1. (3 pts.) Considere a dinâmica quântica unidimensional (eixo x) de uma partícula de massa m sob a ação do potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0, \\ -V_0 & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{se } x > a, \end{cases}$$

onde $V_0 > 0$. A parte espacial da função de onda de um certo **estado ligado** de energia $E < 0$ é ($A, B \in \mathbb{C}$)

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A \sin kx & \text{se } 0 < x < a, \\ Be^{-\rho x} & \text{se } x > a. \end{cases}$$

(a) Encontre k e ρ em termos dos dados do problema.
(b) Encontre a equação que k e ρ devem satisfazer. Essa equação leva aos possíveis valores de energias discretas do sistema, mas **não precisa resolver a equação**. Atenção: a equação procurada não depende de A e B.
(c) Qual é a probabilidade da partícula ser encontrada na região $x > a$? Deixe sua resposta em termos A, B, k e ρ.

a) $k = \dfrac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$

$\rho = \dfrac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$

b) $\psi(x=a^+) = \psi(x=a^-)$ E $\psi'(x=a^+) = \psi'(x=a^-)$

$A \sin ka = B e^{-\rho a}$ (1)

$Ak \cos ka = -\rho B e^{-\rho a}$ (2)

DIVIDINDO (1) POR (2): $\dfrac{\tan ka}{k} = -\dfrac{1}{\rho}$

$\Rightarrow \tan ka = -k/\rho$

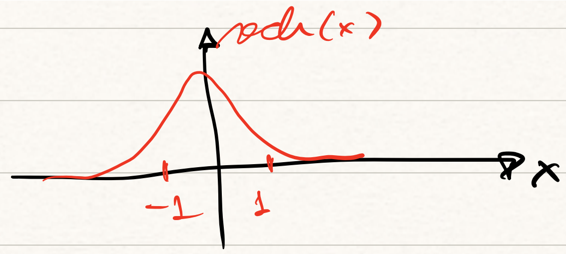
c) $P(a) = \int_a^\infty |\psi_E(x)|^2 dx = |B|^2 \int_a^\infty e^{-2\rho x} dx = \dfrac{|B|^2}{2\rho} e^{-2\rho a}$

2. (1 pt.) A função de onda normalizada de uma partícula em uma dimensão e sua transformada de Fourier são, respectivamente,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\operatorname{sech}\left(\frac{x}{a}\right),$$
$$\overline{\psi}(p) = \sqrt{\frac{\pi a}{4\hbar}}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi a}{2\hbar}p\right).$$

Levando em conta que sech$x$ é uma função estritamente positiva, que só assume valores significativos na região em torno da origem, estime Δx, Δp e o produto $\Delta x \Delta p$.

$$\operatorname{sech}(x) > 0$$
$$= \frac{1}{\cosh(x)}$$



$\Delta x \cong 2a, a$

$\Delta p = \frac{4\hbar}{\pi a}$

$\Delta x \Delta p = \frac{8\hbar}{\pi} \simeq 2\hbar$

$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

3. (4 pts.) O espaço de estados de um sistema físico tem dimensão 2 e uma base ortonormal desse espaço é dada pelo conjunto $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Considere os seguintes operadores

$$
\begin{aligned}
A &= 2\,|1\rangle\langle 1| + 2\,|2\rangle\langle 2| - i\,|1\rangle\langle 2| + i\,|2\rangle\langle 1|\,, \\
B &= |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\,, \\
C &= |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\,.
\end{aligned}
$$

Nos itens abaixo, você pode, se achar conveniente, usar a representação matricial.

(a) Quais operadores entre eles são hermitianos? Justifique.
(b) Quais operadores entre eles são projetores? Justifique.
(c) Encontre os auto-valores e auto-vetores (normalizados) de A.

$D = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$

$D^{\dagger} = D$

$D^2 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \neq D$

4. (2 pts.) O espaço de estados de um sistema físico tem dimensão 3 e uma base ortonormal desse espaço é dada pelo conjunto $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Considere os operadores lineares representados nessa base (na ordem acima) pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Identifique um Conjunto Completo de Observáveis que Comutam (CCOC) com um elemento e outro com dois elementos. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 3 DO COHEN

$$\psi(x,0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx} \quad (1)$$

a) $P(p_1,0)$ DE MEDIR $p \in [-p_1, p_1]$

$$P(p_1,0) = \int_{-p_1}^{+p_1} dp\, |\bar{\psi}(p)|^2$$

$$\bar{\psi}(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)$$

$$\psi(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ipx/\hbar}\, \bar{\psi}(p)$$

$$(1): \psi(x,0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx}$$

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

$$\psi(x,0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\hbar}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{ipx/\hbar}$$

$$= \frac{N}{\sqrt{\hbar}} \sqrt{2\pi} \int dp/\sqrt{2\pi\hbar}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{ipx/\hbar}$$

$$\Psi(p) = e^{-|p|/\hbar k_0} \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}}\, N}_{N'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(p)|^2 dp = 1 = |N'|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|p|/\hbar k_0}\, dp$$

$$P(p_1) = \int_{-p_1}^{p_1} |\Psi(p)|^2 dp$$