F 689 – Mecânica Quântica I

2º Semestre de 2022
19/09/2022
Aula 9

Aula passada

Mudança de base/representação: dadas duas bases $\{|u_i\rangle\}, \{|t_i\rangle\}$ definimos a matriz unitária:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{ij} &= \langle u_i|t_j\rangle \\ S^\dagger &= S^{-1} \end{aligned}}$$

Então, se as componentes de um ket nas duas bases são:
$$c_i = \langle u_i|\psi\rangle$$
$$d_i = \langle t_i|\psi\rangle$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^\dagger_{11} & S^\dagger_{12} & S^\dagger_{13} & \cdots \\ S^\dagger_{21} & S^\dagger_{22} & S^\dagger_{23} & \cdots \\ S^\dagger_{31} & S^\dagger_{32} & S^\dagger_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Aula passada

Para a transformação das componentes de um operador de uma base pra outra:

$$A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$$
$$A'_{ij} = \langle t_i | A | t_j \rangle$$

$$A'_{kl} = \sum_{ij} S^\dagger_{ki} A_{ij} S_{jl}$$

$$A_{ij} = \sum_{kl} S_{ik} A'_{kl} S^\dagger_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & \cdots \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} & \cdots \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^\dagger_{11} & S^\dagger_{12} & S^\dagger_{13} & \cdots \\ S^\dagger_{21} & S^\dagger_{22} & S^\dagger_{23} & \cdots \\ S^\dagger_{31} & S^\dagger_{32} & S^\dagger_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & \cdots \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} & \cdots \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^\dagger_{11} & S^\dagger_{12} & S^\dagger_{13} & \cdots \\ S^\dagger_{21} & S^\dagger_{22} & S^\dagger_{23} & \cdots \\ S^\dagger_{31} & S^\dagger_{32} & S^\dagger_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Aula passada

Auto-valores e auto-vetores de um operador:

$$A\left|\psi_n^i\right\rangle = \lambda_n \left|\psi_n^i\right\rangle, \; (i = 1, 2, \ldots, g_n)$$

g_n: (grau de) degenerescência do auto-valor λ_n

Os g_n auto-vetores $\left|\psi_n^i\right\rangle$ geram um auto-sub-espaço de dimensão g_n.

Aula passada

O espectro de operadores Hermitianos tem propriedades importantes:

a) Todos os auto-valores são reais.

b) Auto-vetores com auto-valores diferentes são ortogonais entre si.

c) Teorema espectral: Se o espaço é N-dimensional, existem N auto-vetores linearmente independentes, que geram o espaço todo (ou seja, são uma base do espaço).

d) Se um auto-valor λ_n tem degenerescência g_n, então existem g_n auto-vetores ortogonais entre si com esse mesmo auto-valor λ_n.

$$\left|\psi_n^i\right\rangle \qquad (i = 1, 2, \ldots, g_n)$$

$$\left\langle\psi_n^i|\psi_n^j\right\rangle = \delta_{ij}$$

Aula passada

Se o espaço é de dimensão infinita, a letra (c) não é sempre válida. Porém, existem operadores Hermitianos cujos auto-vetores geram todo o espaço (são uma base). Alguns dos auto-vetores podem formar uma parte contínua da base. Esses operadores serão chamados de observáveis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle \langle\psi_n^i| = \mathbb{1}$$

$$\sum_{n=1} \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle \langle\psi_n^i| + \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\nu| = \mathbb{1}$$

Teoremas sobre operadores Hermitianos que comutam

Teorema 1: Se $[A, B] = 0$ e $A\,|\psi\rangle = a_1\,|\psi\rangle$, então, $B\,|\psi\rangle$ também é auto-vetor de A com o mesmo auto-valor a_1.

$$A\left[B|\psi\rangle\right] = AB|\psi\rangle = BA|\psi\rangle = a_1\left[B|\psi\rangle\right]$$

$\Rightarrow B|\psi\rangle$ É AUTO-VETOR DE $\underline{A}$ COM AUTO-VALOR a_1 ✓

HÁ DUAS POSSIBILIDADES:

a) a_1 É NÃO DEGENERADO $\Rightarrow B|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ É AUTO-VETOR DE $\underline{B}$.

b) a_1 É g_1-DEGENERADO.

$B|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{g_1} c_i|\psi^i\rangle \Rightarrow \{|\psi^i\rangle,\ i=1,\dots,g_1\}$ AUTO-SUB-ESPAÇO DE A COM AUTO-VALOR a_1: $\mathcal{E}_1$

$\mathcal{S}_{-1}$: É ESTÁVEL OU GLOBALMENTE INVARIANTE A $\underline{B}$

Se a_1 é degenerado, então, no auto-sub-espaço de a_1: ξ_1

$$A_{a_1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad B_{a_1} = \begin{pmatrix} b^1_{11} & b^1_{12} & b^1_{13} \\ b^1_{21} & b^1_{22} & b^1_{23} \\ b^1_{31} & b^1_{32} & b^1_{33} \end{pmatrix}$$

HERMITIANO

Teorema 2: Se $[A,B]=0$ e $A\,|\psi_1\rangle = a_1\,|\psi_1\rangle$, $A\,|\psi_2\rangle = a_2\,|\psi_2\rangle$ e $a_1 \neq a_2$, então, $\langle\psi_1|\,B\,|\psi_2\rangle = 0$.

PELO TEOREMA 1, $B|\psi_2\rangle$ É AUTO-VETOR DE $\underline{A}$ COM AUTO-VALOR a_2.

PELO ITEM (b) $B|\psi_2\rangle$ É ORTOGONAL A $|\psi_1\rangle$

$$\Rightarrow \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0 = \langle\psi_2|B|\psi_1\rangle$$

É ÓBVIO TAMBÉM, POR (b), QUE: $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = 0$
$= \langle\psi_2|A|\psi_1\rangle$

Teorema 3: Se $[A, B] = 0$ então é possível construir uma base ortonormal de **auto-vetores comuns a** A **e** B.

Na base $\left\{ \left| u_n^i \right\rangle \right\}$ que diagonaliza A:

Teorema 1 $\langle u_1^{(1)} | B | u_2^{(1)} \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}^1 & b_{32}^1 & b_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11}^2 & b_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{21}^2 & b_{22}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Teorema 2

Enquanto a matriz de A é diagonal, a matriz de B é dita ter a forma bloco-diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix}} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b^1_{11} & b^1_{12} & b^1_{13} \\ b^1_{21} & b^1_{22} & b^1_{23} \\ b^1_{31} & b^1_{32} & b^1_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b^2_{11} & b^2_{12} \\ b^2_{21} & b^2_{22} \end{matrix}} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

EM CADA BLOCO (AUTO-SUB-ESPAÇO) DE $\underline{A}$, PODEMOS DIAGONALIZAR $\underline{B}$. A MATRIZ DE $\underline{B}$ É HERMITIANO

ASSIM, PARA CADA BLOCO:

$$|v_n^j\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_i^{(j)} |u_n^i\rangle \qquad j = 1, 2, \ldots g_n$$

TAL QUE: $B|v_n^j\rangle = b_j |v_n^j\rangle$ E, TAMBÉM, SÃO AUTO-VETORES DE A:

$$A\left[|v_n^j\rangle\right] = A\left[\sum_{i=1}^{g_n} c_i^{(j)} |u_n^i\rangle\right] = \sum_i c_i^{(j)} A |u_n^i\rangle$$

$$= a_n \left[\sum_i c_i^{(j)} |u_n^i\rangle\right] = a_n |v_n^j\rangle$$

NA BASE $|a_n^j\rangle$:

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix}
b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$ $\underline{A}$ E $\underline{B}$ PODEM SER DIAGONALIZADAS SIMUL-TANEAMENTE

Duas possibilidades

A)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$b_1 \neq b_2$, $b_1 \neq b_3$ $\qquad b_3 \neq b_4$

$\Rightarrow$ O PAR (a_i, b_j) IDENTIFICA UNIVOCAMENTE O AUTO-VETOR PARTICULAR DA BASE $|a_j^n\rangle$.

$\Rightarrow |a_i, b_j\rangle \Rightarrow$ $\quad A|a_i, b_j\rangle = a_i|a_i, b_j\rangle$

$B|a_i, b_j\rangle = b_j|a_i, b_j\rangle$

B)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}$$

NO CASO ACIMA: $|a_1, b_2\rangle$ NÃO IDENTIFICA UM VETOR ÚNICO: $|a_1, b_2\rangle$ PODE SER O $|\theta_1^{(2)}\rangle$ OU $|\theta_1^{(3)}\rangle$

$\Rightarrow |a_1, b_2, \alpha\rangle$ TAL QUE $\alpha = 1 \Rightarrow |\theta_1^{(2)}\rangle$

$\alpha = 2 \Rightarrow |\theta_1^{(3)}\rangle$

O RÓTULO (a_i, b_j) NÃO É SUFICIENTE PARA UNIVOCAMENTE DETERMINAR O VETOR $|\theta_i^n\rangle$ DA BASE. OUTRO(S) RÓTULO(S) É (SÃO) NECESSÁRIO(S).

NA BASE $|w_j^m\rangle$, QUE DIAGONALIZA A, B, E C:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_3 & 0 \\ 0 & c_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}$$

NESSE CASO, PROCURAMOS UM 3º OPERADOR $\underline{C}$ TAL QUE $[C, A] = [C, B] = 0$ E ACHE A BASE QUE OS DIAGONALIZA SIMULTANEAMENTE.

PODE ACONTECER, COMO NAS MATRIZES ACIMA, QUE $c_1 \neq c_2$ E, FINALMENTE, A TRIPLA (a_i, b_j, c_ℓ) IDENTIFIQUE UNIVOCAMENTE, O VETOR DA BASE $|w_j^m\rangle$

$$A|a_i, b_j, c_\ell\rangle = a_i|a_i, b_j, c_\ell\rangle \qquad C|a_i, b_j, c_\ell\rangle = c_\ell|a_i, b_j, c_\ell\rangle$$

$$B|a_i, b_j, c_\ell\rangle = b_j|a_i, b_j, c_\ell\rangle$$

Conjunto completo de observáveis que comutam (CCOC)

DADOS A, B, C, ... Z TAIS QUE TODOS COMUTEM ENTRE SI, SE OS AUTO-VALORES SIMULTÂNEOS DESSES OPERADORES IDENTIFICAM UNIVOCAMENTE CADA ELEMENTO DA BASE DE AUTO-VETORES COMUNS, ESSE CONJUNTO DE OPERADORES FORMA UM: CONJUNTO COMPLETO DE OPERADORES QUE COMUTAM (CCOC)

NESSE CASO, EXISTE UMA <u>ÚNICA</u> BASE DE AUTO-VETORES COMUNS A TODOS ELES.

Exemplos

Sejam os seguintes operadores, na base: $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

a) São Hermitianos?
b) Comutam entre si?
c) Diagonalize B e encontre a base de auto-vetores simultâneos.
d) Formam um CCOC?

a) SIM: $A = A^\dagger$ E $B = B^\dagger$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12i \\ 0 & -12i & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12i \\ 0 & -12i & 0 \end{pmatrix}$$

$=$

$[A, B] = 0$

c) $A|1\rangle = 4|1\rangle \quad B|1\rangle = 3|1\rangle \Rightarrow |\lambda_0\rangle = |1\rangle$

É AUTO-VETOR COMUM DE A E B COM AUTO-VALORES (4, 3) RESPECTIVAMENTE.

NO OUTRO BLOCO: $\begin{vmatrix} -\lambda & -3i \\ 3i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -3$

$\lambda_1: \begin{pmatrix} -3 & -3i \\ 3i & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{3}a = -i\cancel{3}b$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle + i|3\rangle\right)$

$\lambda_2: \quad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle - i|3\rangle\right)$

$\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

NA BASE

$\{|\lambda_0\rangle, |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle\}$

SIM.

$|\lambda_0\rangle = |4, 3\rangle$

$|\lambda_1\rangle = |-4, 3\rangle$

$|\lambda_2\rangle = |-4, -3\rangle$

$|a_i, b_j\rangle$

Sejam os seguintes operadores, na base: $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) São Hermitianos?
b) Comutam entre si?
c) Diagonalize A e escreva A e B na base de auto-vetores de A.
d) Formam um CCOC?

a) SIM

b) $AB = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = BA \Rightarrow [A, B] = 0$

c) $A|3\rangle = 2|3\rangle \Rightarrow \lambda_0 = 2 \Rightarrow |\lambda_0\rangle = |3\rangle$

NO OUTRO BLOCO: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

$\lambda_1 = 4$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -b \quad |\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

$\lambda_2 = 2$: $|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$

DA BASE $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\} \rightarrow \{|\lambda_0\rangle, |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle\}$

TROCA DE BASE É FEITA PELA $S_{ij} = \langle i|\lambda_j\rangle$

PELA DEFINIÇÃO S_{ij} É O i-ÉSIMO COEFICIENTE, NA BASE $|i\rangle$, DO AUTO-VETOR $|\lambda_j\rangle$

AS COLUNAS DE S_{ij} SÃO OS COEFICIENTE DE $|\lambda_j\rangle$ NA BASE $|i\rangle$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROVE QUE $S^\dagger = S^{-1}$

DO INÍCIO DA AULA:

$$(A') = (S^{+})(A)(S)$$

$$(B') = (S^{+})(B)(S)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

TROCANDO $|\lambda_0\rangle$ POR $|\lambda_1\rangle$

$$A'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

NÃO FORMAM UM CCOC.