Aula 7

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

08/10/2020

Aulas passadas

Equações fundamentais da eletrostática

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

EQ. DE POISSON

Solução geral:

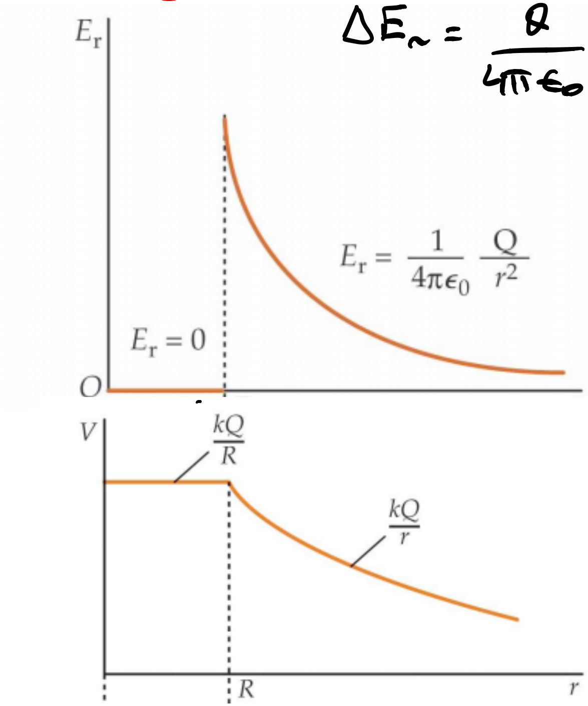
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

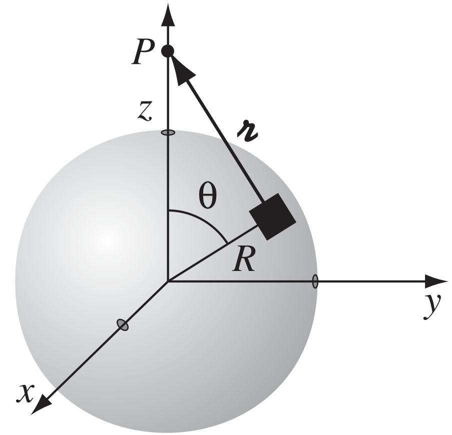
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Condições de contorno

Casca esférica uniformemente carregada

$$\Delta E_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2} = \frac{\overbrace{Q/4\pi R^2}^{\sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

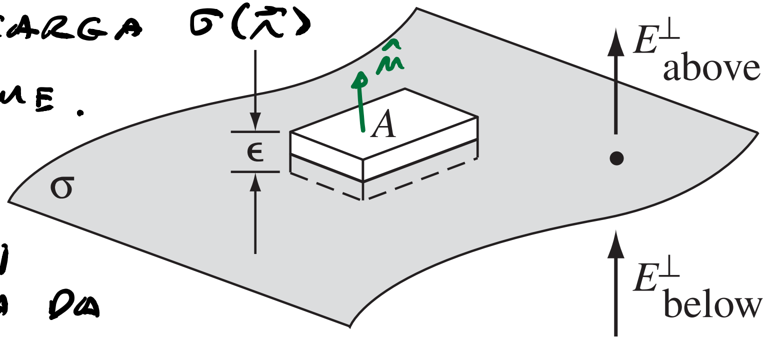




É possível prever a continuidade ou descontinuidade de $\mathbf{E}$ e V de antemão?

Condições de contorno

SEJA UMA SUPERFÍCIE COM UMA CERTA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CARGA $\sigma(\vec{x})$ NÃO NECESSARIAMENTE UNIFORME.



CONSIDERE UM VOLUME DE FORMA DE PARALELEPÍPEDO, COMO NA FIGURA, COM ÁREA DA BASE A, E ALTURA ϵ:

$\epsilon, A \to 0$, PORÉM $\epsilon \ll \sqrt{A} \Rightarrow \epsilon\sqrt{A} \ll A$

APLICO A LEI DE GAUSS:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\text{BASES}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\substack{\text{PAREDES}\\ \text{LATERAIS}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(\vec{E}_{\text{ABOVE}}\cdot\hat{n} - \vec{E}_{\text{BELOW}}\cdot\hat{n}\right)A +$$

$$+ O(\epsilon\sqrt{A}) \cong \left(E^{\perp}_{\text{ABOVE}} - E^{\perp}_{\text{BELOW}}\right)A$$

PORQUE $\epsilon\sqrt{A} \ll A$

$$Q(V) = \int \sigma \, dS = \sigma A$$

$$\left(E^{\perp}_{ABOVE} - E^{\perp}_{BELOW}\right)\cancel{A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\cancel{A}$$

$$\boxed{E^{\perp}_{ABOVE} - E^{\perp}_{BELOW} = \sigma/\epsilon_0}$$

A DESCONTINUIDADE DA COMPONENTE NORMAL À SUPERFÍCIE

DE $\vec{E}$ É σ/ϵ_0

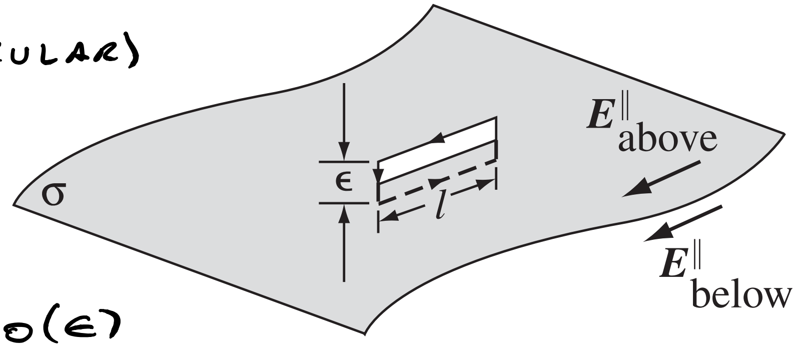
Condições de contorno

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ $\quad (\nabla \times \vec{E} = 0)$

CIRCUITO DA FIGURA (RETANGULAR)

ONDE $\epsilon \ll \ell$, MAS AMBOS

$\epsilon \to 0, \ \ell \to 0$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \left(E^{\parallel}_{ABOVE} - E^{\parallel}_{BELOW}\right)\ell + O(\epsilon)$$

$$\cong \left(E^{\parallel}_{ABOVE} - E^{\parallel}_{BELOW}\right)\cancel{\ell} = 0$$

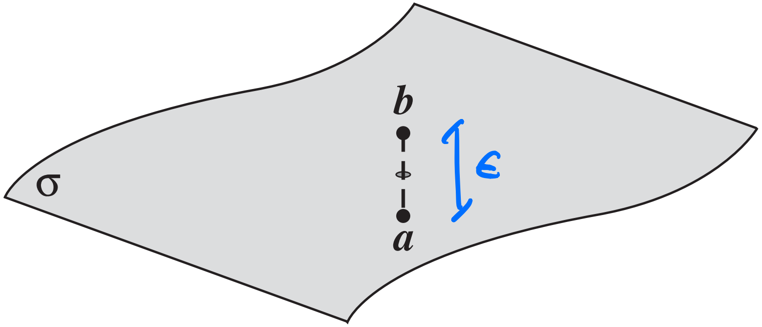
$$\boxed{E^{\parallel}_{ABOVE} = E^{\parallel}_{BELOW}}$$

A COMPONENTE DE $\vec{E}$ PARALELA À SUPERFÍCIE É CONTÍNUA.

Condições de contorno

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \sim O(\epsilon) \rightarrow 0$$

$a \rightarrow b$



$V_b = V_a$

O POTENCIAL ELÉTRICO É CONTÍNUO NA SUPERFÍCIE

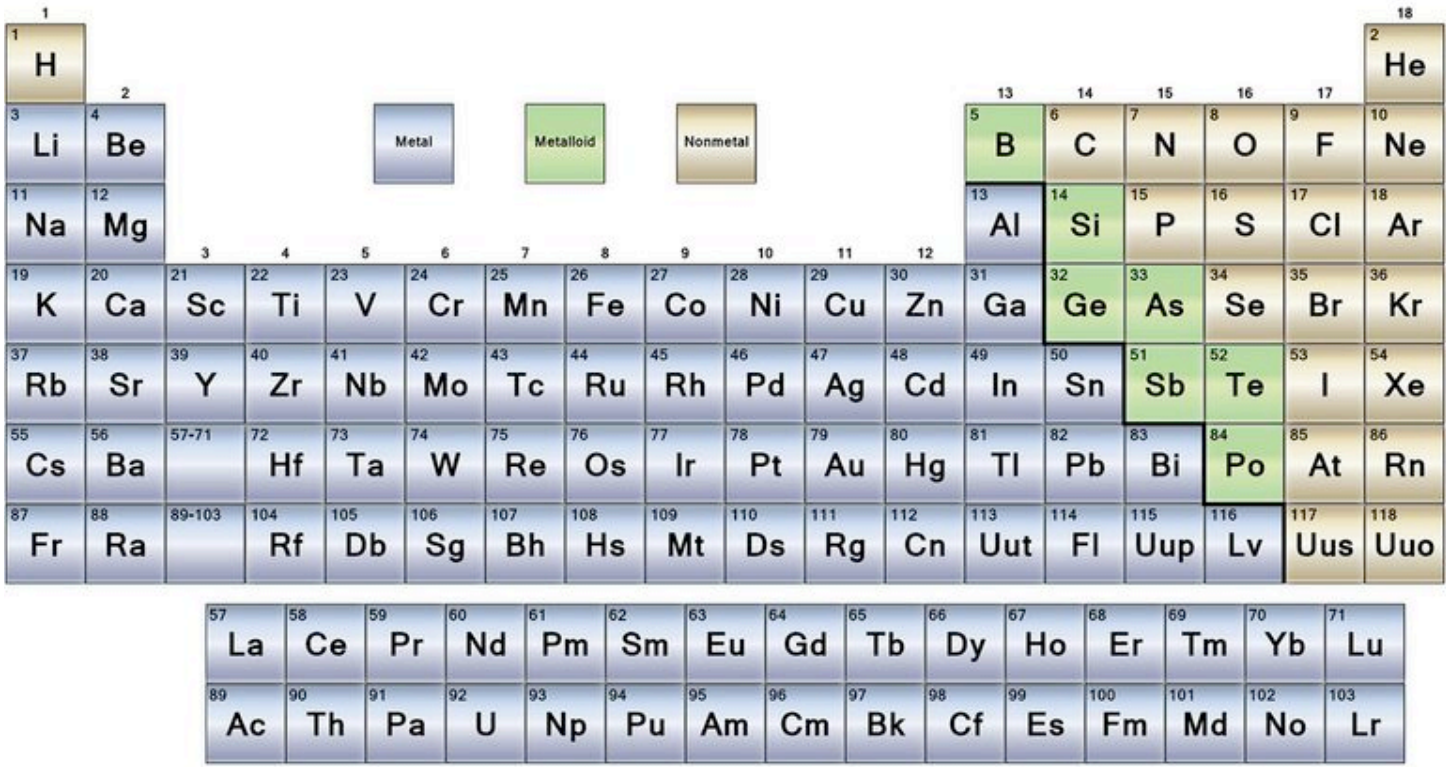
Eletrostática de condutores

Quando há condutores, não se sabe de antemão onde estão as cargas!

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$$

Eletrostática de condutores



CONDUTORES SÃO MATERIAIS
ONDE
. HÁ CARGAS LIVRES DISPONÍVEIS
QUE PODEM SE MOVER DESIM-
PEDIDAS PELO MATERIAL.

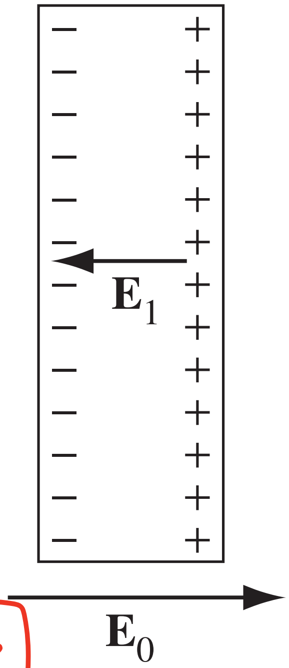
Eletrostática de condutores

(i) O campo elétrico no interior dos condutores é <u>nulo</u>.

AS CARGAS LIVRES SE MOVERÃO SOB AÇÃO DE $\vec{E}_0$ (CAMPO EXTERNO) ATÉ QUE O CAMPO CRIADO POR ELAS $\vec{E}_1$ (CAMPO INDUZIDO) CANCELE $\vec{E}_0$ E AS CARGAS NÃO SE MOVAM MAIS.

AO FINAL, NA SITUAÇÃO ESTÁTICA

$$\boxed{\vec{E} = 0 \text{ NO INTERIOR DO CONDUTOR}}$$



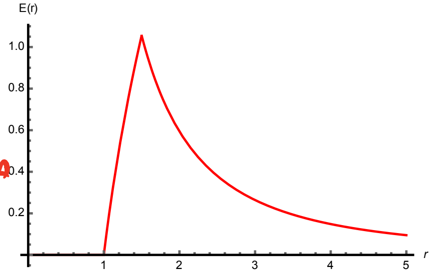
Eletrostática de condutores

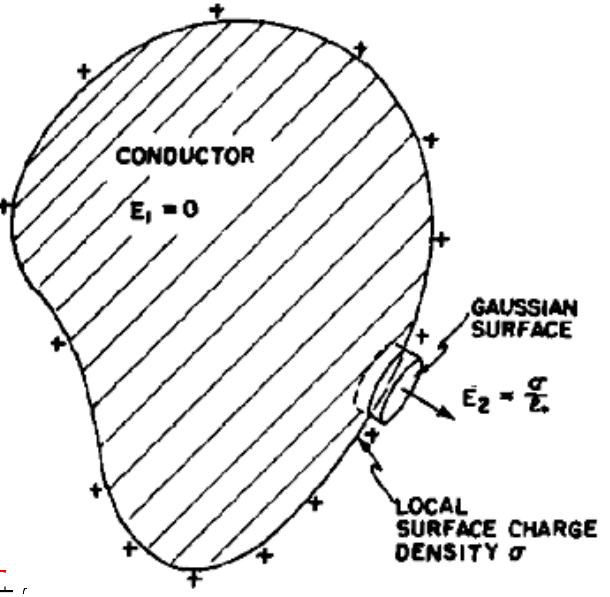
(ii) $\rho = 0$ no interior de condutores.

$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

(iii) Qualquer carga líquida vai para a superfície do condutor.

CAMPO DA CASCA ESFÉRICA DE ESPESSURA FINITA





(iv) O potencial elétrico é constante no interior de condutores.

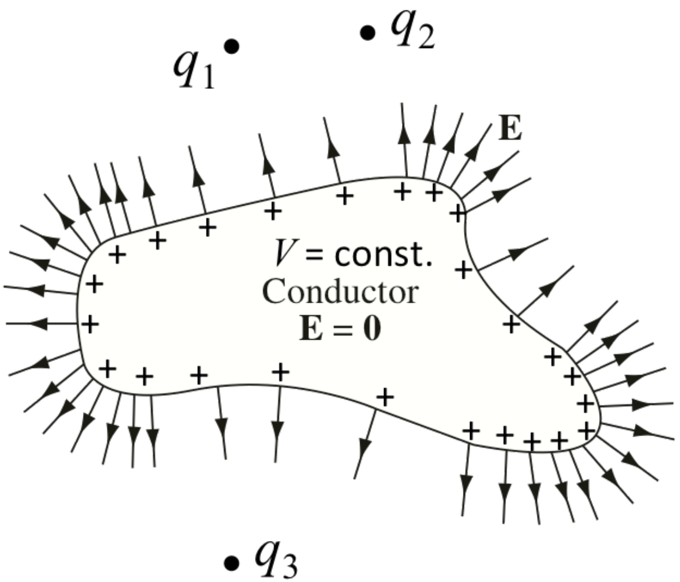
$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$ SE O CIRCUITO ESTÁ TODO DENTRO DO CONDUTOR

Eletrostática de condutores

(v) O campo elétrico imediatamente fora de um condutor é normal à sua superfície.

$E^{\parallel}_{FORA} = E^{\parallel}_{DENTRO} = 0$

$E^{\parallel}_{FORA} = 0 \Rightarrow$ SÓ HÁ COMPONENTE NORMAL À SUPERFÍCIE IMEDIATAMENTE FORA DO CONDUTOR

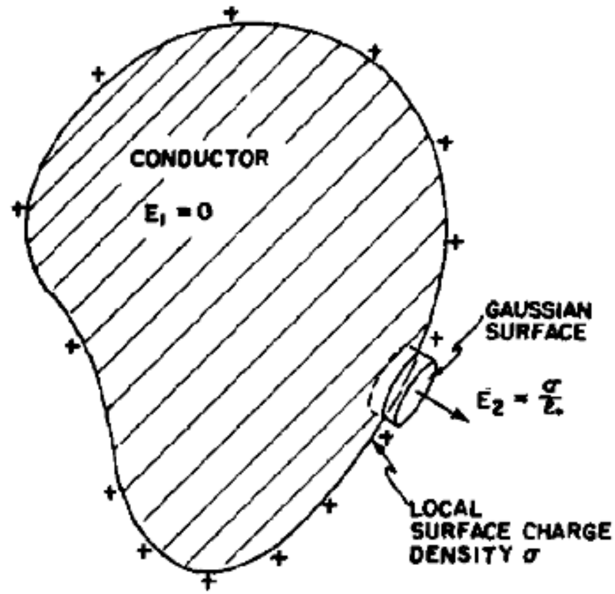


Eletrostática de condutores

(vi) A densidade superficial de carga na superfície de um condutor está ligada ao campo imediatamente fora do condutor .

$$E^{\perp}_{FORA} - E^{\perp}_{DENTRO} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^{\perp}_{FORA} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Pressão eletrostática

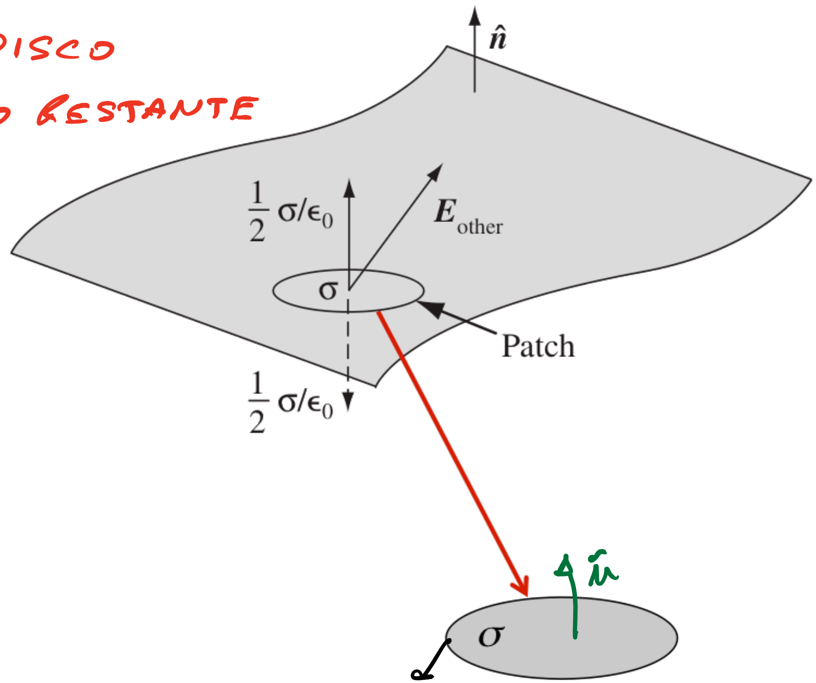
QUAL É A FORÇA SOBRE O DISCO DEVIDA AO CAMPO ELÉTRICO DO RESTANTE DAS CARGAS?

$$\vec{E} = \vec{E}_{DISCO} + \vec{E}_{RESTO}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} & \text{(FORA)} \\[2em] 0 & \text{(DENTRO)} \end{cases}$$

$$\vec{E}_{DISCO} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} & \text{(FORA)} \\[2em] -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} & \text{(DENTRO)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{RESTO} = \left.\begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} & \text{(FORA)} \\ \sigma/2\epsilon_0\,\hat{n} & \text{(DENTRO)} \end{cases}\right\} \rightarrow \text{CONTÍNUO}$$



CAMPO CALCULADO ANTERIORMENTE: $z \to 0$

FORÇA SOBRE O DISCO:

$$F_{DISCO} = E_{RESTO} \times q_{DISCO} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sigma A) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A$$

$$\boxed{P = \frac{F_{DISCO}}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}}$$

$$E_{FORA} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{P = \frac{\epsilon_0}{2} E_{FORA}^2}$$

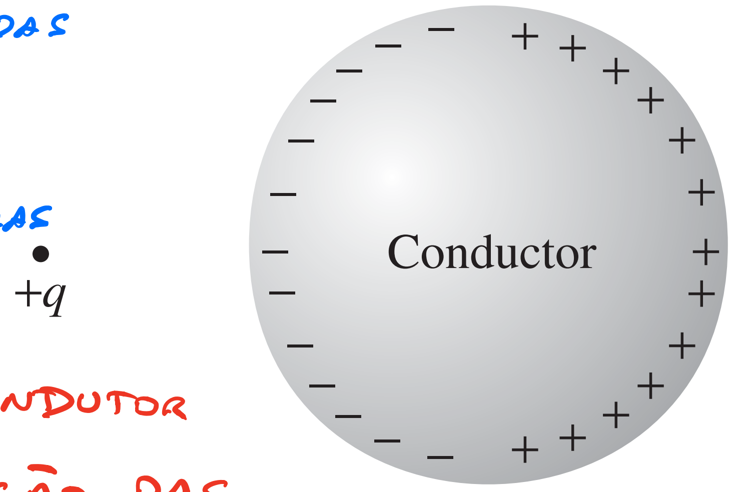
Cargas induzidas em condutores

UM CONDUTOR NA PRESENÇA DE CARGAS EXTERNAS APRESENTARÁ CARGAS INDUZIDAS NA SUA SUPERFÍCIE.

A DISTRIBUIÇÃO DESSA CARGAS É NÃO TRIVIAL:

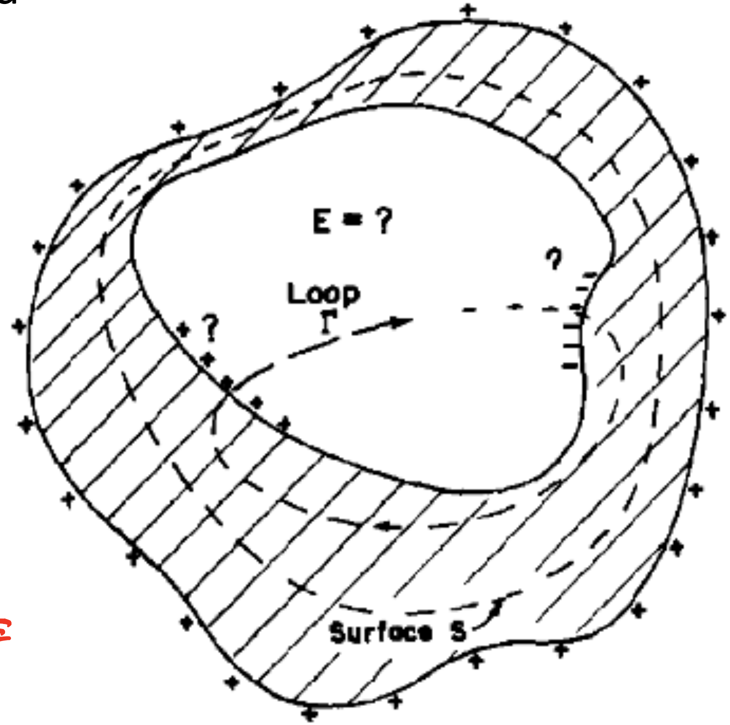
. DEPENDE DA FORMA DO CONDUTOR

. DEPENDE DA CONFIGURAÇÃO DAS CARGAS EXTERNAS



Cargas induzidas em condutores

Qual é o campo elétrico dentro de uma cavidade <u>vazia</u> “cavada” dentro de um condutor? Pode haver cargas na superfície do condutor ou fora dele.



MAS NÃO HÁ CARGAS <u>DENTRO</u> DA CAVIDADE.

CONSIDERE <u>S</u> DA FIGURA:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0} = 0$$

$\vec{E} = 0$

A CARGA TOTAL NA SUPERFÍCIE DA CAVIDADE É ZERO.

MAS, $\sigma(\vec{x}) = 0$ NA SUPERFÍCIE DA CAVIDADE? NÃO!

POR QUÊ? SE HOUVER ACÚMULO DE CARGAS + E − COMO NA FIGURA, HAVERÁ CAMPO ELÉTRICO!

NESSE CASO,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{DENTRO DA CAVIDADE}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

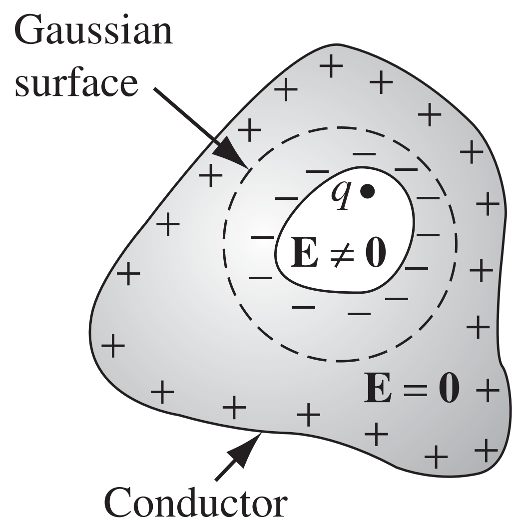
O QUE CONTRADIZ

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

$$\Rightarrow \sigma(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0 \text{ DENTRO DA CAVIDADE}}$$

Cargas induzidas em condutores

Mas e se houver cargas na cavidade?



USANDO GAUSS PARA A SUPERFÍCIE DA FIGURA:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$$

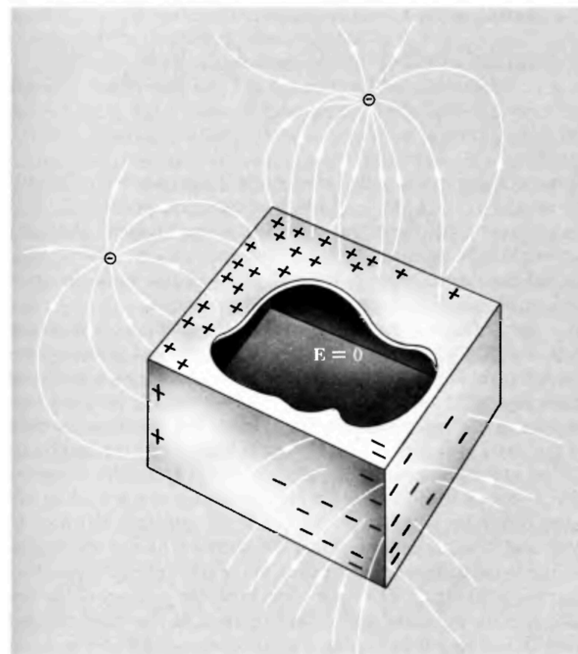
$\Rightarrow -q$ É INDUZIDA NA SUPERFÍCIE DA CAVIDADE

SE A CARGA LÍQUIDA DO CONDUTOR É ZERO, HÁ CARGA INDUZIDA $+q$ NA SUPERFÍCIE EXTERNA DO CONDUTOR.

Cavidades em condutores

1. **E**=0 dentro do condutor, mesmo se há uma cavidade, desde que não haja carga líquida na cavidade.

BLINDAGEM ELETROSTÁTICA

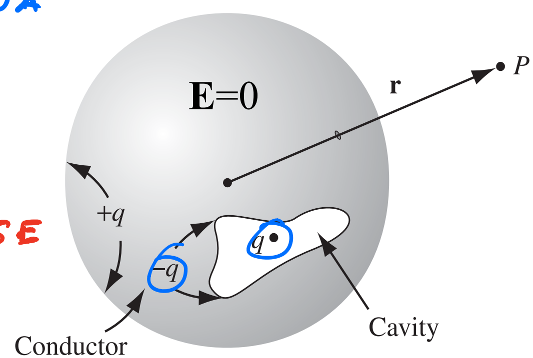


Cavidades em condutores

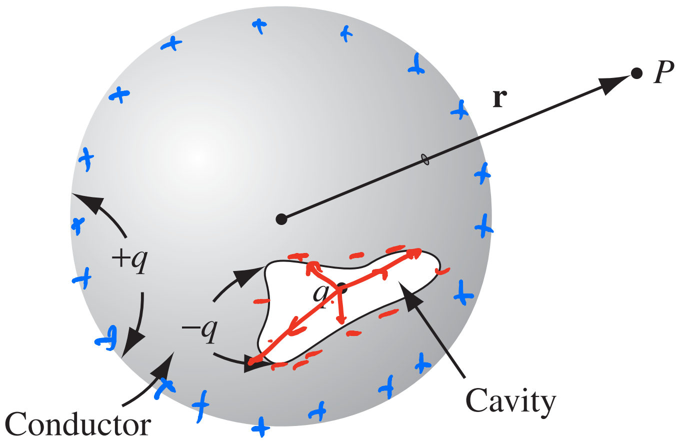
2. Se há cargas dentro das cavidades, cargas são induzidas nas paredes da cavidade de forma a cancelar exatamente o campo fora da cavidade. Esse cancelamento acontece **<u>localmente</u>:** o conjunto carga no interior + carga na superfície não gera nenhum campo fora da cavidade.

AS CARGAS +q E −q CIRCUNDADAS NA FIGURA GERAM $\vec{E} = 0$ FORA DESSA CAVIDADE

É COMO SE A CAVIDADE NÃO EXISTISSE NA ANÁLISE DE $\vec{E}$ FORA DELA.



Exemplo 2.9



O condutor não tem carga líquida, mas há uma carga q dentro de uma cavidade de forma irregular dentro da esfera. Qual é o campo em P fora da esfera?

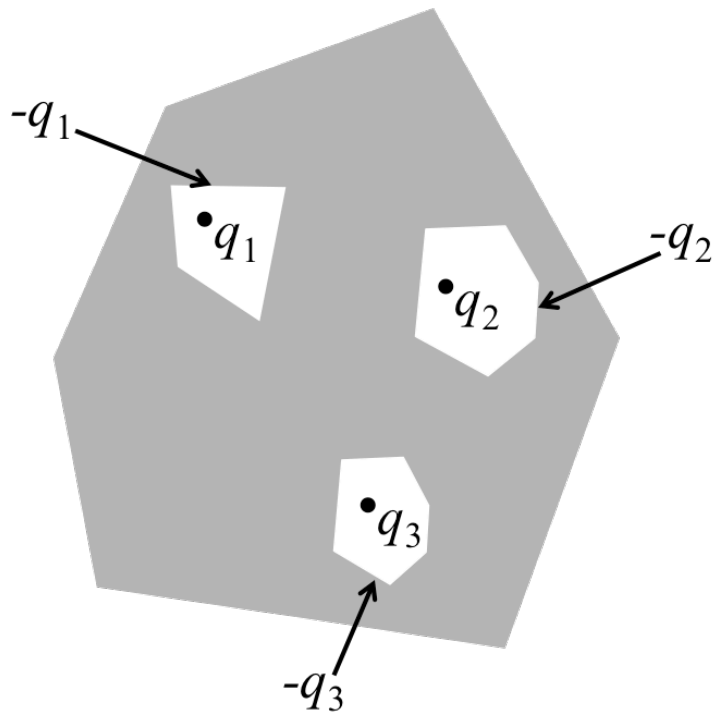
Resposta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Estudar com cuidado esse exemplo no livro.

Cavidades em condutores

3. Esse cancelamento acontece **localmente**, mesmo com várias cavidades.



Cavidades em condutores

4. Se o condutor tem carga líquida nula, uma carga é induzida na superfície externa para compensar as cargas nas superfícies internas das cavidades.

SE O CONDUTOR TIVER CARGA LÍQUIDA Q

HAVERÁ $Q + q_1 + q_2 + q_3$ NA SUPERFÍCIE

EXTERNA