F 689 – Mecânica Quântica I

2º Semestre de 2022

19/10/2022

Aula 16

Aula passada

Sistemas conservativos: H não depende do tempo

$$\boxed{i\hbar \frac{d\left|\psi\left(t\right)\right\rangle}{dt} = H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle}$$

Solução geral da Equação de Schrödinger na base de auto-estados de H:

$$H\left|\varphi_{n\tau}\right\rangle = E_n\left|\varphi_{n\tau}\right\rangle, \ \left(\tau = 1, 2, \ldots, g_n\right)$$

$$\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle = \sum_{n,\tau} c_{n\tau}\left(t_0\right)\left|\varphi_{n\tau}\right\rangle \Rightarrow \left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \sum_{n,\tau} c_{n\tau}\left(t_0\right) e^{-iE_n\left(t-t_0\right)/\hbar}\left|\varphi_{n\tau}\right\rangle, \ \left(t \neq t_0\right)$$

Aula passada

Constantes do movimento: observáveis que satisfazem

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= 0\\ [A,H] &= 0\end{aligned}}$$

Nesse caso, para qualquer estado $|\psi(t)\rangle$:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = 0,$$
$$\frac{dP(a_p)}{dt} = 0.$$

No caso contrário, se $[B,H] \neq 0$, então, para um estado genérico $|\psi(t)\rangle$:

$$\langle B\rangle(t) = \sum_{n,n',\tau,\tau'} B_{n\tau n'\tau'} e^{-2\pi i \nu_{nn'}(t-t_0)}$$

$$\nu_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} \quad \text{(frequências de Bohr)}$$

$$B_{n\tau n'\tau'} = B_{n\tau n'\tau'}\left[|\psi(t_0)\rangle\right]$$

Aula passada

Princípio de incerteza tempo-energia: não tem a mesma estrutura que aqueles entre X e P_x, etc., porque o tempo não é um observável em mec. quântica. Porém:

$$\Delta t \Delta E \gtrsim \hbar$$

se ΔE é o desvio quadrático médio do Hamiltoniano e Δt é o tempo necessário para haver uma mudança significativa nas propriedades do sistema, como por exemplo, no valor esperado de uma quantidade não conservada. Podemos obter uma formulação precisa desse princípio de incerteza se definirmos:

$$[H, B] \neq 0 \qquad \Delta t \equiv \frac{\Delta B(t)}{\left|\frac{d\langle B\rangle}{dt}\right|}$$

então:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Diferença entre superposição linear e mistura estatística

TOME UM OBSERVÁVEL A: $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

ESPECTRO DISCRETO E NÃO-DEGENERADO.

TOME DOIS ESTADOS ORTONORMALIZADOS DO SISTEMA:

$|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$

SE O SISTEMA ESTIVER NO ESTADO $|\psi_1\rangle$, A PROBABILIDADE DE SE OBTER O RESULTADO $\underline{a_n}$:

$$P_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2$$

ANALOGAMENTE, SE ELE ESTIVER EM $|\psi_2\rangle$, TEREMOS:

$$P_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

CONSIDERE QUE O SISTEMA ESTEJA NUMA SUPERPOSIÇÃO LINEAR: $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$ $\quad |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$

$$P_\psi(a_n) = |\langle u_n|\left(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle\right)|^2$$

$$= |\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

$$= |\lambda_1|^2\,|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2\,|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}[\lambda_1^*\langle u_n|\psi_1\rangle^*\lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

$= |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) +$ TERMOS DE INTERFER.

MISTURA ESTATÍSTICA: <u>ENSEMBLE</u>: COLEÇÃO DE <u>N</u> SISTEMAS, CADA UM PREPARADO NUM ESTADO DIFE-RENTE:

$|\lambda_1|^2 N = N_1$ DOS SISTEMAS ESTÃO NO ESTADO $|\psi_1\rangle$

$|\lambda_2|^2 N = N_2$ " " " " " $|\psi_2\rangle$

$N_1 + N_2 = N$

PROBABILIDADE $P_{MIST}(a_n)$ DE SE MEDIR a_n NESSE ENSEMBLE:

$$P_{MIST}(a_n) = |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) \neq P_\psi(a_n)$$

O QUE DIFERE $P_{MIST}(a_n)$ DE $P_\psi(a_n)$ SÃO OS TERMOS DE INTERFERÊNCIA.

Medidas intermediárias

CONSIDERE 3 OBSERVÁVEIS A, B E C QUE NÃO COMUTAM ENTRE SI. SEUS AUTO-VALORES E AUTO-VETORES SÃO:

$$\left.\begin{aligned} A|a_m\rangle &= a_m|a_m\rangle \\ B|b_\ell\rangle &= b_\ell|b_\ell\rangle \\ C|c_k\rangle &= c_k|c_k\rangle \end{aligned}\right\}$$

TODOS NÃO-DEGENERADOS E ORTONORMALIZADOS.

SUPOSIÇÃO GERAL: O SISTEMA ESTÁ PREPARADO INICIALMENTE NO AUTO-ESTADO DE A $|a_m\rangle$

CONSIDERAMOS 2 PROTOCOLOS:

1) MEDE-SE C: A PROBABILIDADE DE SE OBTER c_k É

$$\boxed{P_m^{(1)}(c_k) = |\langle c_k|a_m\rangle|^2}$$

2) MEDE-SE PRIMEIRO $\underline{B}$ E, LOGO APÓS, $\underline{C}$: A PROBABILIDADE DE SE OBTER $\underline{b_\ell}$ E DEPOIS $\underline{c_k}$ É:

$$P_n^{(2)}(b_\ell, c_k) = |\langle b_\ell | a_n \rangle|^2 \, P(c_k | b_\ell)$$

$$P(c_k | b_\ell) = |\langle c_k | \psi' \rangle|^2$$ ONDE $|\psi'\rangle$ É O ESTADO APÓS OBTERMOS b_ℓ NA 1ª MEDIDA. PELO POSTULADO

5: $|\psi'\rangle = K \, P_{|b_\ell\rangle} |a_n\rangle = K \, |b_\ell\rangle\langle b_\ell | a_n\rangle = |b_\ell\rangle$

$$P(c_k | b_\ell) = |\langle c_k | b_\ell \rangle|^2$$

$$\boxed{P_n^{(2)}(b_\ell, c_k) = |\langle b_\ell | a_n \rangle|^2 \, |\langle c_k | b_\ell \rangle|^2}$$

MAS, USANDO O FECHAMENTO DE $\underline{B}$: $\mathbb{1} = \sum_\ell |b_\ell\rangle\langle b_\ell|$

$$\langle c_k | a_n \rangle = \sum_\ell \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_n \rangle$$

$$P_m^{(1)}(c_k) = \left| \sum_{\ell} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_m \rangle \right|^2$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_m \rangle \langle c_k | b_{\ell'} \rangle^* \langle b_{\ell'} | a_m \rangle^*$$

$$= \sum_{\ell} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_m \rangle \langle c_k | b_\ell \rangle^* \langle b_\ell | a_m \rangle^*$$

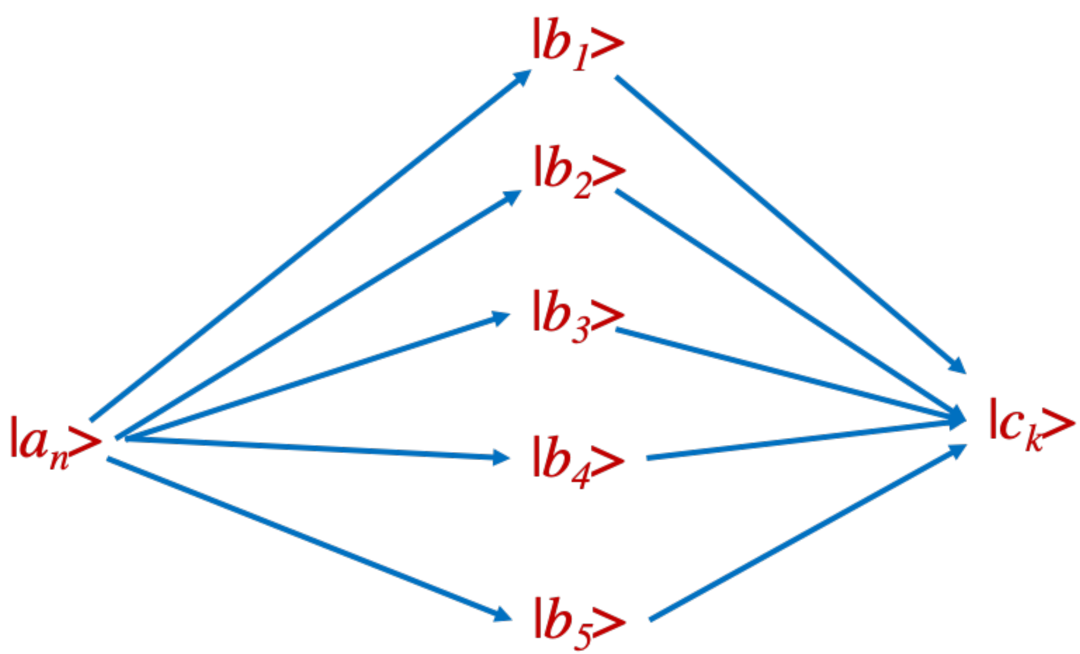
$$+ \sum_{\substack{\ell, \ell' \\ \ell \neq \ell'}} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_m \rangle \langle c_k | b_{\ell'} \rangle^* \langle b_{\ell'} | a_m \rangle^*$$

$$= \sum_{\ell} |\langle c_k | b_\ell \rangle|^2 |\langle b_\ell | a_m \rangle|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{\ell, \ell' \\ \ell \neq \ell'}} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_m \rangle \langle c_k | b_{\ell'} \rangle^* \langle b_{\ell'} | a_m \rangle^*$$

$$= \sum_{\ell} P_m^{(2)}(b_\ell, c_k) + \text{TERMOS DE INTERFERÊNCIA}$$

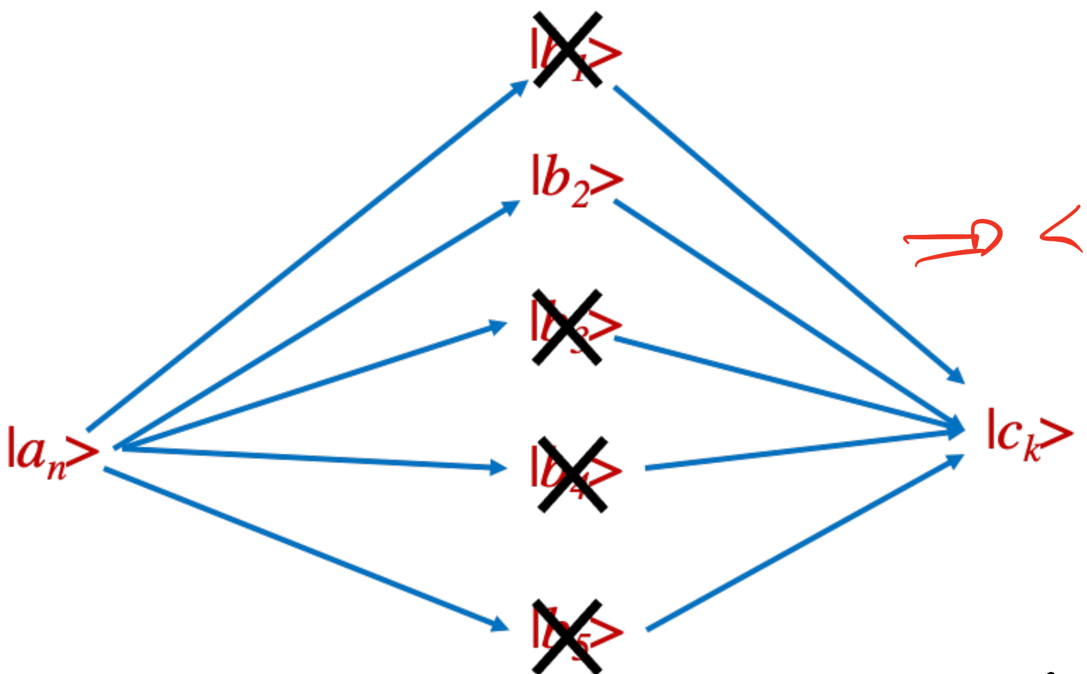
$\langle c_k | a_n \rangle = \sum_{\ell} \langle c_k | b_\ell \rangle \langle b_\ell | a_n \rangle$ = AMPLITUDE DE PROBABILIDADE



AO TOMARMOS: $P_n^{(1)} = |\langle c_k | a_n \rangle|^2 =$ APARECEM OS TERMOS DE INTERFERÊNCIA, EM TOTAL ANALOGIA COM OS EXPERIMENTOS DE VÁRIAS FENDAS.

$$\boxed{P_n^{(2)}(b_\ell, c_k) = |\langle b_\ell | a_n \rangle|^2 \, |\langle c_k | b_\ell \rangle|^2}$$

SUPONDO QUE O RESULTADO DA MEDIDA DE $\underline{B}$ TENHA DADO b_2:



$\Rightarrow \langle b_2 | a_n \rangle \langle c_k | b_2 \rangle$

O 2º PROTOCOLO (MEDIDA INTERMEDIÁRIA DE B) É EQUIVALENTE A "FECHAR" TODAS AS FENDAS MENOS UMA, MATANDO ASSIM O PADRÃO DE INTERFERÊNCIA.

Colapso da função de onda para medidas de observáveis com espectro contínuo

POSTULADO 5 PARA ESPECTRO CONTÍNUO:

$$A|\vartheta_\alpha\rangle = \alpha\,|\vartheta_\alpha\rangle \qquad \alpha \in \text{INTERVALO REAL}$$

NESSE CASO, SÓ FAZ SENTIDO FALAR DE PROBABILIDADES DE SE OBTER $\underline{\alpha}$ DENTRO DE UM INTERVALO FINITO

POR EXEMPLO: $\alpha \in \left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right] = I$

$\Delta\alpha$ GERALMENTE REFLETE A RESOLUÇÃO DO APARATO MEDIDOR.

O RESULTADO DA MEDIDA É:

1) SIM, CASO $\alpha \in I$

2) NÃO, CASO $\alpha \notin I$

SE O RESULTADO FOR SIM, O ESTADO APÓS A MEDIDA É: (SUPONDO $|\psi\rangle$ ANTES DA MEDIDA)

$$|\psi'\rangle = K\, P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)\,|\psi\rangle$$ (POSTULADO 5 PARA ESPECTRO CONT.)

$P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)$ = PROJETOR NO INTERVALO I

$$= \int_{\alpha_0-\frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}} |\vartheta_\alpha\rangle\langle\vartheta_\alpha|\, d\alpha$$

PROBABILIDADE DO SIM:

$$P_S = \langle\psi|P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle$$

EXEMPLO: MEDIDA DA COORDENADA X DA POSIÇÃO PARA DETERMINAR SE $x \in [x_1, x_2] \equiv I$, EM 3D

$$P_I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \underbrace{|x,y,z\rangle\langle x,y,z|}_{|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|}$$

$X|x,y,z\rangle = x|x,y,z\rangle$

$Y|x,y,z\rangle = y|x,y,z\rangle$

$Z|x,y,z\rangle = z|x,y,z\rangle$

$$P_S(I) = \langle \psi | P_I | \psi \rangle = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \underbrace{\langle \psi | x, y, z \rangle}_{\psi^*(x,y,z)} \underbrace{\langle x, y, z | \psi \rangle}_{\psi(x,y,z)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, |\psi(x,y,z)|^2$$

CASO SE OBTENHA SIM, O ESTADO APÓS A MEDIDA É:

$$|\psi'\rangle = K P_I |\psi\rangle = K \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \, |x', y', z'\rangle \langle x', y', z' | \psi \rangle$$

A FUNÇÃO DE ONDA CORRESPONDENTE É:

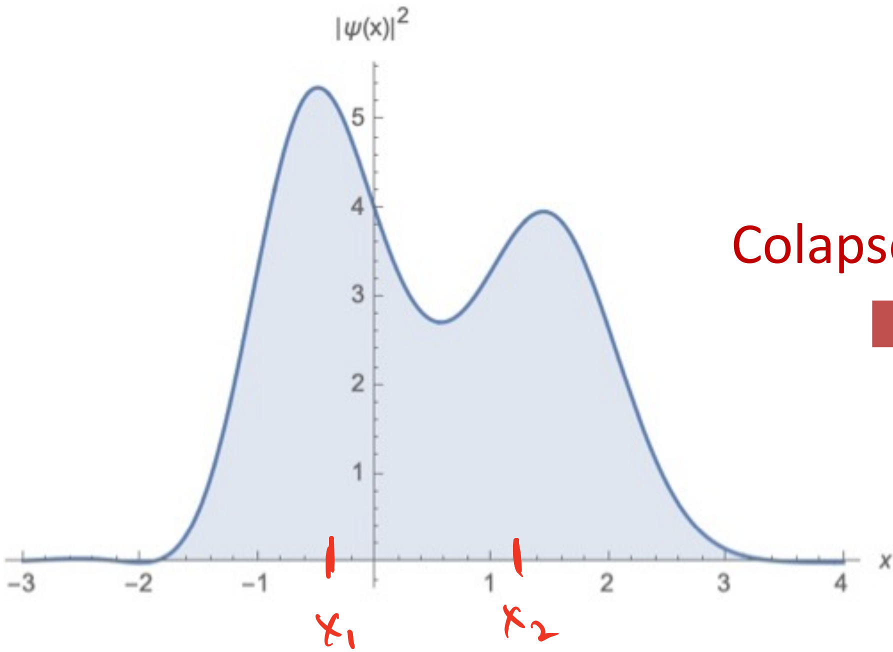
$$\langle x, y, z | \psi' \rangle = \psi'(x,y,z) = K \iiint \underbrace{\langle x, y, z | x', y', z' \rangle}_{\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')} \psi(x', y', z')$$

$$= K \int_{x_1}^{x_2} dx' \, \delta(x-x') \, \psi(x', y, z) =$$

$$\psi'(x,y,z) = K \int_{x_1}^{x_2} dx' \, \delta(x-x') \, \psi(x',y,z)$$

$$= \begin{cases} \text{SE } x \in [x_1, x_2]: \; = K \, \psi(x,y,z) \\ \\ \text{SE } x \notin [x_1, x_2]: \; = 0 \end{cases}$$

Medida da posição com seletividade só para o intervalo $[x_1, x_2]$:



Colapso após a medida