# Aula 4

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

29/09/2020

# Capítulo 2

# Eletrostática

# Introdução geral

# Forças fundamentais

1. Força gravitacional.

. FORÇA ENTRE CORPOS COM MASSA

. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL (1686)

. NO LIMITE EM QUE AS MASSAS SÃO GRANDES ELA FOI EXPANDIDA PELA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN (1915)

. SÓ UMA "CARGA" : SÓ ATRATIVA, PORTANTO, CUMULATIVA

. FRACA : É A FORÇA MAIS FRACA ENTRE PARTÍCULAS ELEMENTARES

. NÃO EXISTE UMA DESCRIÇÃO QUÂNTICA

# Forças fundamentais

EQS. DE MAXWELL

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

2. Forças elétricas e magnéticas.

- FORÇAS ENTRE CARGAS E CORRENTES ELÉTRICAS
- MAXWELL (1888): FORMA FINAL UNIFICANDO FENÔMENOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS
- HÁ CARGAS POSITIVAS E NEGATIVAS: ATRAÇÃO OU REPULSÃO
- APROXIMADAMENTE $10^{42}$ VEZES MAIS FORTE QUE A GRAVITACIONAL (P. EX. ENTRE ELÉTRONS)
- ESCLARECEU A NATUREZA DA LUZ: OSCILAÇÃO DE CAMPOS $\vec{E}$ E $\vec{B}$
- VERSÃO QUANTIZADA: ELETRODINÂMICA QUÂNTICA (~1950)

# Forças fundamentais

3. Força nuclear forte.

. FORÇA ENTRE OS NUCLEONS (PRÓTONS E NEUTRON)

(FUNDAMENTALMENTE SÃO FORÇAS ENTRE QUARKS E GLUONS)

. DA ORDEM DE $10^3$ VEZES MAIS FORTE QUE A FORÇA ELÉTRICAS (POR EXEMPLO, ENTRE QUARKS)

. CURTO ALCANCE ($\sim 10^{-15}$ m), ENQUANTO A FORÇA ELÉTRICA NÃO TEM ALCANCE ($\sim \frac{1}{r^2}$)

. TEORIA QUÂNTICA É A CROMODINÂMICA QUÂNTICA (~1970)

. 3 TIPOS DE CARGA: R, G, B

# Forças fundamentais

4. Força nuclear fraca.

. RESPONSÁVEL PELO DECAIMENTO BETA:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$$

. CERCA DE $10^4$ VEZES MAIS FRACA QUE A FORÇA ELÉTRICA

. CURTO ALCANCE ($\sim 10^{-18}$ m)

. VERSÃO QUANTIZADA E UNIFICADA AO ELETROMAGNETISMO: TEORIA ELETRO-FRACA (1961-1968)

. OUTRO TIPOS DE CARGA

# Características gerais do eletromagnetismo

1. O conceito de campo é inevitável: campos adquirem "vida própria".
2. O eletromagnetismo é uma "Teoria Clássica de Campos", como a hidrodinâmica.
3. As fontes de campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são cargas e correntes.
4. Os campos, por sua vez, atuam nas cargas e correntes.
5. Em escalas pequenas de comprimento, a teoria precisa ser "quantizada": Eletrodinâmica Quântica.

# Como **E** e **B** atuam em cargas

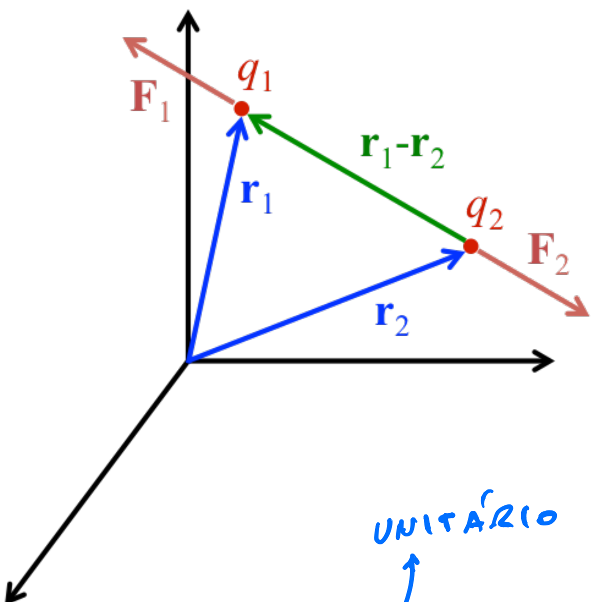
- FORÇA DE LORENTZ:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- AS EQS. DE MAXWELL ME DIZEM COMO CARGAS E CORRENTES GERAM $\vec{E}$ E $\vec{B}$.

# Eletrostática

# Lei de Coulomb




. FORÇA ELÉTRICA ENTRE CARGAS $q_1$ E $q_2$:

. PROPORCIONAL AO PRODUTO DAS CAGAS $q_1 q_2$

. INVERSAMENTE PROPORCIONAL AO QUADRADO DA DISTÂNCIA ENTRE ELAS

. ATUA NA LINHA QUE UNE AS CARGAS

. OBEDECE A 3ª LEI DE NEWTON

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 \propto \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\overbrace{\left[\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right]}^{\text{UNITÁRIO}}$$

NO SI:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_2$$

$$\epsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\ ; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}$$

# Quantização da carga elétrica

AS PARTÍCULAS, DE MANEIRA GERAL, TÊM CARGA:

$$Q = \pm n e \qquad e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$$

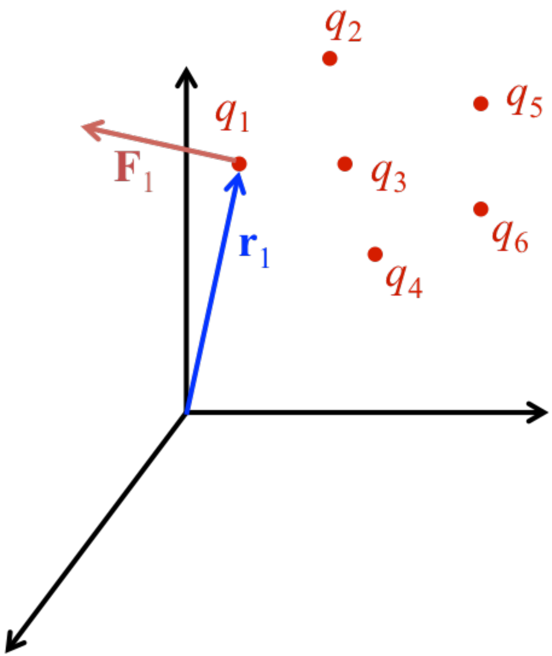
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

QUARKS TÊM CARGA:

$$\pm \frac{e}{3}, \pm \frac{2e}{3}$$

MAS OS QUARKS FICAM CONFINADOS EM HÁDRONS CUJA CARGA É $\pm n e$

# Princípio de superposição

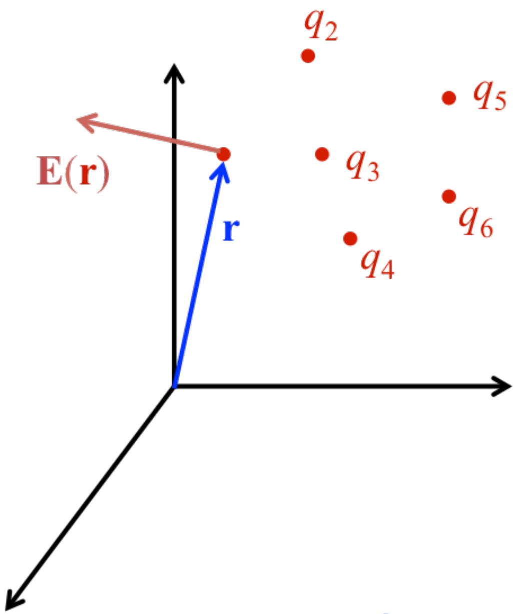



. VEM DA LINEARIDADE DAS EQS. DE MAXWELL

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{N} q_i \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3}$$

TODA A ELETROSTÁTICA DECORRE DESSES DOIS FATOS: LEI DE COULOMB + PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO

# Campo elétrico




O CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}(\vec{r})$ EM $\vec{r}$ É A FORÇA SOBRE UMA CARGA DE PROVA $q$ DEVIDO A TODAS AS OUTRAS CARGAS (SUPOSTAS ESTÁTICAS) DIVIDIDA POR $q$:

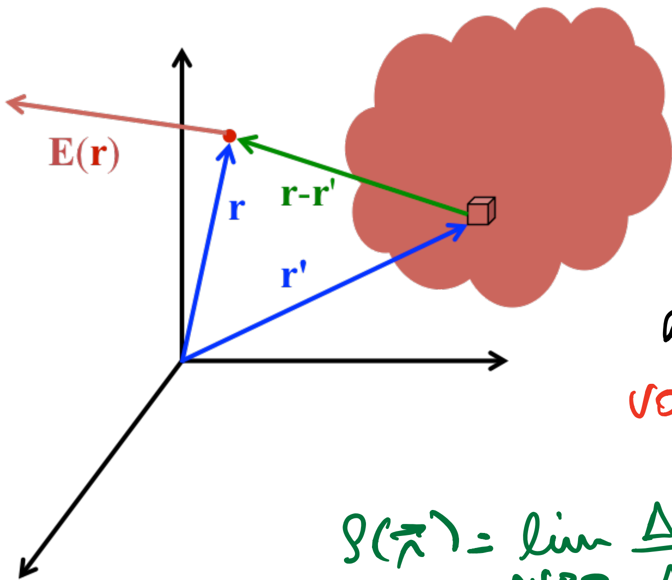
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(q)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{N} q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

O CAMPO $\vec{E}(\vec{r})$ SÓ DEPENDE DOS VALORES E DAS POSIÇÕES (OU SEJA, DA CONFIGURAÇÃO) DA CARGAS QUE O CRIAM.

UMA CARGA $q$ EM $\vec{r}$ SOFRE UMA FORÇA:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

# Distribuições contínuas de carga




SEM RESOLUÇÃO ATÔMICA DISTRIBUIÇÕES DE CARGA PARECEM SER CONTÍNUAS NO ESPAÇO. POR ISSO, DEFINIMOS A DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CARGA $\rho(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q(V)}{\Delta V}$$

NOTE QUE $\Delta V$ É ... PEQUENO NA ESCALA DA RESOLUÇÃO COM QUE SE TRABALHA, MAS GRANDE NA ESCALA ATÔMICA

$$[\rho(\vec{r})] = \frac{Q}{L^3}$$

$$\Rightarrow \quad dq = \rho(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$q_i \rightarrow dq = \rho(\vec{r}\,')\,dV'$$

$$\sum_{i=1}^{N} \rightarrow \int_V$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}\,'$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV' \rightarrow$$ 3 INTEGRAIS $E_x$, $E_y$, $E_z$

$\vec{r}$: PONTO DE OBSERVAÇÃO: FIXO NO ESPAÇO

$\vec{r}\,'$: PONTO DE INTEGRAÇÃO: VARIA QUANDO EU CALCULO A INTEGRAL

$$E_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(x',y',z')\frac{(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dy'dz'$$

$\vdots$

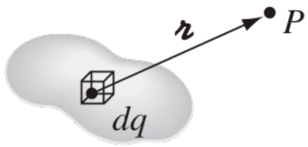
# Distribuições contínuas de cargas em várias dimensões

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q(S)}{\Delta S} \Rightarrow dq = \sigma\, dS$$

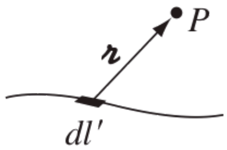
$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q(dl)}{\Delta l} \Rightarrow dq = \lambda\, dl$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dS'$$

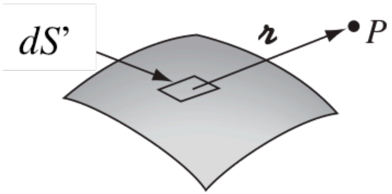
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dl'$$



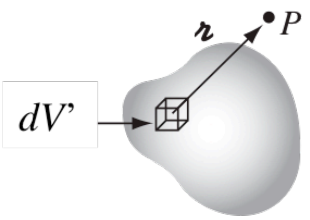

(a) Continuous distribution




(b) Line charge, λ

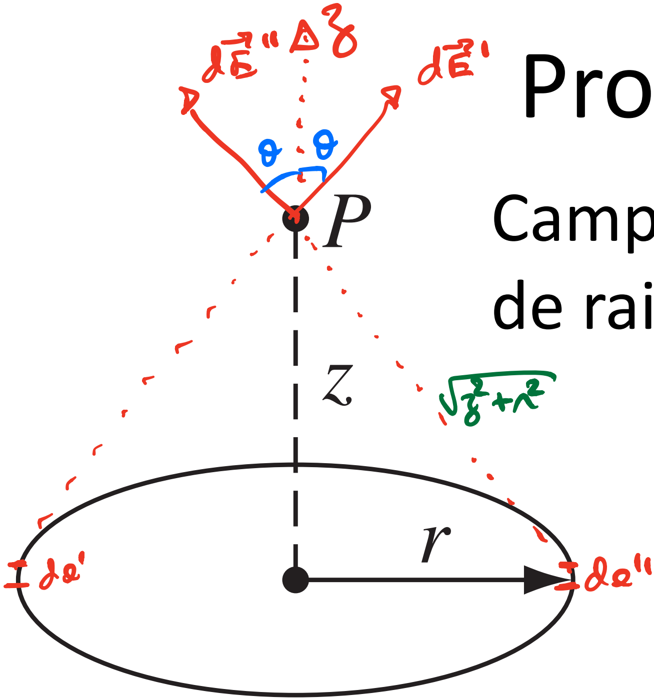



(c) Surface charge, σ




(d) Volume charge, ρ

# Problema 2.5




Campo elétrico em $P$ devido ao aro de raio $r$ com densidade UNIFORME linear $\lambda$.

$|d\vec{E}'| = |d\vec{E}''|$

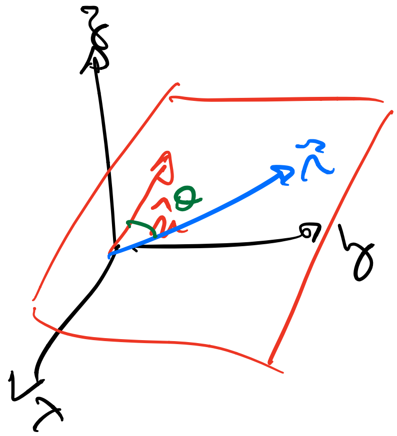
AS COMPONENTES DE $d\vec{E}'$ E $d\vec{E}''$ NO PLANO POR P PARALELO AO ARO SE CANCELAM. SÓ RESTA A COMPONENTE $E_z$ DO CAMPO $\vec{E}$

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \lambda \frac{(z-z')}{(\sqrt{z^2+r^2})^3}\, dl'$$

MAS $z' = 0$

$$E_z(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\underbrace{\int dl'}_{2\pi r} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{z r}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z\,r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,\hat{z}}$$




$\vec{r} \in$ PLANO

$\hat{n}$ É $\perp$ AO PLANO

$\hat{n} \cdot \vec{r} = r \cos\theta =$ PROJEÇÃO DA POSIÇÃO NO PLANO EM $\hat{n}$

$$\Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{r} = \text{CONSTANTE} = c \quad \text{(EQ. DO PLANO)}$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = c$$

$(a,0,0)$, $(0,2a,0)$, $(0,0,a) \in$ PLANO

$$n_1 a = c \qquad 2n_2 a = c \qquad n_3 a = c$$

$$n_1 = \frac{c}{a} \qquad n_2 = \frac{c}{2a} \qquad n_3 = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{c}}{a} x + \frac{\cancel{c}}{2a} y + \frac{\cancel{c}}{a} z = \cancel{c}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{a} = 1 \Rightarrow \boxed{x + \frac{y}{2} + z = a}$$

$$\hat{n} = c\left(\frac{\hat{x}}{a} + \frac{\hat{y}}{2a} + \frac{\hat{z}}{a}\right) = \frac{c}{a}\left(\hat{x} + \frac{\hat{y}}{2} + \hat{z}\right)$$

$$d\vec{S} = dS\,\underbrace{\left(\hat{x}+\frac{\hat{y}}{2}+\hat{z}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}_{\hat{n}}$$

$$dS = dx\,dy$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{S} = \underbrace{\hat{x}\cdot d\vec{S}} = \frac{2}{3}dS$$

$$\vec{v} = y\,\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y}\hat{x} = \hat{x}$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{S} = \frac{2}{3}\ \text{ÁREA}$$

$\hat{x}\cdot d\vec{S}$ É A ÁREA DA PROJEÇÃO DO TRIÂNGULO NO PLANO $yz$