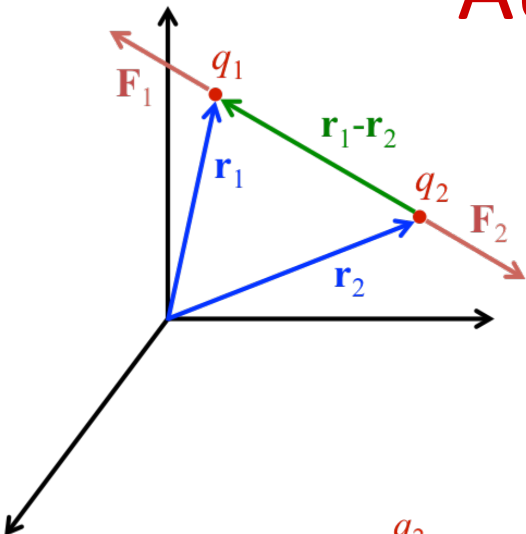
Aula 6

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

06/10/2020

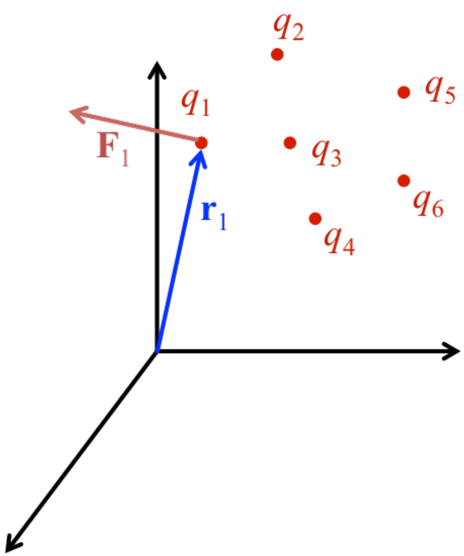
Aulas passadas



Lei de Coulomb

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_2$$

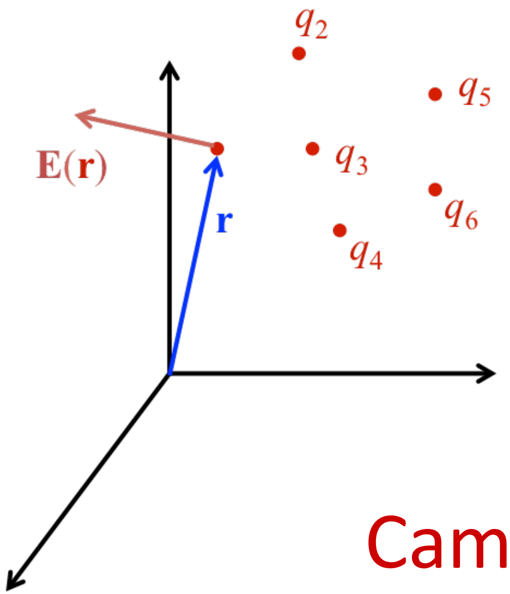
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$



Princípio de superposição

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \left(q_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^3} \right)$$

Aulas passadas



Campo elétrico de uma distribuição discreta de cargas

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\mathbf{F}_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{N}\left(q_i\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3}\right)$$

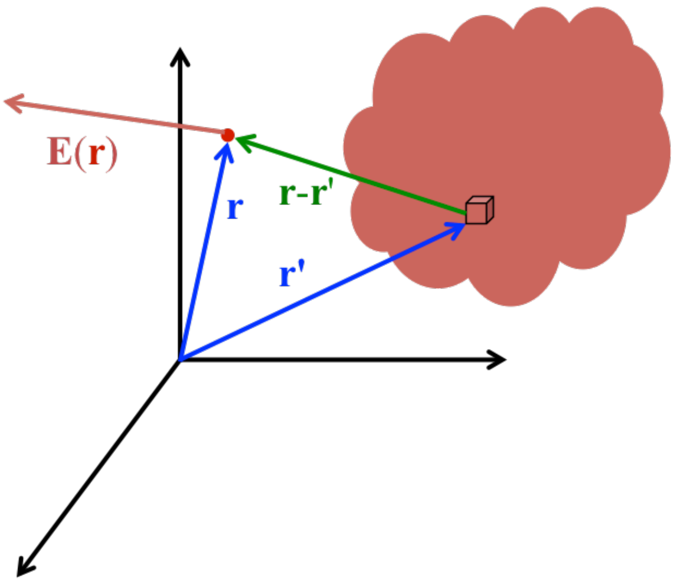
Aulas passadas

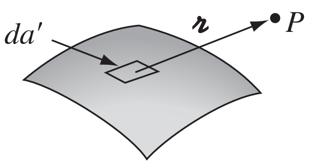
Distribuições contínuas de cargas

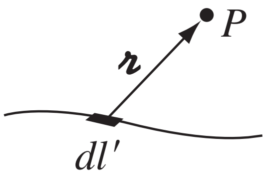
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \sigma(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dS'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dl'$$





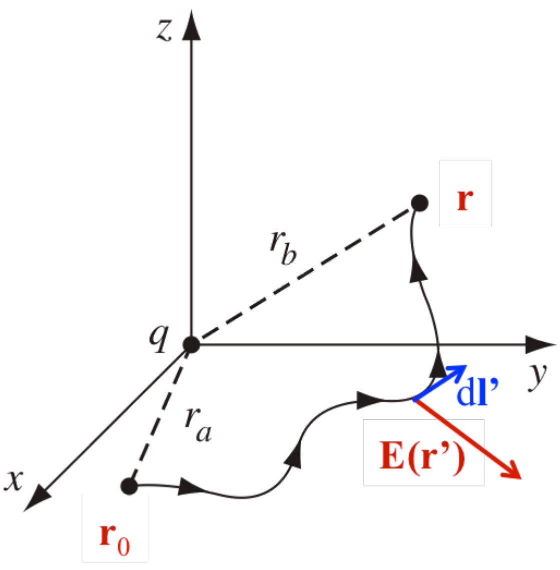


Aulas passadas

Potencial elétrico

$$V(\mathbf{r}) = \frac{W_{contra}(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r})}{q}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}'$$



Independente do caminho

Aulas passadas

Potencial elétrico de uma carga pontual

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

CARGA EM $\vec{r}\,'$

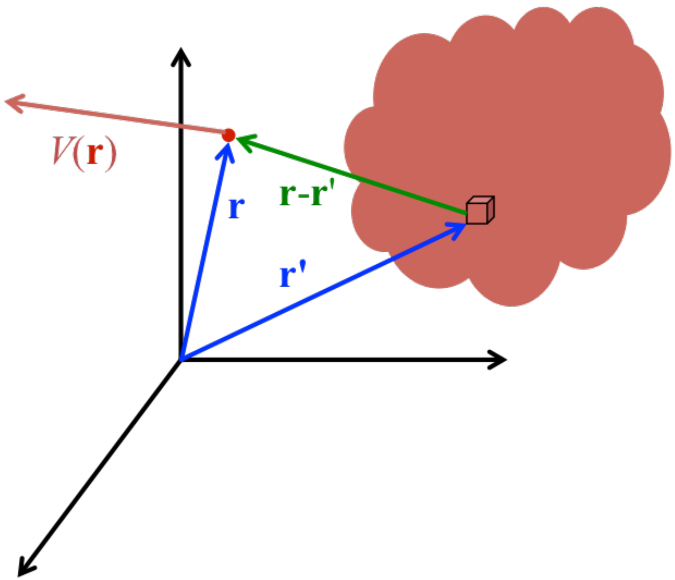
$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Potencial elétrico de distribuições contínuas de carga

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dS'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dl'$$



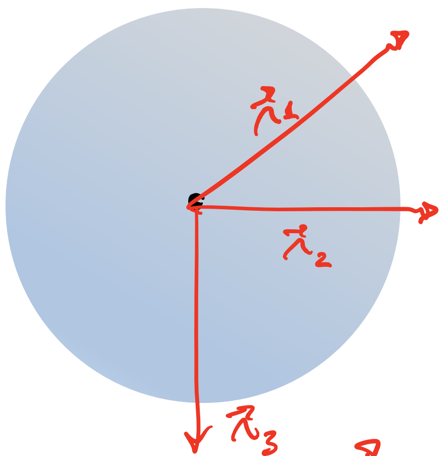
Aulas passadas

Relações entre o potencial e o campo elétricos

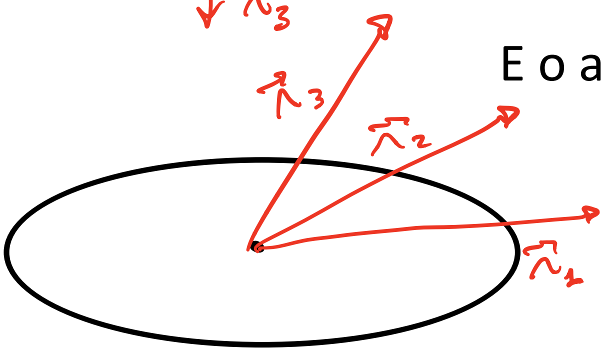
$$V\left(\mathbf{r}\right) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\left(\mathbf{r}'\right) \cdot d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right) = -\nabla V\left(\mathbf{r}\right)$$

Pergunta da aula passada



Campo/potencial de uma casca esférica for a dela é o mesmo que seria obtido se toda sua carga fosse concentrada no centro da casca.

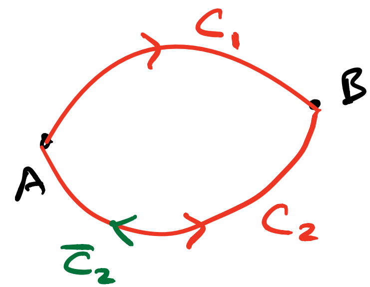


E o aro/disco?

Outra prova de que a diferença de potencial elétrico independe do caminho

$$\Delta V_1(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_A,\ C_1}^{\vec{r}_B} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\Delta V_2(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_A,\ C_2}^{\vec{r}_B} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$



CONSIDERE INVERTER O SENTIDO DE C_2: $C_2 \to \bar{C}_2$

$$\Delta V_1(\vec{r}) - \Delta V(\vec{r}_2) = -\int_{C_1} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_{C_1} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} - \int_{\bar{C}_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{C_1 \cup \bar{C}_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\oint_{\underbrace{C_1 \cup \bar{C}_2}_{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

USANDO STOKES:

$$\Delta V_1(\vec{r}) - \Delta V_2(\vec{r}) = - \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

SE $\vec{E}$ É DEVIDO A UMA CARGA q NA ORIGEM:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \Rightarrow E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V_1(\vec{r}) = \Delta V_2(\vec{r})}$$

OU SEJA, O POTENCIAL INDEPENDE DO CAMINHO USADO

USANDO O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO, A INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO FICA PROVADA PARA QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

DESSA DEDUÇÃO, APRENDE-SE QUE A CONDIÇÃO PARA A EXISTÊNCIA DE UM CAMPO POTENCIAL $V(\vec{r})$ É $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Longrightarrow \exists\, V(\vec{r}) \text{ TAL QUE } \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V$$

O CONTRÁRIO É ÓBVIO:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

O campo e o potencial elétricos

Relações entre o potencial e o campo elétricos

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

O rotacional do campo elétrico

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\forall C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Fluxo elétrico: carga fora da região

$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$: FLUXO ELÉTRICO

SUPONHAMOS, PRIMEIRAMENTE, QUE SÓ HAJA CARGAS FORA DE S, E QUE O CAMPO SEJA CRIADO POR APENAS UMA CARGA PONTUAL q.

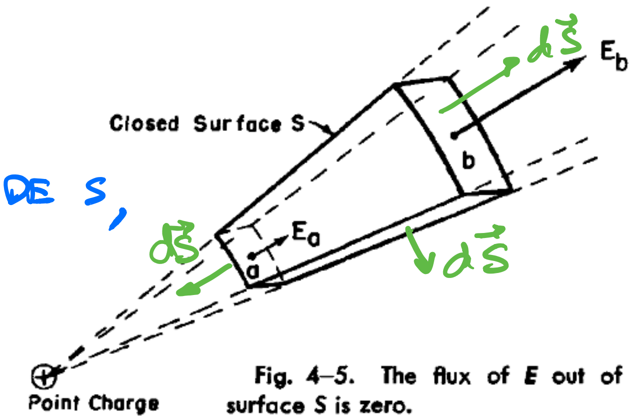


Fig. 4–5. The flux of E out of the surface S is zero.

SEJA A REGIÃO INFINITESIMAL DA FIGURA, ONDE AS FACES a E b SÃO PEDAÇOS DE ESFERAS CENTRADAS NA CARGA. AS CONTRIBUIÇÕES DAS FACES LATERAIS SÃO NULAS, PORQUE $\vec{E} \perp d\vec{S}$. ASSIM:

$$\Phi_E = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a \vec{E} \cdot (-dS\,\hat{n}) + \int_b \vec{E}\,(dS\,\hat{n})$$

$$-\int_a \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\, ds = (*)$$

$$ds = r_a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$(*) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\cancel{r_a^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\cancel{r_a^2}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_b \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\cancel{r_b^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\cancel{r_b^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_E = 0}$$

Fluxo elétrico: carga fora da região

SUPONHA AGORA QUE AS FACES $\underline{a}$ E $\underline{b}$ $\underline{\text{NÃO}}$ SÃO PERPENDICULARES AO CAMPO.

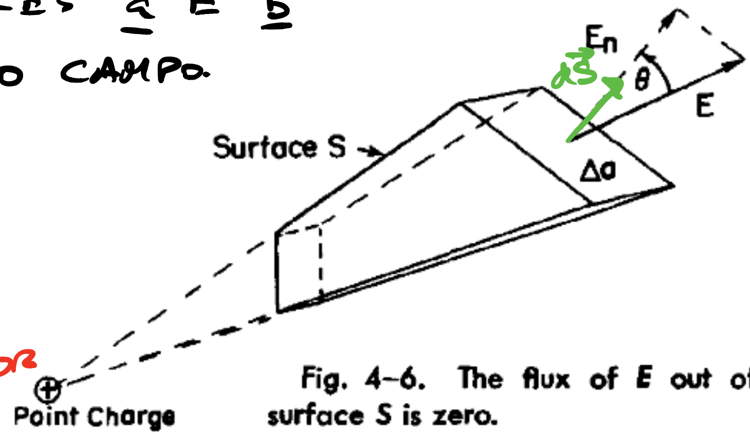


Fig. 4–6. The flux of E out of the surface S is zero.

EM $\underline{a}$: $\vec{E}\cdot\vec{dS} = E\, dS' \cos\theta$

MAS: $dS' = \dfrac{dS}{\cos\theta}$

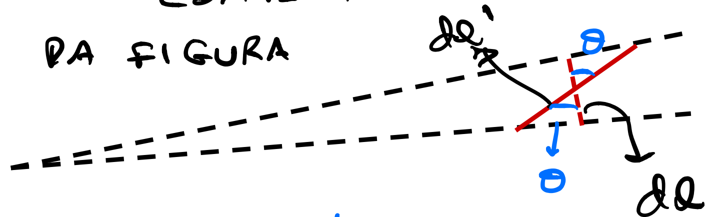
ONDE dS É A ÁREA ANTERIOR PERPENDICULAR A $\vec{E}$

$$\left.\begin{aligned} dS &= d\ell\, d\ell_\perp \\ dS' &= d\ell'\, d\ell_\perp \end{aligned}\right\}$$

$d\ell_\perp$ NÃO MUDA

$\Rightarrow dS' = \dfrac{dS}{\cos\theta}$

CORTE TRANSVERSAL DA FIGURA



$d\ell' \cos\theta = d\ell$

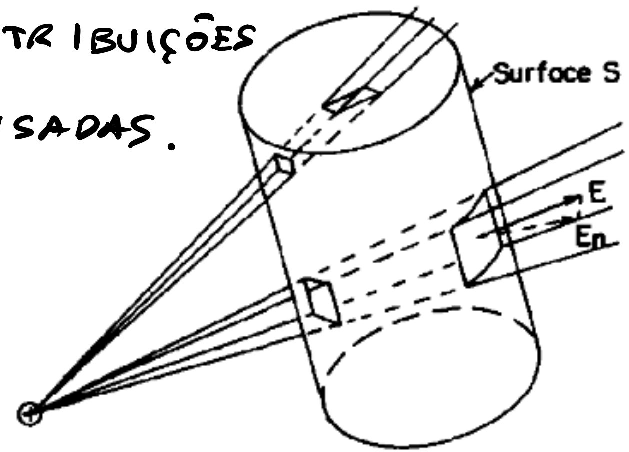
$d\ell' = \dfrac{d\ell}{\cos\theta}$

$dS' \cos\theta = dS \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dS}$ É 0

MESMO NOS DOIS CASOS $\Rightarrow \boxed{\Phi_E = 0}$

Fluxo elétrico: carga fora da região

PARA UMA REGIÃO FINITA, PODEMOS QUEBRAR O FLUXO Φ_E EM CONTRIBUIÇÕES INFINITESIMAIS COMO AS JÁ ANALISADAS.

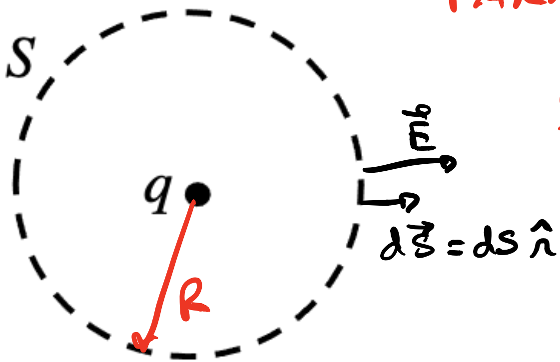


$\Rightarrow \boxed{\Phi_E = 0}$

DESDE QUE A CARGA ESTEJA FORA DA REGIÃO.

USANDO O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO, O RESULTADO VALE PARA QUALQUER CONFIGURAÇÃO DE CARGAS FORA DA REGIÃO.

Fluxo elétrico: carga dentro da região



PARA UMA ESFERA DE RAIO R

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{R^2}\cdot(dS\,\hat{r})$$

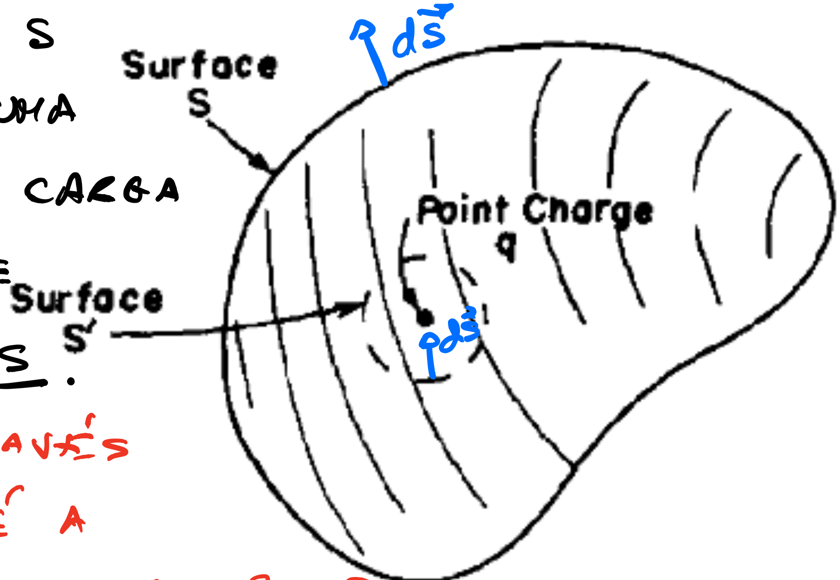
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \cancel{\frac{1}{R^2}}\,\cancel{R^2}\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\,\sin\theta = 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta}_{2} = 4\pi$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\times 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Fluxo elétrico: carga dentro da região

PARA UMA SUPERFÍCIE S QUALQUER. CONSIDERE UMA ESFERA S', CENTRADA NA CARGA E PEQUENA O SUFICIENTE PARA ESTAR CONTIDA EM $\underline{S}$.

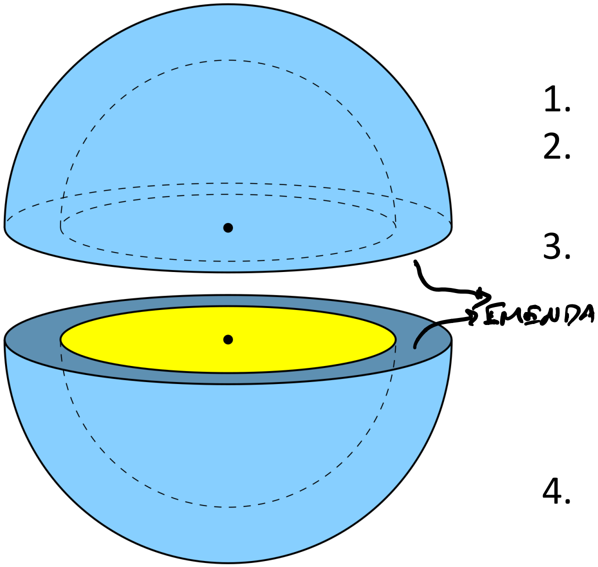


SEJA O FLUXO DE $\vec{E}$ ATRAVÉS DE S U S', ONDE S U S' É A SUPERFÍCIE QUE CIRCUNDA UMA REGIÃO COM UMA CAVIDADE ESFÉRICA QUE EXCLUI q:

$$\Phi_E = \Phi_S + \Phi_{S'} = \Phi_S + \int_{\text{ESFERA}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \Phi_S - \frac{q}{\epsilon_0}$$ (USANDO O SLIDE ANTERIOR)

MAS $\Phi_E = 0$, PORQUE $\underline{q}$ ESTÁ FORA DA REGIÃO. $\boxed{\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}}$

Teorema de Gauss para superfícies com buracos



1. Quebre a superfície em duas
2. Cada parte é uma superfície fechada e o teorema se aplica independentemente a cada uma delas.
3. A integral de superfície sobre a "emenda" de uma cancela exatamente a integral sobre a "emanda" da outra. Ao final, a soma das duas contribuições se cancela e só resta as integrais sobre a superfície interna e a externa.
4. Note que a parte amarela agora é "externa" à superfície.

A lei de Gauss

USANDO O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

ONDE A SOMA SE ESTENDE APENAS PELAS CARGAS DENTRO DE V

$$= \frac{1}{\epsilon_0} Q(V)$$

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV \quad \text{(LEI DE GAUSS)}$$

USANDO O TEOREMA DE GAUSS: $\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dV$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV$$

COMO A REGIÃO $\underline{V}$ É QUALQUER: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ LEI DE GAUSS

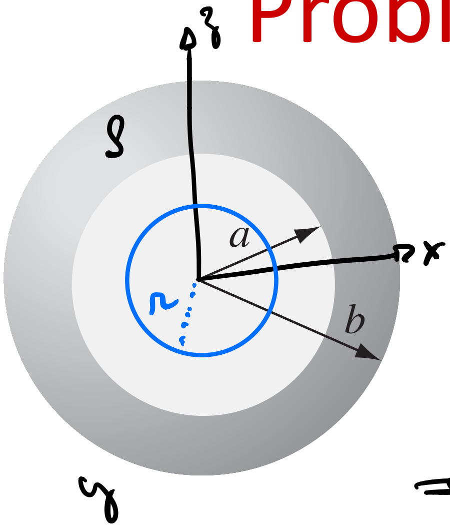
A lei de Gauss: derivação alternativa

Tomar diretamente o divergente da expressão geral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}dV'$$

Ver discussão no livro (Seção 2.2.2)

Problema 2.15 (modificado)



Campo elétrico de uma casca esférica uniformemente carregada de raio interno a e raio externo b

CARGA TOTAL: $Q = \int \rho \, dV = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi(b^3 - a^3)}$$

SIMETRIA: O PROBLEMA TEM SIMETRIA ESFÉRICA

i) $\vec{E}$ É RADIAL: $\vec{E} = E_r \hat{r}$

ii) E_r SÓ DEPENDE DE r

$$\left.\begin{array}{l} \text{i)} \\ \text{ii)} \end{array}\right\} \vec{E} = E_r(r)\,\hat{r}$$

a) $r < a$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E_r(r)\hat{r} \cdot (dS\,\hat{r}) = \int E_r(r)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(V)}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E_r(r) = 0 \quad (r < a)}$$

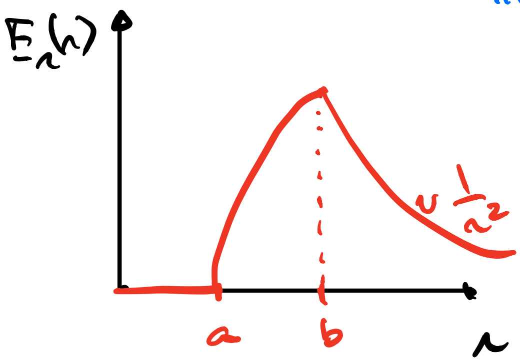
b) $a < r < b$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \dfrac{Q(V)}{\epsilon_0}$

$$Q(V) = \int \rho \, dV = \rho \, \frac{4\pi}{3} (r^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2} \quad (a < r < b)$$

c) $r > b$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \dfrac{Q(V)}{\epsilon_0} = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (r > b)$$



SE $a \rightarrow b$, O CAMPO TEM UMA DESCONTINUIDADE, COMO VIMOS NA AULA PASSADA

As equações fundamentais da eletrostática

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (2)$$

LEVANDO (2) EM (1):

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

EQUAÇÃO DE POISSON

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

EM REGIÕES ONDE $\rho(\vec{r}) = 0 \Longrightarrow \boxed{\nabla^2 V = 0}$

EQUAÇÃO DE LAPLACE