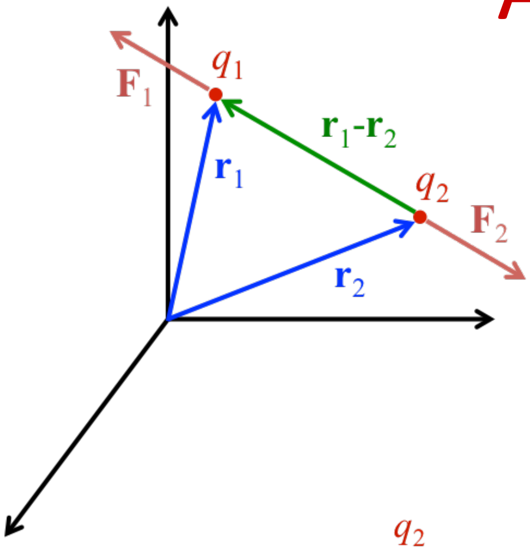
Aula 5

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

01/10/2020

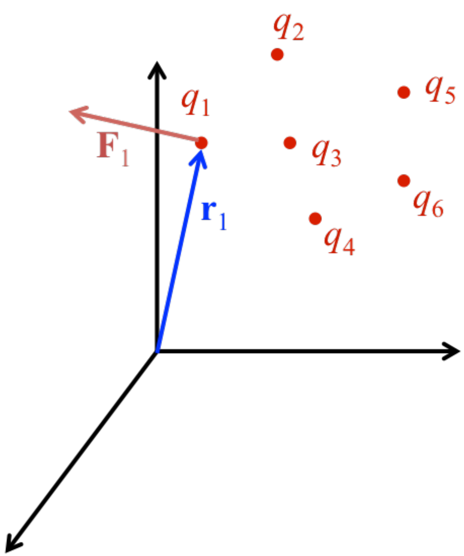
Aula passada



Lei de Coulomb

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_2$$

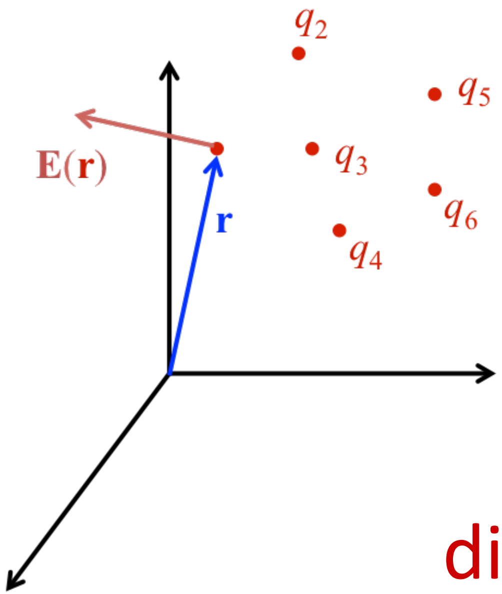
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$



Princípio de superposição

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \left(q_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^3} \right)$$

Aula passada



Campo elétrico de uma distribuição discreta de cargas

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mathbf{F}_1}{q_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{N}\left(q_i\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3}\right)$$

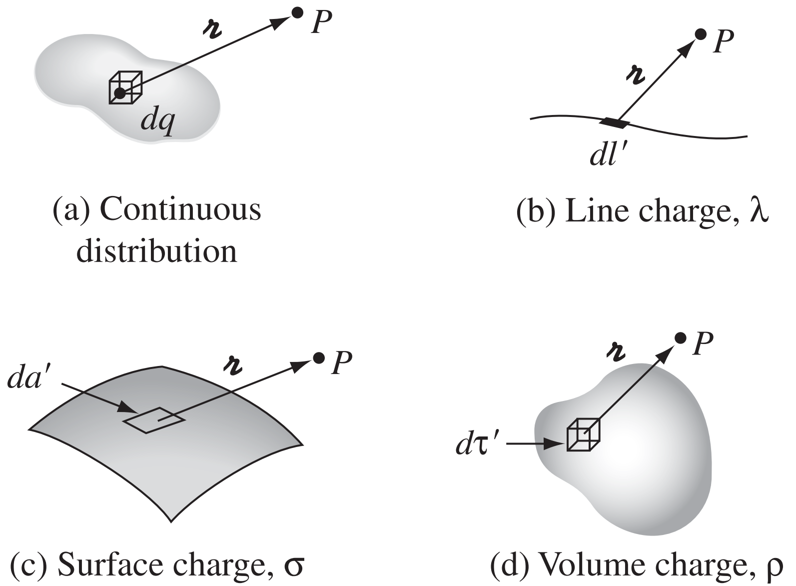
Aula passada

Distribuições contínuas de cargas

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \Rightarrow dQ = \rho(\mathbf{r})\, dV$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \Rightarrow dQ = \sigma(\mathbf{r})\, dS$$

$$\lambda(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \Rightarrow dQ = \lambda(\mathbf{r})\, dl$$



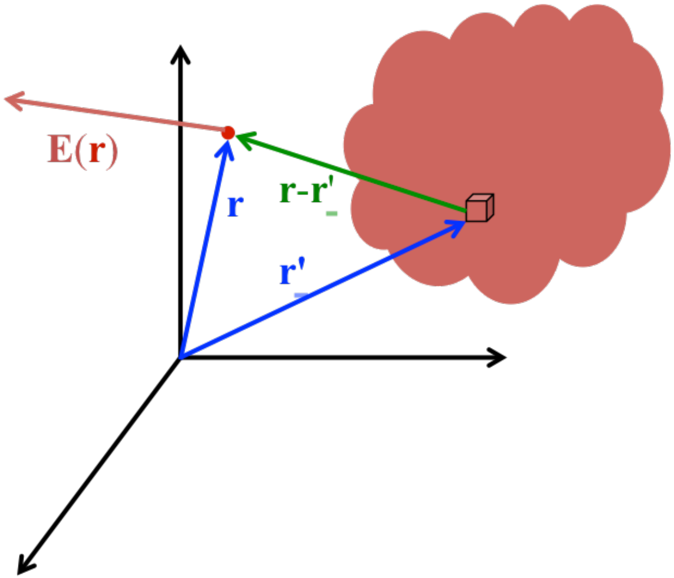
Aula passada

Distribuições contínuas de cargas

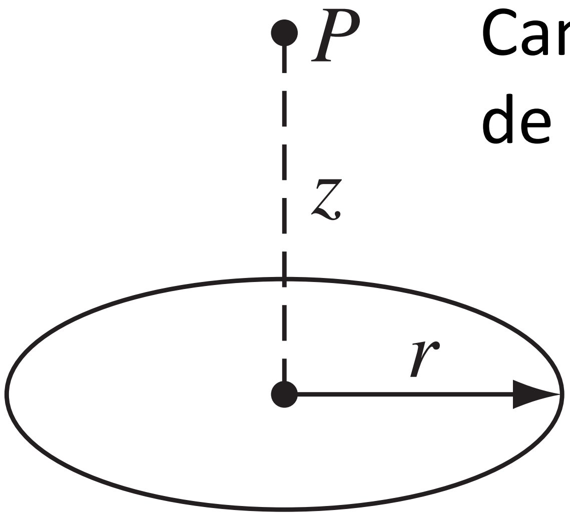
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \sigma(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dS'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dl'$$



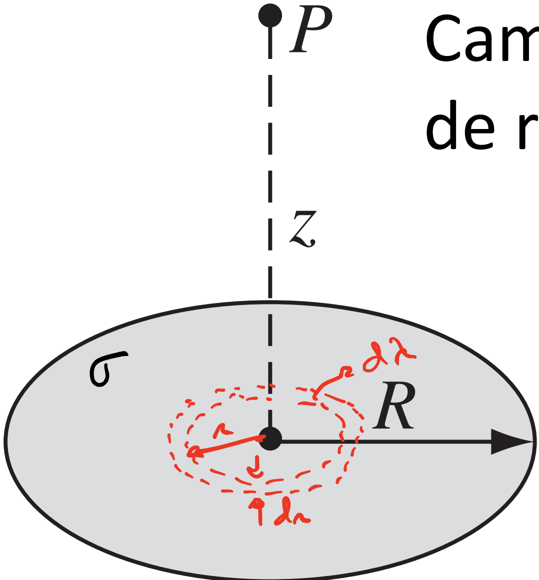
Problema 2.5



Campo elétrico em P devido ao aro de raio r com densidade linear λ.

$$\mathbf{E}\left(z\right) = \frac{\lambda}{2\epsilon_o}\frac{zr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}$$

Problema 2.6



Campo elétrico em P devido ao disco de raio R com densidade superficial σ.

$d\lambda = ?$ $\qquad d\lambda = \frac{dQ}{2\pi r}$

$dQ = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi r\, dr$

$$\left.\begin{array}{l} d\lambda = \frac{dQ}{2\pi r} \\ dQ = \sigma\, 2\pi r\, dr \end{array}\right\} d\lambda = \frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{2\pi r}$$

$d\lambda = \sigma\, dr$

$$dE_z(z) = \frac{d\lambda}{2\epsilon_0}\,\frac{z\, r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\frac{z\, r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E_z(z) = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\frac{z\, r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}(-1)\left.\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right|_{r=0}^{r=R}$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

LIMITE EM QUE $|z| >> R$:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{|z|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \cong \frac{1}{|z|}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right)$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\cancel{sgn(z)} - sgn(z)\left(\cancel{1} - \frac{R^2}{2z^2}\right)\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sgn(z) \frac{R^2}{2z^2}$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \Rightarrow E_z(z) = sgn(z) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2}$$

QUE É O CAMPO DE UMA CARGA PONTUAL <u>Q</u>!

LIMITE EM QUE $|z| << R$: $\sqrt{z^2+R^2} \cong R$

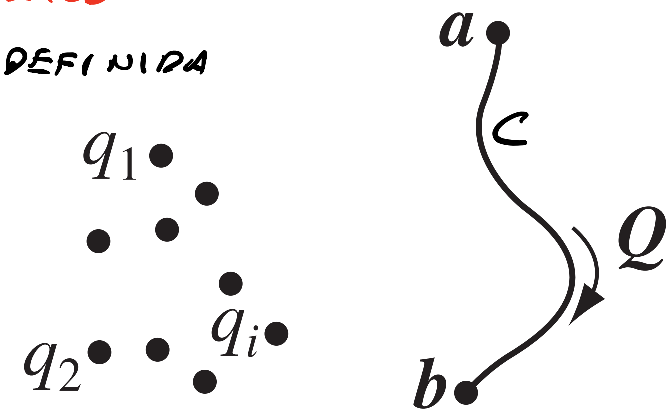
$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[sgn(z) - \frac{z}{R}\right] \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sgn(z)$$

QUE É O CAMPO DE UM PLANO INFINITO

DE DENSIDADE DE CARGA σ.

Diferenças de potencial elétrico

DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO
ENTRE OS PONTOS <u>a</u> E <u>b</u> É DEFINIDA
COMO O TRABALHO REALIZADO
<u>CONTRA</u> O CAMPO ELÉTRICO
DAS OUTRAS CARGAS ($q_1 \cdots q_N$)
PARA LEVAR UMA CARGA <u>Q</u>
DE <u>a</u> A <u>b</u> PELO CAMINHO <u>C</u>
DIVIDIDO PELA CARGA <u>Q</u>

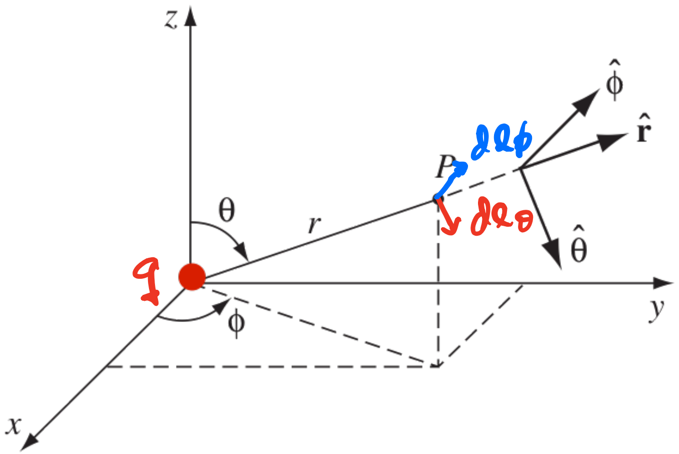


$$\left.W_{ab} = \int_{a,\,C}^{b} \vec{F}_c \cdot d\vec{\ell} = -Q\int_{a,\,C}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\ \right\} \Rightarrow \Delta V = \frac{W_{ab}}{Q} = -\int_{a,\,C}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{F}_c = -Q\vec{E}$$

EM GERAL, ΔV DEPENDERIA DO CAMINHO <u>C</u>
VAMOS MOSTRAR QUE NÃO É O CASO.

O potencial elétrico não depende do caminho



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \in [0, \pi]$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi]$$

VAMOS PRIMEIRO CALCULAR PARA UMA CARGA q NA ORIGEM

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{\ell} = d\ell_r\,\hat{r} + d\ell_\theta\,\hat{\theta} + d\ell_\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\ell_r = dr \qquad d\ell_\theta = r\,d\theta \qquad d\ell_\phi = r\sin\theta\,d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left(d\ell_r\,\hat{r} + d\ell_\theta\,\hat{\theta} + d\ell_\phi\,\hat{\phi}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\ell_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta V = -\int_{a,C}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{a,C}^{b}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right]$$

QUE INDEPENDE DO CAMINHO!

USANDO O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO, PARA UMA CONFIGURAÇÃO QUALQUER DE CARGAS:

$$\Delta V = -\int_{a,C}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{a,C}^{b}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\dots\vec{E}_N\right)\cdot d\vec{\ell}$$

CONTRIBUIÇÕES DE CADA CARGA

$$= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots \Delta V_N$$

SENDO QUE CADA ΔV_i $(i=1,\dots,N)$ INDEPENDE DO CAMINHO, COMO PROVADO. LOGO, ΔV TAMBÉM INDEPENDE DO CAMINHO.

O potencial elétrico

DADO UM PONTO DE REFERÊNCIA $\vec{r}_0$ PODE-SE DEFINIR UM CAMPO ESCALAR POTENCIAL ELÉTRICO:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

ASSOCIADO A UMA DADA CONFIGURAÇÃO DE CARGAS

A DIFERENÇA DE POTENCIAL ENTRE DOIS PONTOS a E b É:

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = +\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_a} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\boxed{\Delta V = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)}$$

PARA UMA CARGA NA ORIGEM:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]$$

SE TOMARMOS O PONTO DE REFERÊNCIA $\vec{r}_0$ NO INFINITO (OU SEJA, $r_0 \to \infty$):

$$\Longrightarrow \boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}}$$

SE A CARGA q_1 ESTIVER EM $\vec{r}_1$: $V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$

PARA N CARGAS:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

PARA UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGAS

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\sigma(\vec{r}\,')\,ds'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \ldots$$

COMO $V(\vec{r})$ É UM ESCALAR É MENOS TRABALHOSO CALCULÁ-LO QUE O CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}(\vec{r})$ QUE É UM CAMPO VETORIAL.

MAS, COMO ACHAR $\vec{E}(\vec{r})$ UMA VEZ QUE EU TENHA $V(\vec{r})$?

A relação entre o potencial e o campo elétricos

SEJAM DOIS PONTOS $\vec{r}_A$ E $\vec{r}_B$ INFINITESIMALMENTE SEPARADOS: $d\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta V = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A + d\vec{r}) - V(\vec{r}_A)$$

EXPANDINDO EM TAYLOR:

$$V(\vec{r}_A + d\vec{r}) = V(\vec{r}_A) + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\vec{r}_A} \cdot dx + \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\vec{r}_A} dy + \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{\vec{r}_A} dz$$

$$= V(\vec{r}_A) + \left.\vec{\nabla} V\right|_{\vec{r}_A} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \left.\vec{\nabla} V\right|_{\vec{r}_A} \cdot d\vec{r}}$$

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A+d\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\vec{E}(\vec{r}_A)\cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A+d\vec{r}} d\vec{\ell} = -\vec{E}(\vec{r}_A)\cdot d\vec{r}$$

JUNTANDO:

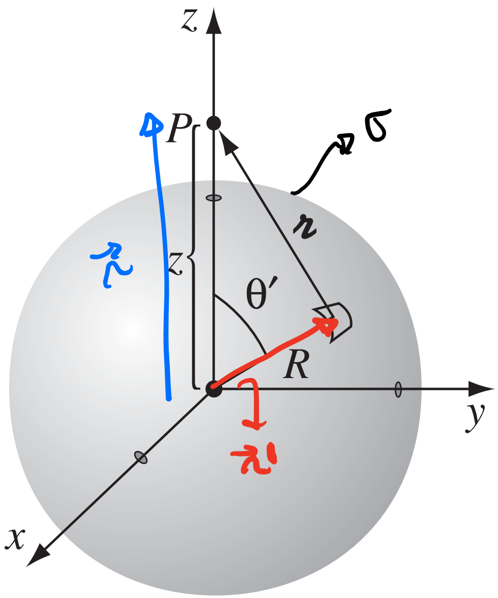
$$-\vec{E}(\vec{r}_A)\cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} V\Big|_{\vec{r}_A}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}_A) = -\vec{\nabla} V\Big|_{\vec{r}_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V}$$

Exemplo 2.7

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = A^2+B^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}$$



Potencial elétrico dentro e fora de uma casca esférica de raio R uniformemente carregada.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,ds'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \sigma(\vec{r}\,') = \sigma$$

$\vec{r} = z\hat{z}$ $\qquad \vec{r}\,' \in$ CASCA ESFÉRICA

$$\vec{r}\,' = R\,\hat{r}'$$

$$ds' = R^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} = \sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma\;R^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}} =$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^{\cancel{2}}}{2\epsilon_0} \left. \frac{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\theta'}}{z\cancel{R}} \right|_{\theta'=0}^{\theta'=\pi}$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\sqrt{\underbrace{R^2+z^2+2zR}_{(z+R)^2}} - \sqrt{\underbrace{R^2+z^2-2zR}_{(z-R)^2}}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[|z+R| - |z-R|\right]$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}}$$

PARA $z \geq 0$:

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[z+R-|z-R|\right]$$

PARA $z < R$ (DENTRO DA ESFERA):

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[z+\cancel{R}-(\cancel{R}-z)\right] = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = \text{CONST.}$$

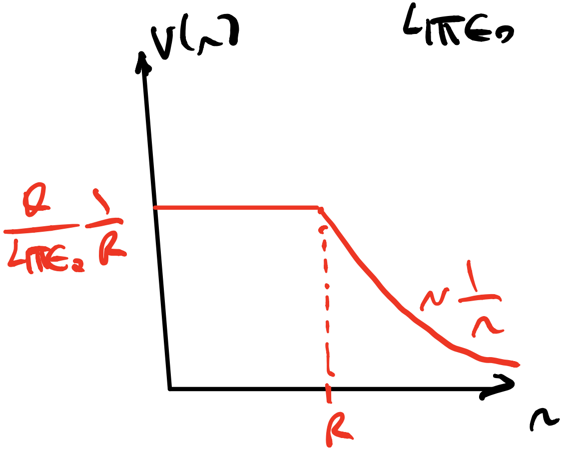
PARA $z > R$ (FORA DA ESFERA):

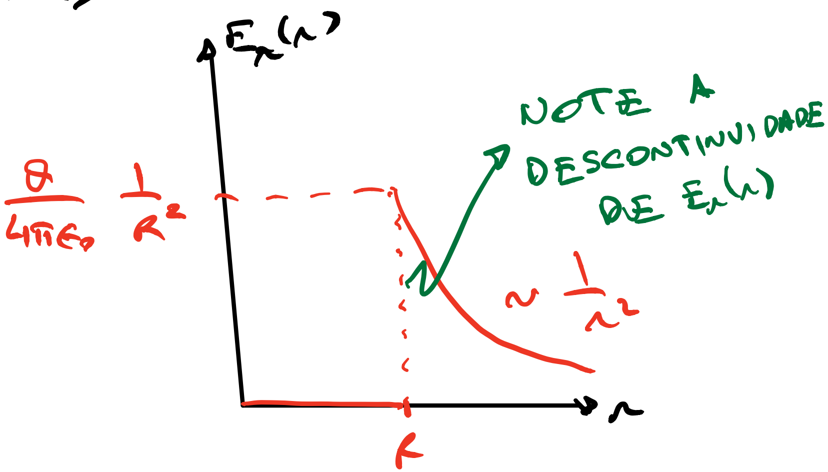
$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left[\cancel{z} + R - (\cancel{z} - R)\right] = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z}$$

OU SEJA, O POTENCIAL É O MESMO, COMO SE TODA A CARGA ESTIVESSE CONCENTRADA NA ORIGEM.

PARA UM PONTO QUALQUER:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R} & \text{SE } r \leq R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} & \text{SE } r \geq R \end{cases}$$





$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = E_r(r)\,\hat{r}$$

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{SE } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & \text{SE } r > R \end{cases}$$

NOTE QUE QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE CARGA COM SIMETRIA ESFÉRICA $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ PARA $r < R$ GERA UM POTENCIAL E UM CAMPO ELÉTRICOS PARA $r > R$ COMO SE TODA A CARGA ESTIVESSE CONCENTRADA NA ORIGEM.