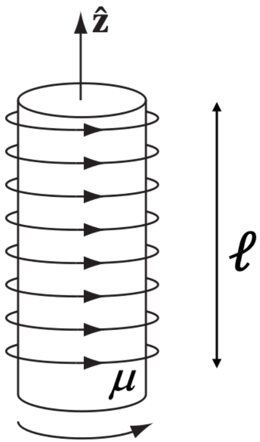
Uso de miolos materiais: caso elétrico x caso magnético



$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_0 > C_0$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C V^2}$$

Aumenta a energia armazenada, para uma dada voltagem. Normalmente, controla-se a voltagem, não a carga ($Q{=}CV$).



$$L = \mu n^2 \pi \ell R^2 = \frac{\mu}{\mu_0} L_0 > L_0 \;\; (\text{se } \mu > \mu_0)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2}$$

Aumenta a energia armazenada, para uma dada corrente. Normalmente, controla-se a corrente, não o fluxo ($\Phi{=}LI$).