

# F 689 – Mecânica Quântica I

2<sup>o</sup> Semestre de 2022

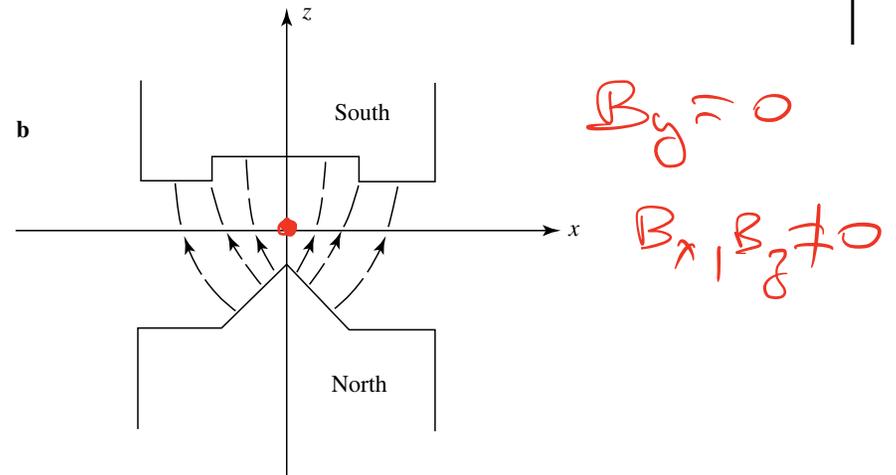
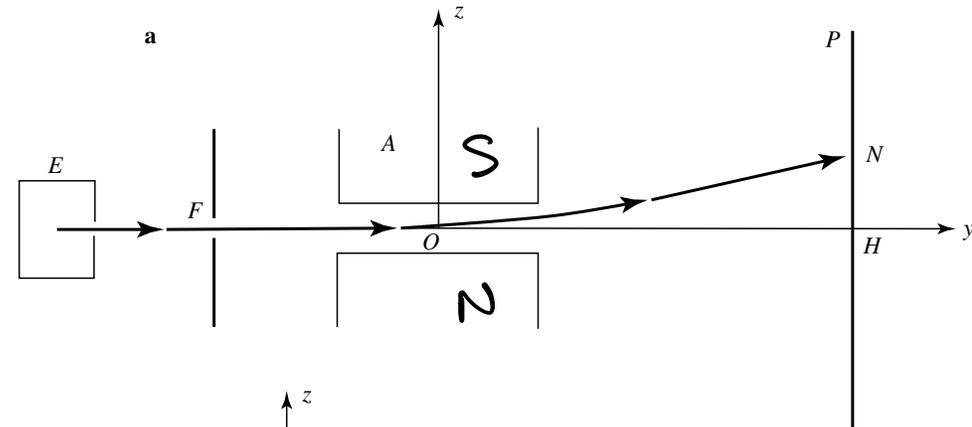
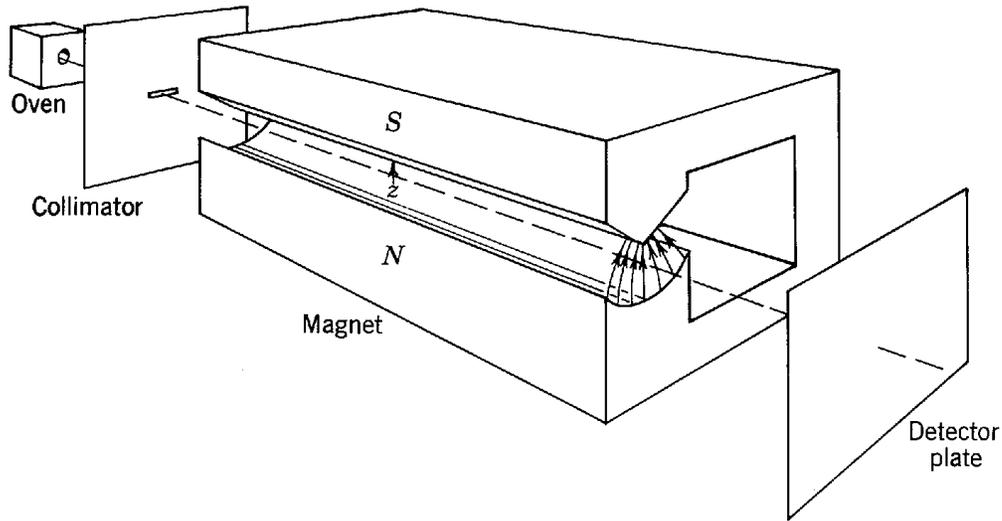
24/10/2022

Aula 17

Aplicações dos postulados a casos  
simples: partícula de spin  $\frac{1}{2}$  e  
sistemas de dois níveis

# O experimento de Stern-Gerlach

Otto Stern e Walther Gerlach (1921-22)



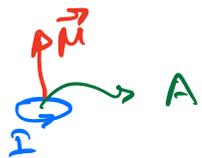
# O experimento de Stern-Gerlach

OS ÁTOMOS DE PRATA SÃO NEUTROS: CARGA NULA

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

OS ÁTOMOS DE PRATA TÊM MOMENTO MAGNÉTICO NÃO

NULO:  $\vec{M}$



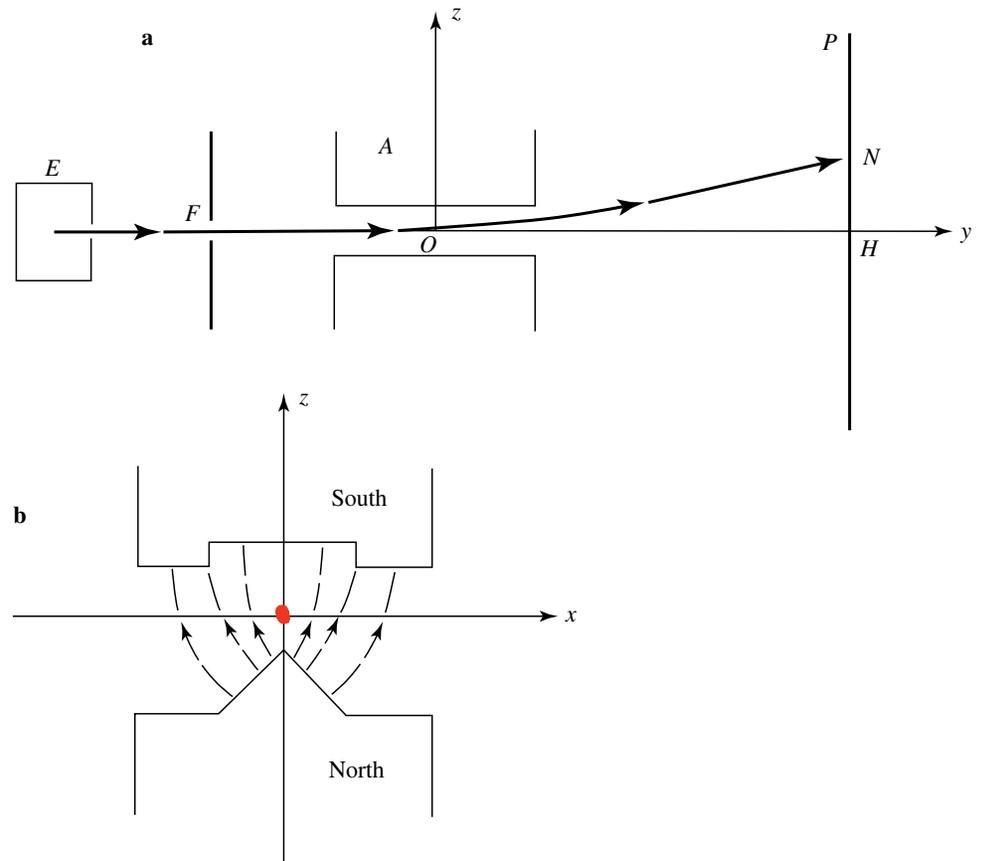
$$|\vec{M}| = IA$$

NESSE CASO, O MOMENTO MAGNÉTICO, ESTÁ ASSOCIADO

À ROTAÇÃO DAS CARGAS:

$$\vec{M} = \gamma \vec{L}$$

$\gamma$ : FATOR GIROMAGNÉTICO



# Descrição clássica

UM MOMENTO MAGNÉTICO  $\vec{M}$  SUJEITO A UM CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{B}$   
SOFRE: UMA FORÇA E UM TORQUE

TORQUE:  $\vec{N} = \vec{M} \times \vec{B}$

FORÇA:  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B})$

} PARA CAMPOS UNIFORMES, HÁ  $\vec{N}$  MAS NÃO HÁ  $\vec{F}$ .

LEMBRANDO:  $\vec{M} = \gamma \vec{L}$

EFEITO DO TORQUE:  $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \times \vec{B} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$  PRECESSÃO DE LARMOR

TOMANDO  $\vec{L} \cdot ( )$ :  $\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(|\vec{L}|^2)}{dt} = \gamma \vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = 0$

$\Rightarrow$  MÓDULO DE  $\vec{L}$  É CONSTANTE

# A precessão de Larmor

$$\text{SE } \vec{B} = B_z \hat{z} \Rightarrow \vec{L} \times \vec{B} = B_z (\vec{L} \times \hat{z}) = B_z (-L_x \hat{y} + L_y \hat{x})$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \gamma (\vec{L} \times \vec{B})_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{CONST.}$$

RESOLVENDO PARA  $L_x, L_y$ :

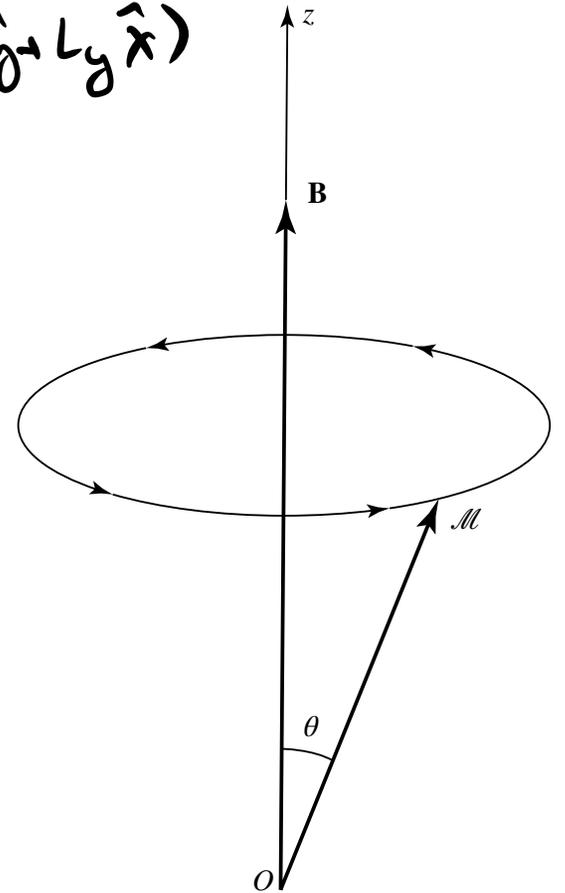
$$\left. \begin{aligned} L_x &= L_{\perp} \sin(\omega_0 t) \\ L_y &= L_{\perp} \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \omega_0 = \gamma B_z$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_{\perp}^2 + L_z^2}$$

$$\Delta y = 1 \text{ m} \quad B_z = 1 \text{ T}$$

$T = 400 \text{ K} \Rightarrow \theta$  MÉDIA DAS PARTÍCULAS  
 $\Rightarrow \Delta t$

$$\omega_0 \Delta t \approx 10^9$$



# A força sobre a partícula

COMO A PRECESSÃO É MUITO RÁPIDA, PODEMOS

TOMAR :

$$\vec{L} \approx \overline{\vec{L}} = L_z \hat{z}$$

↓  
MÉDIA TEMPORAL

FORÇA SOBRE OS ÁTOMOS:  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \gamma \vec{L} \cdot \vec{B} \approx \gamma B_z L_z \Rightarrow \vec{F} = \gamma \vec{\nabla}(B_z L_z) \approx \gamma L_z \vec{\nabla} B_z$$

MAS:  $\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$ . NA REGIÃO DA ORIGEM  $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$  (POR SIMETRIA)

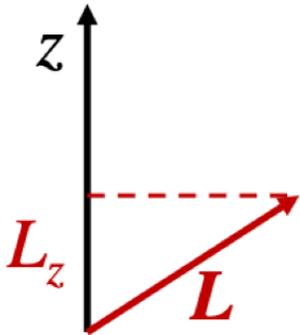
FINALMENTE:  $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$

$$\Rightarrow F_z = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} L_z = K L_z$$

FORÇA SOBRE O ÁTOMO  
É  $\propto L_z$

CLASSICAMENTE, SE OS ÁTOMOS TODOS TÊM MOMENTO ANGULAR  $\vec{L}$ , A COMPONENTE  $L_z$  PODE ASSUMIR VALORES NO INTERVALO:

$$L_z \in [-|\vec{L}|, +|\vec{L}|]$$



HÁ UM CONTÍNUO DE VALORES DE  $L_z$  E PORTANTO DA FORÇA

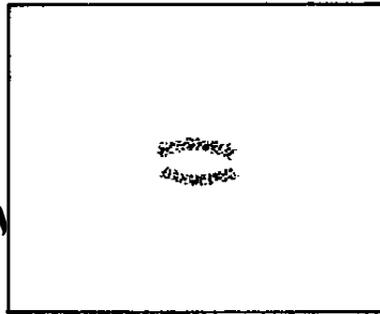
$$F_z$$

$$F_z \in [-k|\vec{L}|, +k|\vec{L}|]$$

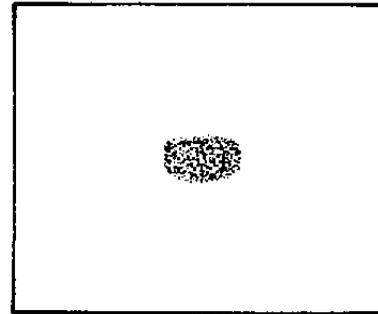
E, PORTANTO, UM CONTÍNUO DE DEFLEXÕES DO FEIXE (EXPECTATIVA CLÁSSICA)

# Expectativa clássica x observações

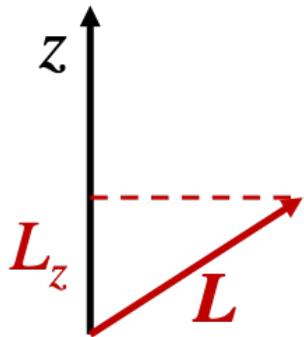
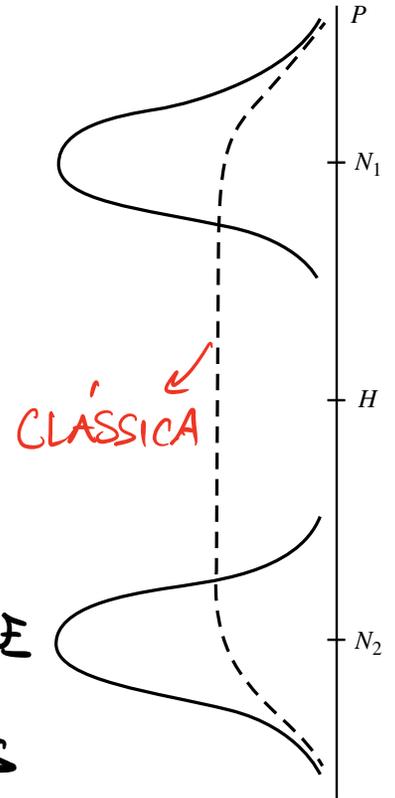
O EXPERIMENTO  
NÃO CONFIRMA A  
EXPECTATIVA CLÁSSICA



Observed



Classically predicted



AO INVÉS DE UM CONTÍNUO  
DE DEFLEXÕES, OBSERVAM-SE  
DUAS DEFLEXÕES APENAS

ISSO SUGERE A QUANTIZAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR!

OS VALORES OBSERVADOS SÃO COMPATÍVEIS COM:

$$L_z = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{OU} \quad -\frac{\hbar}{2}$$

# Configuração eletrônica do átomo de prata



$[\text{Kr}]$  E A CAMADA  $4d^{10}$  SÃO CAMADAS COMPLETAS  
COM  $\vec{L}_{\text{TOTAL}} = 0$

$5s^1$ : 1  $e^-$  NA CAMADA  $5s$ :  $S \Rightarrow L = 0$

MOMENTO ANGULAR DE SPIN:  $S = \frac{1}{2}$

# O espaço de estados e os observáveis $S_x$ , $S_y$ , e $S_z$

VAMOS, A PARTIR DE AGORA, :  $L_x \rightarrow S_x, L_y \rightarrow S_y, L_z \rightarrow S_z$   
É RAZOÁVEL ASSUMIR QUE  $S_z$  TENHA OS SEGUINTESS  
AUTO-VALORES E AUTO-VETORES:

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \quad \text{E} \quad S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

$$\langle + | - \rangle = 0 \quad \langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$$

$S_z$  SOB INHO FORMA UM CCOC NESSE ESPAÇO BIDIMENSIONAL

$$|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| = \mathbb{1}$$

NESSA BASE:

$$S_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} = S_z^+$$

o ESTADO MAIS GERAL NESSE ESPAÇO:

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

AS OUTRAS COMPONENTES CARTESIANAS DO SPIN:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_x = S_x^\dagger; \quad S_y = S_y^\dagger$$

NA MESMA BASE:  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

NOTE QUE:  $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ : MATRIZES DE PAULI

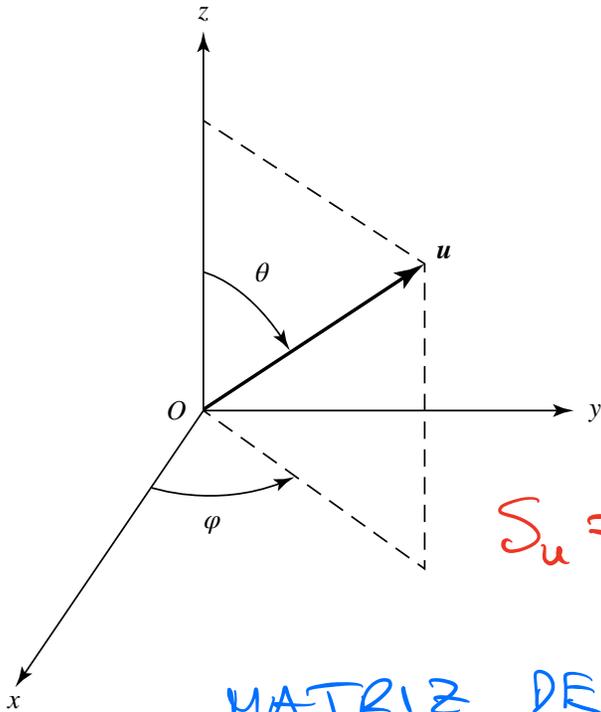
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) SÃO TODAS HERMITIANAS

(ii) NÃO COMUTAM ENTRE SI.

# Componente arbitrária de $\mathbf{S}$

DADO UM UNITÁRIO  $\hat{u}$  CARACTERIZADO POR ÂNGULOS ESFÉRICOS COMO NA FIGURA:



$$\hat{u} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

$$S_u = \vec{S} \cdot \hat{u} = (S_x \sin\theta \cos\phi, S_y \sin\theta \sin\phi, S_z \cos\theta)$$

MATRIZ DE  $\vec{S} \cdot \hat{u}$  (NA BASE  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ )  $\mathbb{H}$ :

$$\vec{S} \cdot \hat{u} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = 0 ; S_z$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} ; \phi = 0 : S_x$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} : S_y$$

# Auto-vetores e auto-valores de componentes de **S**

POR INVARIÂNCIA DOS RESULTADOS SOB UMA ROTAÇÃO ARBITRÁRIA DO APARATO DE S-G:

AUTO-VALORES DE  $S_x, S_y, S_z$  SÃO TAMBÉM:  $\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$

FICA COMO EXERCÍCIO PROVAR ISSO A PARTIR DAS MATRIZES.

OS AUTO-VETORES SÃO:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle \pm |-\rangle ]$$

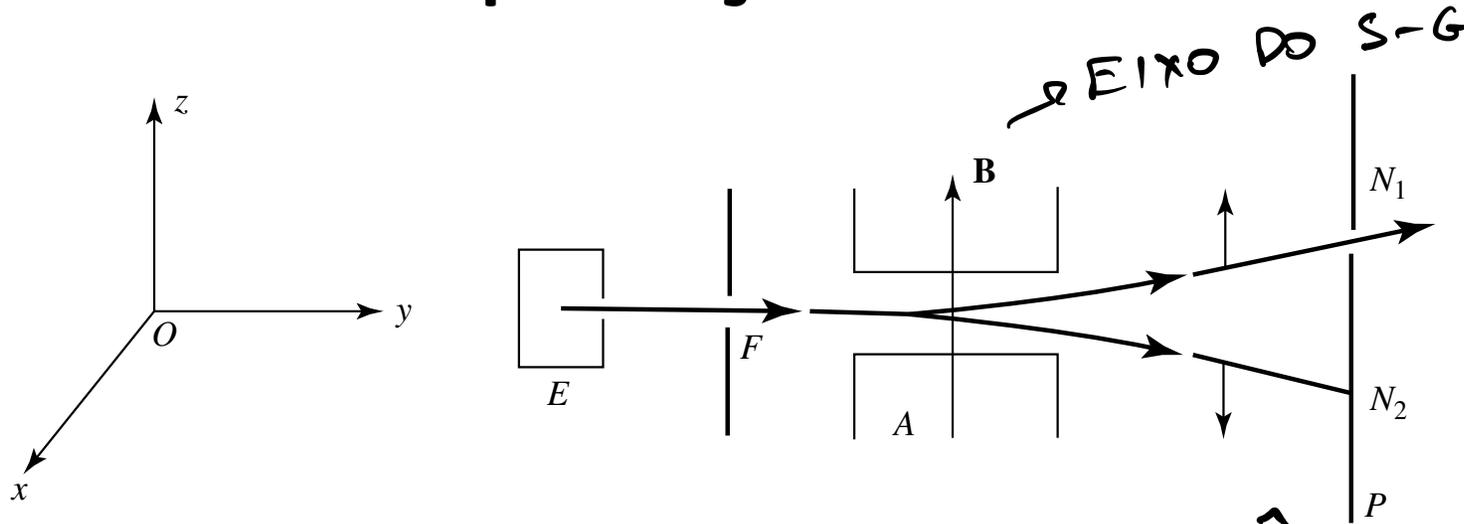
$$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle \pm i |-\rangle ]$$

$$|+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle$$

$$|-\rangle_u = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle$$

$$|\pm\rangle_z = |\pm\rangle$$

# Preparação de estados



SUPONHA QUE O EIXO DO S-G SEJA  $\hat{z}$ :

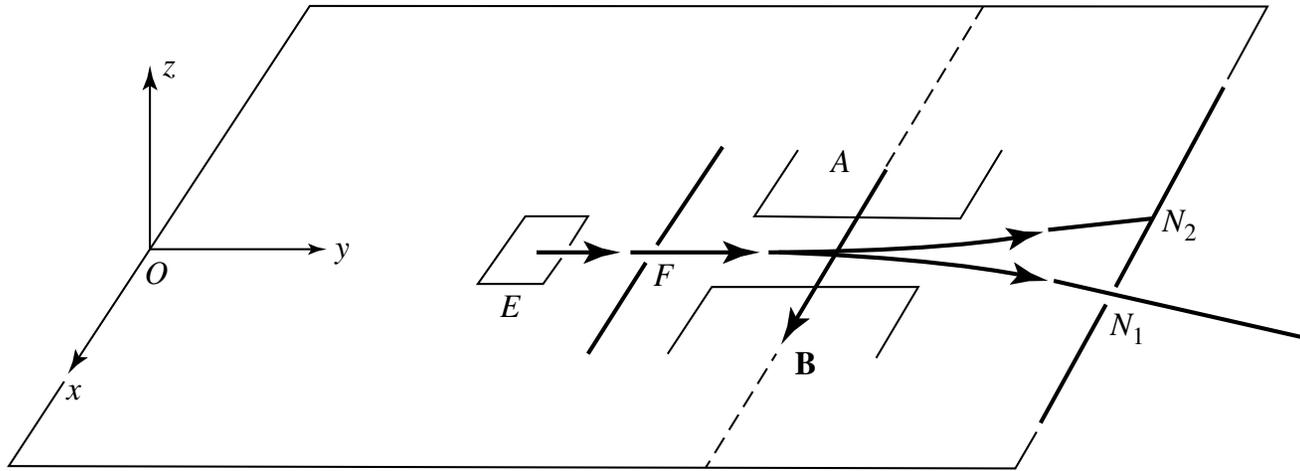
$$F_z = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} L_z = k L_z \quad k > 0$$

O FEIXE DEFLETIDO PARA CIMA TEM ÁTOMOS COM

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \quad \text{E O DEFLETIDO PARA BAIXO TEM } S_z = -\frac{\hbar}{2}$$

SE HÁ UMA FENDA  $N_1$ , TODOS OS ÁTOMOS QUE PASSAM POR ELA ESTÃO PREPARADOS NO ESTADO  $|\uparrow\rangle$

$$N_2 \rightarrow |\downarrow\rangle$$



EIXO NA DIREÇÃO  $\hat{x}$ .

$$N_1 \rightarrow |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle]$$

$$N_2 \rightarrow |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle]$$

GIRANDO PARA EIXOS GÊNERICOS POSSO PREPARAR:

$$N_1 \rightarrow |+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle$$

$$N_2 \rightarrow |-\rangle_u = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle$$