# Aula 8

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

13/10/2020

# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

•$\mathbf{E}=0$ dentro do condutor.

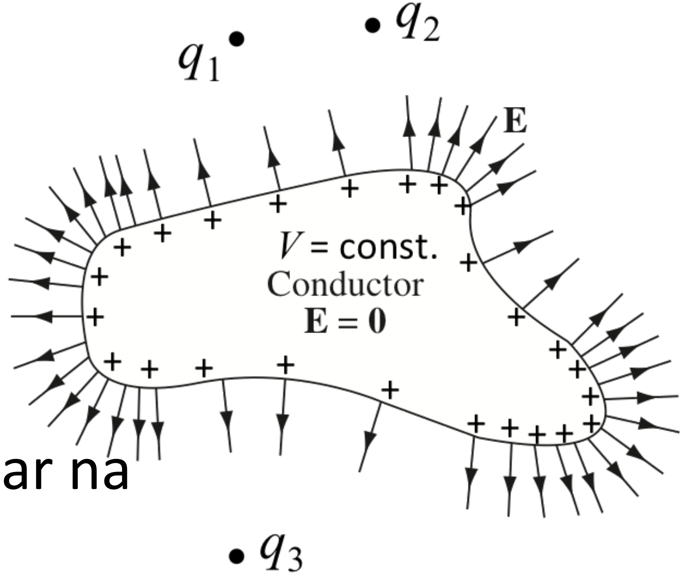
•V=constante dentro do

•condutor.

•$\mathbf{E}$ é normal à superfície.

•$\rho = 0$ dentro do condutor.

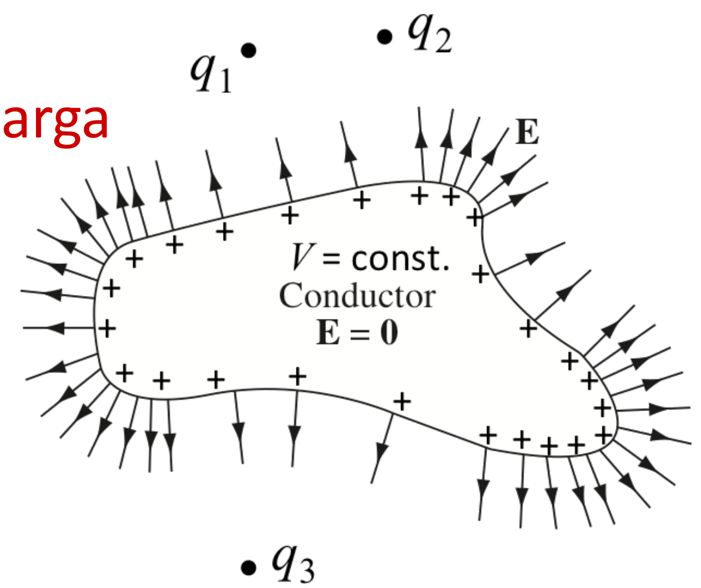
•Qualquer carga líquida só pode ficar na superfície do condutor.



# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

- O campo imediatamente fora do condutor está relacionado com a carga na superfície.




$$E^{\perp}_{\text{fora}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Há uma pressão eletrostática na superfície

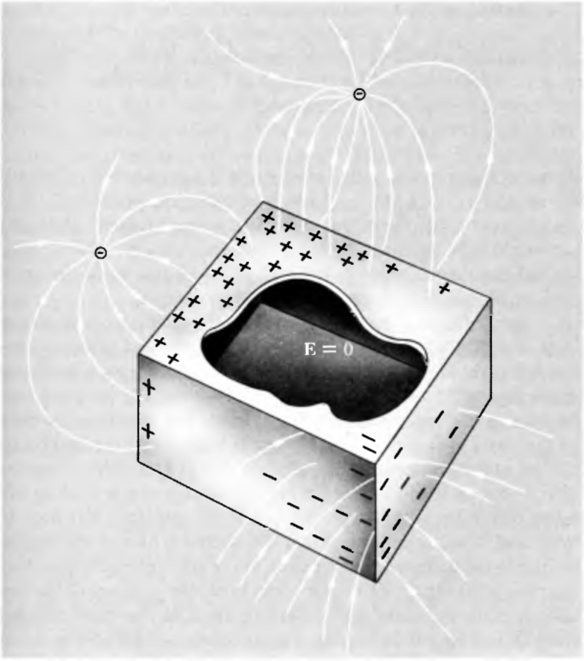
$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 \left(E^{\perp}_{\text{fora}}\right)^2}{2}$$

# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

•$\mathbf{E}=0$ dentro do condutor, mesmo se há uma cavidade, desde que não haja carga líquida na cavidade:

Blindagem eletrostática

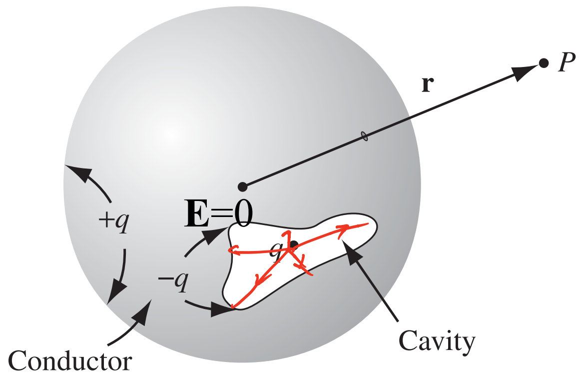


# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

- Se há cargas dentro das cavidades, cargas são induzidas nas paredes da cavidade de forma a cancelar exatamente o campo fora da cavidade. Esse cancelamento acontece **localmente**: o conjunto carga no interior + carga na superfície não gera nenhum campo fora da cavidade.

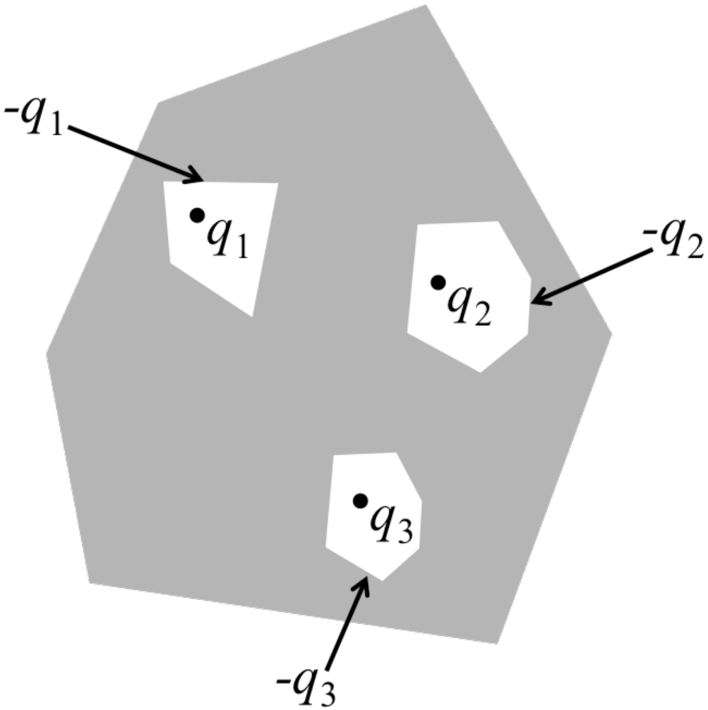
É como se a cavidade não existisse e o condutor fosse maciço.



# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

• Esse cancelamento acontece **localmente**, mesmo com várias cavidades.

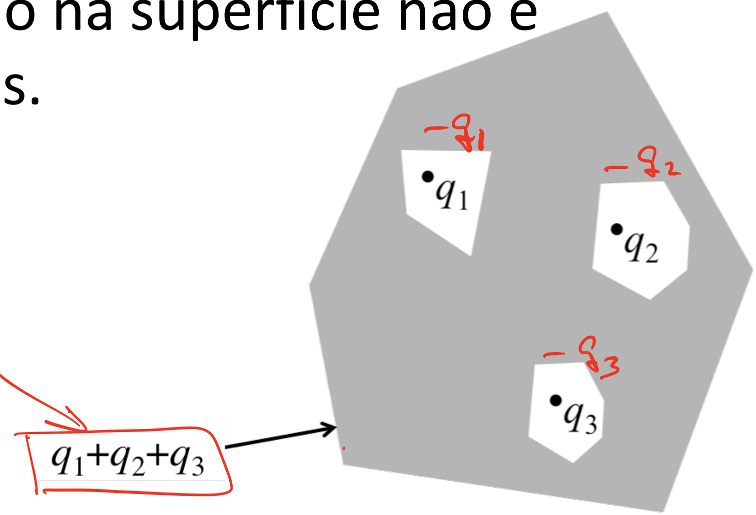


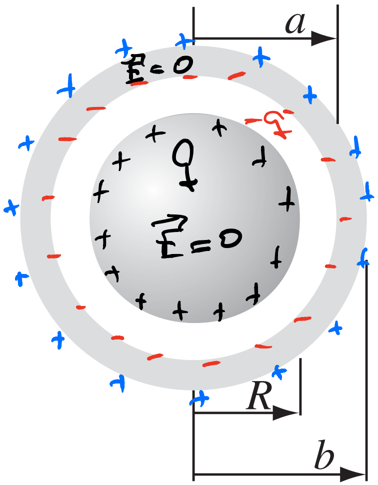
# Aulas passadas

Eletrostática de condutores:

•Se o condutor tem carga líquida nula, uma carga é induzida na superfície externa para compensar as cargas nas superfícies internas das cavidades.

O campo fora do condutor só “sente” o valor total das cargas nas cavidades, através da carga na superfície externa e mesmo sua distribuição na superfície não é afetada pela forma das cavidades.






# Problema 2.35

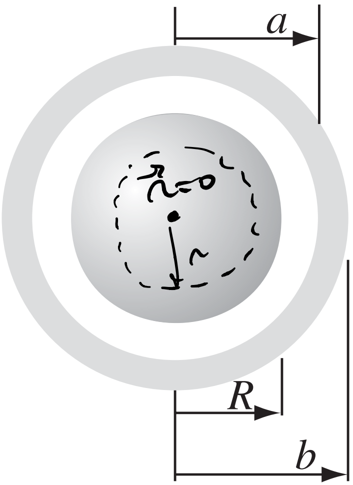
Uma esfera e uma casca esférica metálicas concêntricas. A esfera tem carga $q$ e a casca não tem carga líquida. (a) Encontre $\sigma$ em $r=R$, $a$ e $b$.

SIMETRIA ESFÉRICA : $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$

$$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2} = \text{CONST.}$$

$$\sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2} = \text{CONST.}$$

$$\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2} = \text{CONST.}$$




# Problema 2.35

Uma esfera e uma casca esférica metálicas concêntricas. A esfera tem carga $q$ e a casca não tem carga líquida.

(b) Encontre o potencial elétrico em $r=0$.

Tome $V(r=\infty)=0$.

ACHANDO $\vec{E}$ POR GAUSS:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_r(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$$

$r<R$: $E_r(r) = 0$

$R<r<a$: $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$

$a<r<b$: $E_r(r) = 0$

$r>b$: $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$

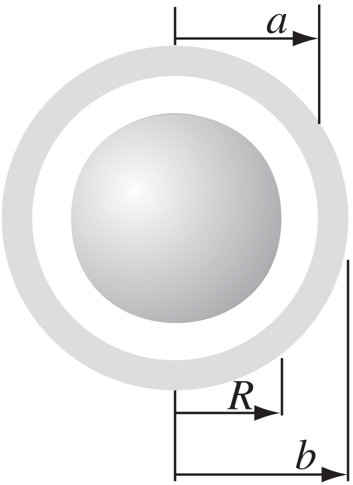
$$\cancelto{0}{V(\infty)} - V(0) = -\int_{\vec{r}=0}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V(\vec{r}=0) = \int_{\vec{r}=0}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} \Rightarrow V(\vec{r}=0) = \int_0^{\infty} E_r(r)\,\hat{r}\cdot(dr\,\hat{r}) = \int_0^{\infty} E_r(r)\,dr$$

$$= \left[\cancelto{0}{\int_0^R} + \int_R^a + \cancelto{0}{\int_a^b} + \int_b^{\infty}\right] E_r(r)\,dr = \int_R^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} + \int_b^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\Big|_{r=R}^{r=a} - \frac{1}{r}\Big|_{r=b}^{r\to\infty}\right] = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right] = V(\vec{r}=0)}$$

# Problema 2.35




Uma esfera e uma casca esférica metálicas concêntricas. A esfera tem carga $q$ e a casca não tem carga líquida.

(c) Agora a casca é aterrada: $V(r=b)=0$. Como as respostas (a) e (b) são modificadas?

ATERRAR A CASCA É LIGAR UM FIO DELA ATÉ O INFINITO, DE TAL FORMA $V(r=b)=V(r=\infty)=0$. O TRABALHO REALIZADO SOBRE UMA CARGA DE $r=b$ ATÉ $r\to\infty$ É ZERO.

O PRÓPRIO CAMPO $E_r(r)$ TEM QUE SER ZERO FORA DA CASCA.

PARA QUE $E_r(r)=0$ FORA DA CASCA, O ATERRAMENTO TROUXE CARGA $(-q)$ DO INFINITO DE FORMA A CANCELAR A CARGA $+q$ NA SUPERFÍCIE EXTERNA DA CASCA EM $r=b$.

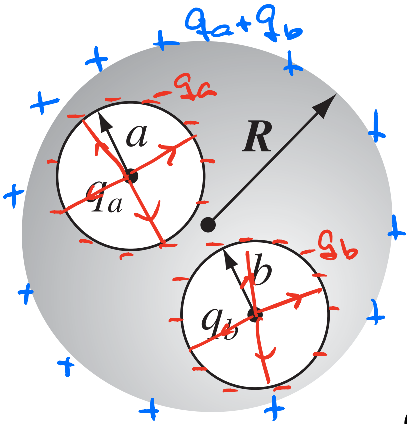
$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R}$ , $\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$ MAS $\sigma_b = 0$

CAMPO ELÉTRICO:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{SE } r<R \text{ OU } a<r<b \text{ OU } r>b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} & \text{SE } R<r<a \end{cases}$$

$$V(r) = \int_R^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)$$

# Problema 2.36




Uma esfera neutra de raio $R$ com duas cavidades esféricas. Cada cavidade tem uma carga no centro.

(a) Ache as densidades superficiais $\sigma_a$, $\sigma_b$ e $\sigma_R$.

COMO A CARGA INDUZIDA $-q_a$ TEM QUE CANCELAR O CAMPO ELÉTRICO DE $q_a$ FORA DA ESFERA DE RAIO $a$, A CARGA INDUZIDA VAI SE DISTRIBUIR UNIFORMEMENTE NA SUPERFÍCIE INTERNA DA CAVIDADE. PORTANTO:

$$\boxed{\sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi a^2}}$$

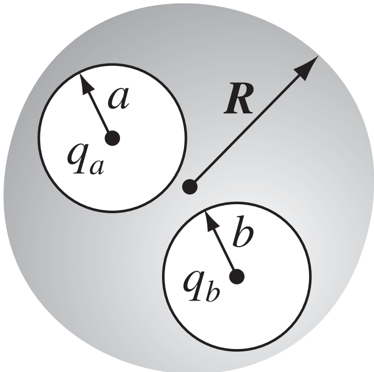
ANALOGAMENTE PARA A OUTRA CAVIDADE:

$$\boxed{\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}}$$

$$\boxed{\sigma_R = \frac{q_a+q_b}{4\pi R^2}}$$

PORQUE O EFEITO DAS CAVIDADES É ZERO FORA DELAS

# Problema 2.36



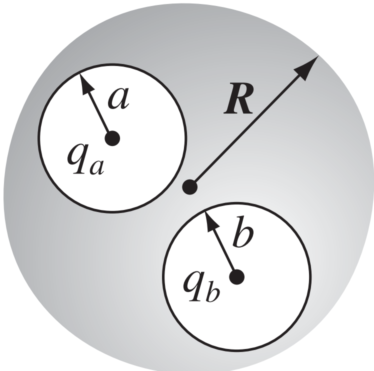

Uma esfera neutra de raio $R$ com duas cavidades esféricas. Cada cavidade tem uma carga no centro.

(b) Qual é o campo elétrico fora do condutor?

SÓ HÁ EFEITO DE $q_a + q_b$:

$$\vec{E} = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$ FORA DA ESFERA CONDUTORA

# Problema 2.36




Uma esfera neutra de raio $R$ com duas cavidades esféricas. Cada cavidade tem uma carga no centro.

(c) Qual é o campo elétrico em cada cavidade?

NA CAVIDADE a:

$$\vec{E} = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}_a}{r_a^2}$$

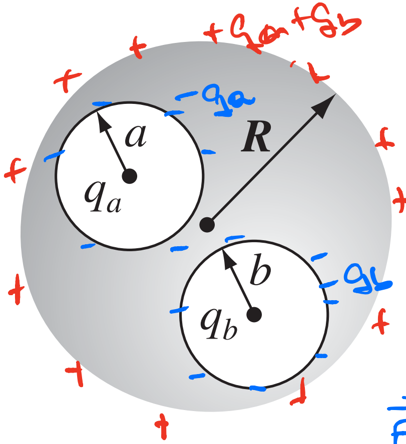
ONDE $r_a$ e $\hat{r}_a$ SÃO EM RELAÇÃO AO CENTRO DA CAVIDADE DE RAIO a

NA CAVIDADE b:

$$\vec{E} = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}_b}{r_b^2}$$

ONDE $r_b$ E $\hat{r}_b$ SÃO EM RELAÇÃO AO CENTRO DA CAVIDADE DE RAIO b

# Problema 2.36




Uma esfera neutra de raio $R$ com duas cavidades esféricas. Cada cavidade tem uma carga no centro.

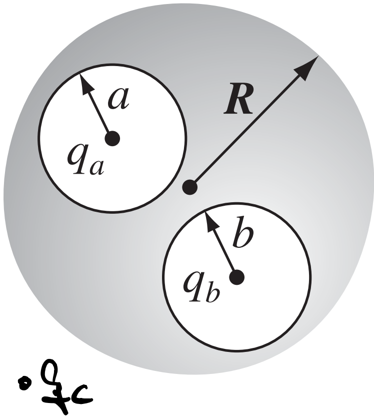
(d) Qual é a força em $q_a$ e $q_b$?

$\vec{F}$ SOBRE $q_a$ É ZERO PORQUE:

- A FORÇA DEVIDO A $(-q_a)$ É ZERO (INTERIOR DE UMA CASCA ESFÉRICA)
- A FORÇA DEVIDO AO PAR $q_b$ E $-q_b$ É ZERO (CANCELAMENTO FORA DA CAVIDADE)
- A FORÇA DEVIDO A $q_a+q_b$ É ZERO (INTERIOR DE UMA CASCA ESFÉRICA COM DENSIDADE DE CARGA UNIFORME)

ANALOGAMENTE $\vec{F}=0$ SOBRE $q_b$

# Problema 2.36




Uma esfera neutra de raio $R$ com duas cavidades esféricas. Cada cavidade tem uma carga no centro.

(e) Qual dessas respostas mudaria se uma carga $q_c$ fosse trazida para perto da esfera?

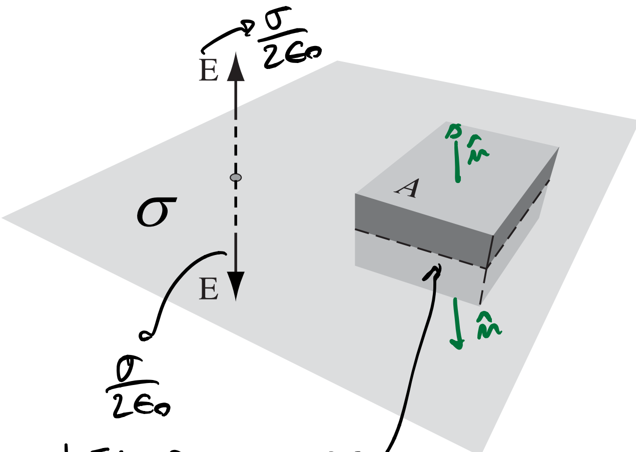
NADA MUDA COM RELAÇÃO ÀS CAVIDADES.

MAS, A CARGA $q_a + q_b$ NA SUPERFÍCIE EM $r = R$ AGORA SE DISTRIBUIRÁ NÃO UNIFORMEMENTE.

OS OUTROS RESULTADOS CONTINUAM INALTERADOS.

# Capacitores

## O capacitor de placas paralelas



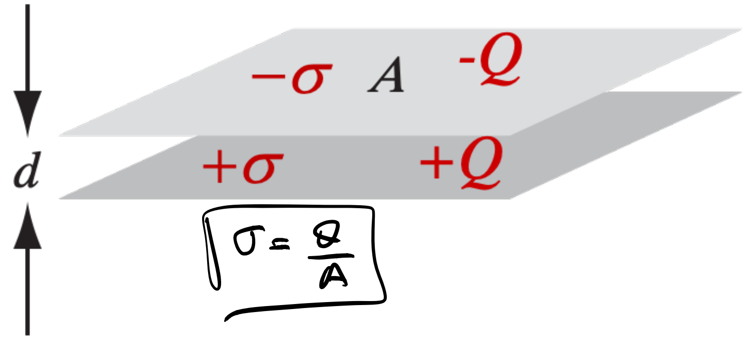

LEI DE GAUSS:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{ACIMA}\cancel{A} + E_{ABAIXO}\cancel{A} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\epsilon_0}$$

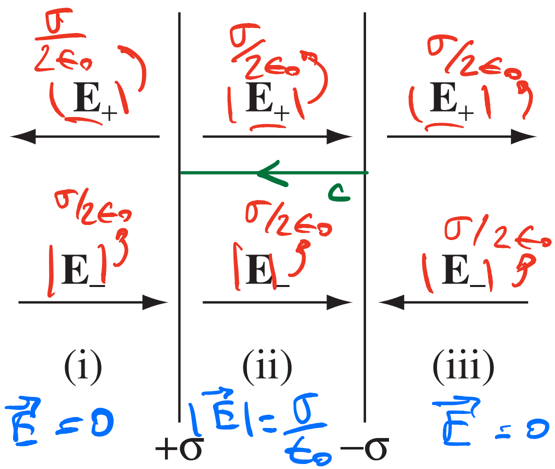
POR SIMETRIA: $E_{ACIMA} = E_{ABAIXO} = E$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

$d \ll \sqrt{A}$




$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$$



# Capacitância

A DIFERENÇA DE POTENCIAL ENTRE AS PLACAS:

$$V_+ - V_- = -\int_{\underbrace{\vec{r}_-}_{c}}^{\vec{r}_+} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_-^+ E\,dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\underbrace{\int_-^+ dl}_{d} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Q d}{A \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Delta V \propto Q}$$

$$\frac{Q}{\Delta V} = \text{CAPITÂNCIA DO CAPACITOR} \equiv C$$

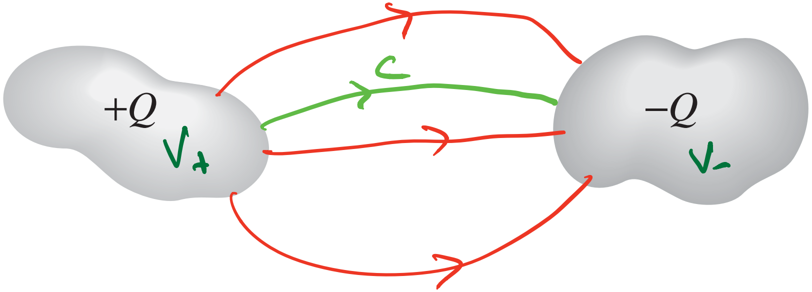
- SÓ DEPENDE DA GEOMETRIA DOS CONPUTORES (FORMA E CONFIGURAÇÃO ESPACIAL)

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

- UNIDADE SI DE CAPACITÂNCIA É O FARAD.

$$\left[\frac{C}{\epsilon_0}\right] = L$$

# Capacitores e capacitância




GENERALIZANDO PARA DOIS CONDUTORES QUAISQUER, UM COM CARGA $+Q$ E O OUTRO COM CARGA $-Q$.

OS POTENCIAIS SÃO CONSTANTES ($V_+$ E $V_-$) NAS REGIÕES DOS CONDUTORES:

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

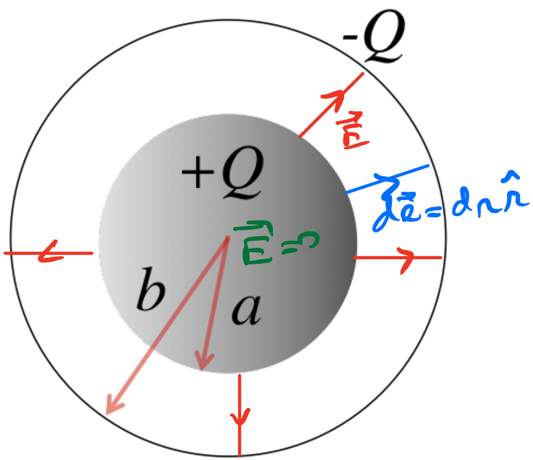
PELO PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO, $\Delta V \propto Q$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}}$$

ÀS VEZES SE FALA DA CAPACITÂNCIA DE UM CONDUTOR APENAS. É COMO SE O OUTRO, ESTIVESSE NO INFINITO.

# Exemplo 2.11

A capacitância de duas esferas condutoras concêntricas de raios $a$ e $b$.




$$\Delta V = ? = V_+ - V_- = -\int_{\vec r_-}^{\vec r_+} \vec E \cdot d\vec\ell = \int_{\vec r_+}^{\vec r_-} \vec E \cdot d\vec\ell$$

CAMPO ELÉTRICO POR GAUSS:

$a < r < b$: $\vec E = E_r(r)\,\hat r$ (SIMETRIA ESFÉRICA)

$$\oint \vec E \cdot d\vec S = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=a}^{r=b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\overbrace{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}^{\frac{(b-a)}{ab}} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a-b}$$