Aula 9

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

15/10/2020

Aula passada

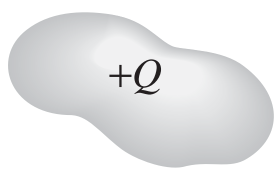
Capacitor: dois condutores com cargas opostas, $+Q$ e $-Q$

$$\Delta V = V_+ - V_- \propto Q$$

Capacitância: $$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

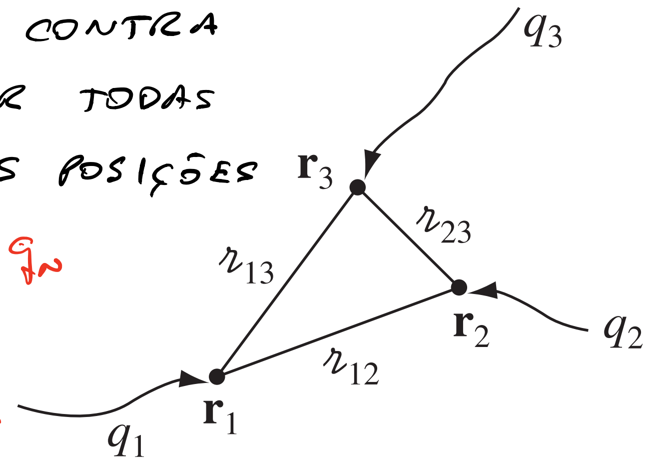
Só depende da geometria.

Capacitância de um condutor apenas: ponha $+Q$ no condutor em questão e o condutor com $-Q$ é posto no infinito.



Energia eletrostática

É IGUAL AO TRABALHO REALIZADO CONTRA A FORÇA ELÉTRICA PARA TRAZER TODAS AS CARGAS DO INFINITO ÀS SUAS POSIÇÕES FINAIS. PARA N CARGAS $q_1, q_2, \cdots q_N$ EM POSIÇÕES FINAIS $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_N$ PODEMOS CALCULAR ESSE TRABALHO:



PRIMEIRO, TRAZEMOS q_1: COMO AINDA NÃO HÁ CARGAS PRÓXIMAS: $W_1 = 0$

TRAZENDO AGORA q_2 ATÉ $\vec{r}_2$:

TOMANDO $V(|\vec{r}| \to \infty) = 0$

$$W_2 = q_2 \int_{\infty}^{\vec{r}_2} (-\vec{E}_1) \cdot d\vec{r} = q_2 V_1(\vec{r}_2)$$

$$= q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

TRAZENDO q_3 PARA $\vec{r}_3$:

$$W_3 = q_3 \left[-\int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} - \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \right] = q_3 \left[V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3) \right]$$

$$= \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

ATÉ AGORA: $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$

ONDE $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

PARA N CARGAS, HÁ UM TERMO PARA CADA PAR:

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

UMA FORMA ALTERNATIVA MAIS SIMÉTRICA É: $\boxed{W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$

$$W = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{V(\vec{r}_i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

PODEMOS USAR ESSA EXPRESSÃO PARA UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGAS:

$$\sum_i q_i \longrightarrow \int dq = \int \rho\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV}$$

OU $\frac{1}{2}\int \sigma(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dS$

OU $\frac{1}{2}\int \lambda(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\ell$

PODEMOS ESCREVER: $W = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{TODO} \\ \text{O} \\ \text{ESPAÇO}}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r})\, dV$

JÁ QUE QUANDO $\rho(\vec{r}) = 0$ NÃO HÁ CONTRIBUIÇÃO

$$W = \frac{1}{2}\int_{T.E.} \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, V\, dV$$

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

USANDO: $\vec{\nabla}\cdot\left[V\vec{E}\right] = (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{E} + V\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.}\left[\vec{\nabla}\cdot(V\vec{E}) - (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{E}\right]dV = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2}\int_{S_\infty} V\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{0} - \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.}\vec{\nabla}V\cdot\vec{E}\,dV$$

S_∞ É UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA DE RAIO R

ONDE $R \to \infty$.

PARA UMA DISTRIBUIÇÃO LOCALIZADA DE CARGAS:

(O QUE EXCLUI PLANO INFINITO, LINHA INFINITA, CILINDRO INFINITO)

$$\left.\begin{aligned} V &\sim \frac{1}{R} \\ \vec{E} &\sim \frac{1}{R^2} \end{aligned}\right\} \text{COMO CARGAS PONTUAIS}$$

$$V\vec{E} \sim \frac{1}{R^3}; \quad \int_{S_\infty} V\vec{E}\cdot d\vec{S} \sim \frac{1}{R^3}R^2 \sim \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} (\vec{\nabla} V)\cdot \vec{E}\, dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{T.E.} \vec{E}\cdot\vec{E}\, dV = \boxed{\int_{T.E.} \left[\frac{\epsilon_0}{2} E^2\right] dV = W}$$

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \; : \text{ DENSIDADE DE ENERGIA ELETROSTÁTICA}$$

POSSO OLHAR PARA A ENERGIA ELETROSTÁTICA COMO TODA CONTIDA NO CAMPO ELÉTRICO.

Energia armazenada em um capacitor

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,V(\vec{r})\,dV$$

$$W = \frac{1}{2}\left[V_+ \underbrace{\int \rho_+(\vec{r})\,dV}_{+Q} + V_- \underbrace{\int \rho_-(\vec{r})\,dV}_{-Q}\right]$$

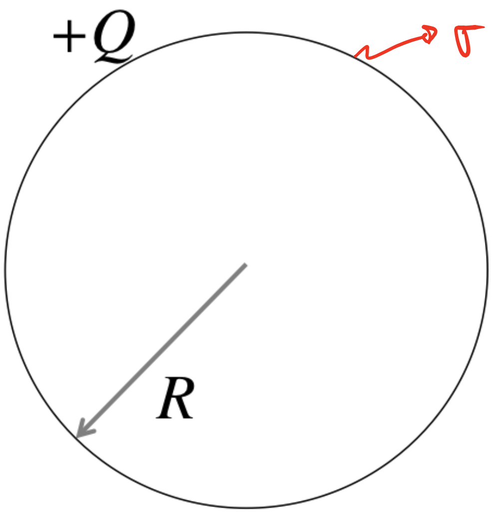
$$W = \frac{1}{2}\left[V_+ Q - V_- Q\right] = \frac{Q}{2}\left(V_+ - V_-\right) = \frac{Q\,\Delta V}{2}$$

MAS: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \Rightarrow W = \dfrac{C(\Delta V)^2}{2}$

OU $W = \dfrac{Q^2}{2C}$

Exemplo 2.8

Energia total de uma casca esférica de raio R uniformemente carregada com carga total Q.



$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

a) $W = \frac{1}{2}\int \sigma(\vec{r})\, V(\vec{r})\, ds$

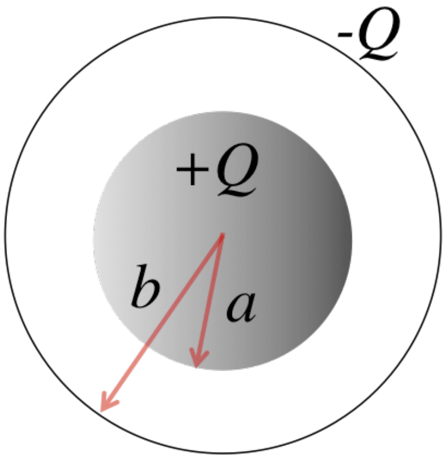
$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} & (r > R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} & (r < R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\,\sigma\,\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\int ds = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\cancel{4\pi R^2}}\right)\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\right) \times \cancel{4\pi R^2} = \boxed{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$$

b) $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{T.E.} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$

$\hookrightarrow E$ (FORA DA CASCA)

$$W = \frac{\cancel{\epsilon_0}}{2} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0^{\cancel{2}}} \int_R^\infty \frac{\cancel{r^2}}{r^{\cancel{4}\,2}} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r=R}^{r\to\infty} = \boxed{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$$



$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

TOMANDO $a = R$ E $b \to \infty$

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$$

Aulas passadas

Equações fundamentais da eletrostática

$$\left.\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

SE $\rho = 0$:

$\nabla^2 V = 0$

Solução geral:

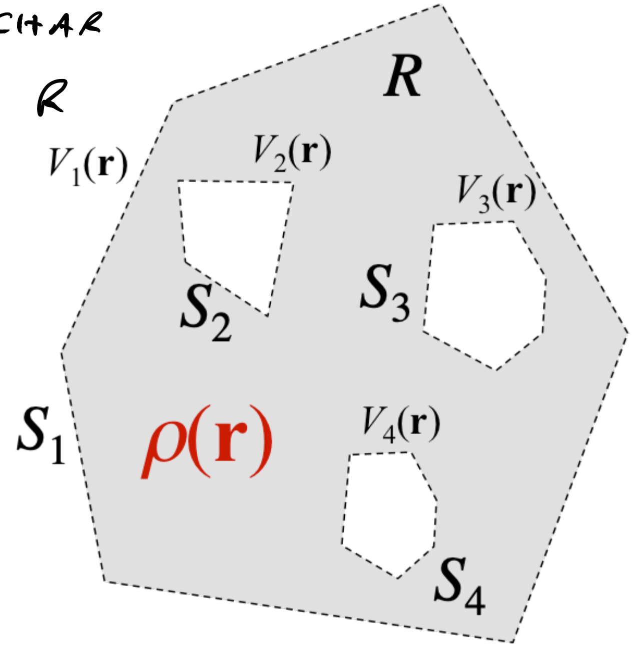
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$$

Se a configuração de cargas for conhecida no espaço inteiro.

Problemas de valores de contorno

UMA SITUAÇÃO COMUM É QUERER ACHAR $V(\vec{r})$ OU $\vec{E}(\vec{r})$ NUMA REGIÃO FINITA R CUJA BORDA É $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_N$



TEREMOS $\rho(\vec{r})$ $\forall \vec{r} \in R$

E EU TENHO INFORMAÇÕES SOBRE O PROBLEMA $\forall \vec{r} \in S$

COMO, POR EXEMPLO:

a) $V(\vec{r})$ $\forall \vec{r} \in S$

b) $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} V$ $\forall \vec{r} \in S$

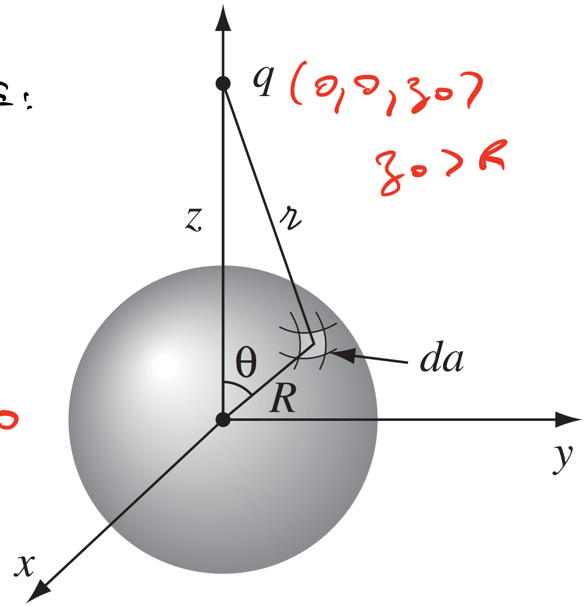
OU OUTRAS

ESSAS CONDIÇÕES DEFINEM UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Um lema

DADA UMA ESFERA DE RAIO R, SEM CARGAS NO SEU INTERIOR, SEGUE QUE:

$$\langle V\rangle_S = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S(V)} V(\vec{r})\, dS = V(\text{CENTRO})$$



VOU PROVAR PARA UMA CARGA E O RESULTADO SEGUE PELO PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO.

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - z_0\hat{z}|}$$

$$|\vec{r} - z_0\hat{z}| = \left[r^2+z_0^2-2z_0\,\hat{z}\cdot\vec{r}\right]^{1/2} = \left[r^2+z_0^2-2z_0 r\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$\langle V\rangle_S = \frac{1}{4\pi \cancel{R^2}}\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\cancel{R^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[R^2+z_0^2-2z_0R\cos\theta\right]^{1/2}} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\left[\quad\right]^{1/2}} =$$

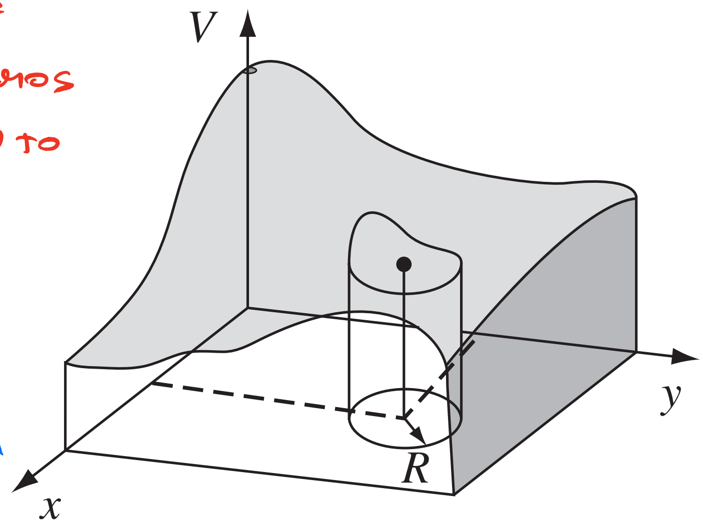
$$\langle V \rangle_S = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{R^2+z_0^2-2z_0R\cos\theta}}{z_0R}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{z_0R}\left[\sqrt{(R+z_0)^2}-\sqrt{(R-z_0)^2}\right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 z_0R}\left[R+\cancel{z_0}-(\cancel{z_0}-R)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z_0} = V(\vec{r}=0) \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário

UMA CONSEQUÊNCIA DO LEMA É QUE $V(\vec{r})$ NÃO PODE TER MÁXIMOS OU MÍNIMOS LOCAIS EM QUALQUER PONTO DE UMA REGIÃO R.



SE HOUVER UM MÁXIMO EM $\vec{r}_0$ BASTA CONSTRUIR UMA BOLA BEM PEQUENA COM CENTRO EM $\vec{r}_0$ E TERÍAMOS

$\langle V \rangle_S < V(\vec{r}_0)$ O QUE CONTRADIZ O LEMA

ANALOGAMENTE PARA MÍNIMOS $\langle V \rangle_S > V(\vec{r}_0)$

1º teorema de unicidade

SEJA UMA REGIÃO R COM BORDA $S = S_1 \cup S_2 \cdots S_N$

TAL QUE:

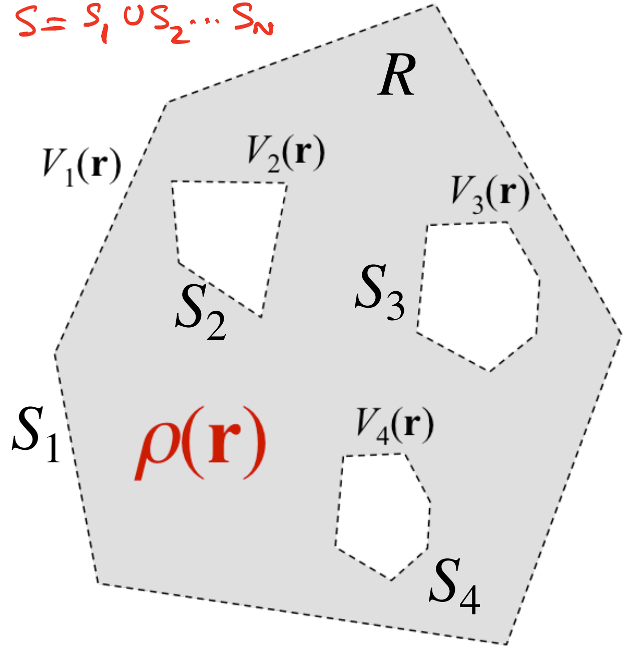
a) $\rho(\vec{r})$ É DADO EM R E

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \forall \vec{r} \in R$$

b) $V(\vec{r}) = \begin{cases} V_1(\vec{r}) & \text{EM } S_1 \\ V_2(\vec{r}) & \text{EM } S_2 \\ \vdots & \end{cases}$

$V(\vec{r})$ É DADO $\forall \vec{r} \in S$

A SOLUÇÃO DESSE PROBLEMA É ÚNICA.



PROVA: SUPONHA QUE HAJA $V_a(\vec{r}) \neq V_b(\vec{r})$ SATISFAZENDO AS CONDIÇÕES DO PROBLEMA.

SEJA $V_c(\vec{r}) = V_a(\vec{r}) - V_b(\vec{r})$

a) $\nabla^2 V_a = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ E $\nabla^2 V_b = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\forall \vec{r} \in R$

SUBTRAINDO: $\nabla^2 (V_a - V_b) = \nabla^2 V_c = 0$ $\forall \vec{r} \in R$

b) $V_c = 0$ EM S

MAS $V_c(\vec{r})$ NÃO PODE TER MÁXIMOS OU MÍNIMOS EM $R \Rightarrow V_c(\vec{r})$ NÃO PODE SER >0 EM R NEM <0 EM R

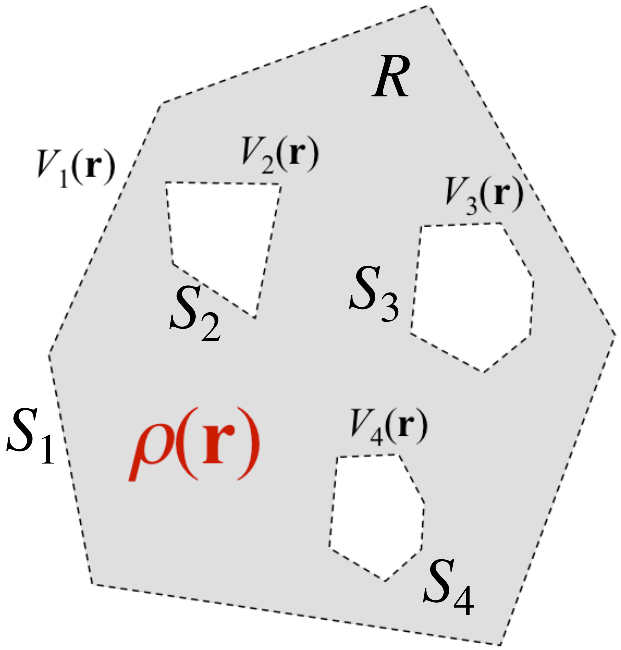
$\Rightarrow V_c(\vec{r}) = 0$ $\forall \vec{r} \in R \Rightarrow V_a(\vec{r}) = V_b(\vec{r})$

Resumo

O potencial $V(\mathbf{r})$ é único num volume V se especificarmos:

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) \quad \text{em} \quad V$$

$$V\left(\mathbf{r}\right) \quad \text{em} \quad S\left(V\right)$$

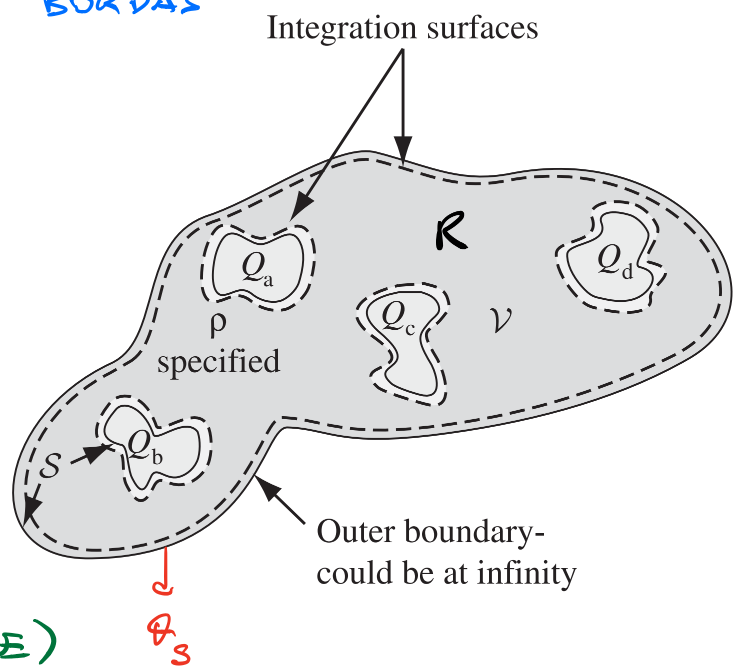


2º teorema de unicidade

APROPRIADO PARA REGIÕES CUJAS BORDAS SÃO CONDUTORES:

a) $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\quad \vec{r} \in R$

b) AS CARGAS TOTAIS DAS BORDAS CONDUTORAS SÃO DADAS



NESSE CASO:

$V(\vec{r})$ É ÚNICO EM $\underline{R}$

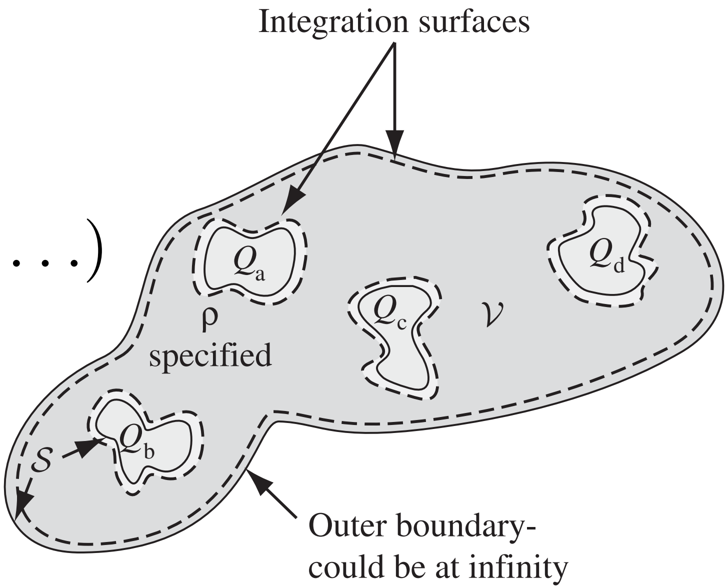
(A MENOS DE UMA CONSTANTE)

$\vec{E}(\vec{r})$ É ÚNICO EM $\underline{R}$

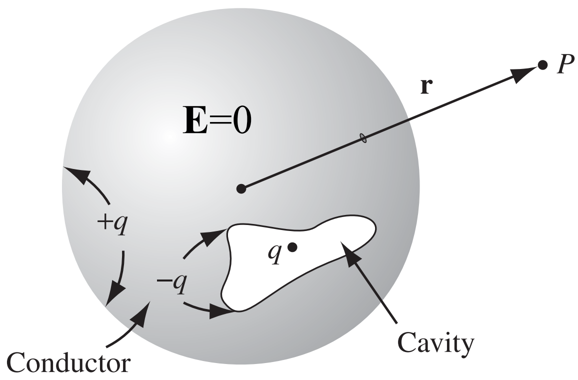
Resumo

O potencial $V(\mathbf{r})$ é único (a menos de uma constante) e o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é unico num volume V cercado de condutores se especificarmos:

$$\begin{array}{lll} \rho(\mathbf{r}) & \text{em} & V \\ Q_i & \text{em} & S_i(V) \quad (i = 1, 2, \ldots) \end{array}$$



Exemplo 2.9



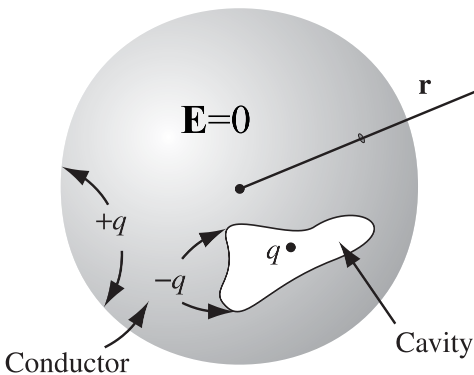
O condutor não tem carga líquida, mas há uma carga q dentro de uma cavidade de forma irregular dentro da esfera. Qual é o campo em P fora da esfera?

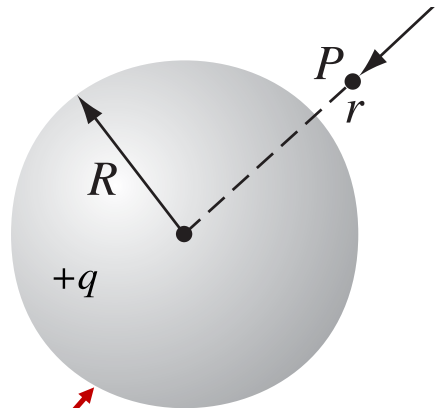
Resposta: $$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Para resolver esse problema, assumimos que o campo criado fora da cavidade pela carga pontual q mais a carga $-q$ induzida na parede da cavidade se anula completamente.

Exemplo 2.9

Compare com o campo fora de uma esfera condutora maciça de mesmo raio, com carga $+q$ (na sua superfície):



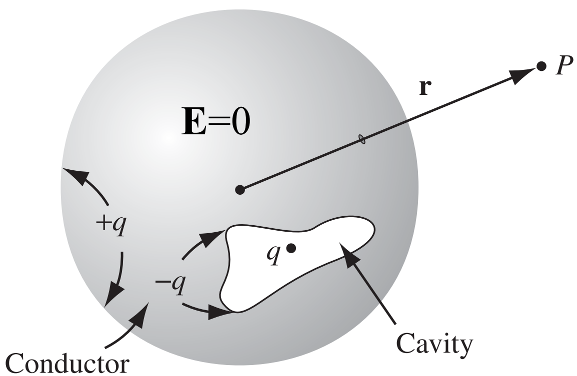


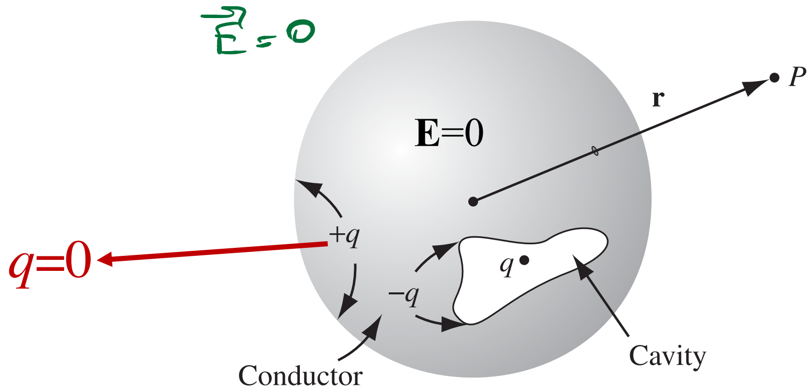
No caso da direita, sabemos que $\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Mas a região externa às duas esferas é a mesma e a condição de contorno na superfície também (cargas dadas). Portanto, a solução tem que ser a mesma: o lado de fora não "sabe" o que acontece do lado de dentro!

Exemplo 2.9

Igualmente, para dentro da cavidade, podemos tomar uma esfera com carga total $-q$. Nesse caso, $\mathbf{E}=0$ em qualquer ponto fora da cavidade:





A região <u>dentro</u> da cavidade é a mesma e a condição de contorno na superfície também (cargas dadas). Portanto, a solução tem que ser <u>a mesma</u>: o lado de dentro não "sabe" o que acontece do lado de fora!