Tranformada de Fourier de uma Lorentziana

Queremos a transformada de Fourier de uma Lorentziana

$$\overline{f}(p) = \frac{A}{p^2 + p_0^2},$$

que é definida como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\overline{f}(p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\frac{A}{p^2 + p_0^2}dp.$$

Vamos usar o método de resíduos. Para isso, escrevemos

$$\frac{1}{p^2 + p_0^2} = \frac{1}{(p + ip_0)(p - ip_0)},$$

que é uma função com pólos simples no plano complexo de p em $p = \pm ip_0$. Para $x > 0$, considere a integral no plano complexo de p sobre o caminho fechado $C_1 \cup C_2$

$$I(x) = A\int_{C_1\cup C_2} e^{ipx}\frac{1}{(p + ip_0)(p - ip_0)}dp,$$

onde C_1 é um semi-círculo de raio R e C_2 é seu diâmetro, como mostrado na figura 1 e vamos considerar o limite de $R \to \infty$. Nesse limite, pelo lema de Jordan, a integral em C_1 tende exponencialmente a zero. Assim, resta apenas a integral sobre C_2, que é justamente a integral sobre o eixo real e $I(x) = f(x)$.

Por outro lado, pode-se calcular a integral sobre o caminho fechado pelo método de resíduos

$$f(x) = I(x) = A\oint e^{ipx}\frac{1}{(p + ip_0)(p - ip_0)}dp = A(2\pi i)\,\mathrm{Res}\left[e^{ipx}\frac{1}{(p + ip_0)(p - ip_0)}\right].$$

Mas o único pólo dentro do caminho fechado é o pólo em $p = ip_0$. Logo,

$$f(x) = A(2\pi i)\,\mathrm{Res}\left[e^{i(ip_0)x}\frac{1}{(2ip_0)}\right] = \frac{\pi A}{p_0}e^{-p_0 x}\ \ (x > 0).$$

O mesmo raciocínio pode ser usado para o caso $x < 0$, só que nesse caso deve-se usar um caminho $C_1' \cup C_2$, em que C_1' é uma semi-circunferência no semi-plano inferior complexo de p. Nesse caso, obtém-se

$$f(x) = \frac{\pi A}{p_0}e^{p_0 x}\ \ (x < 0).$$

De maneira geral, podemos escrever

$$f(x) = \frac{\pi A}{p_0}e^{-p_0|x|}.$$

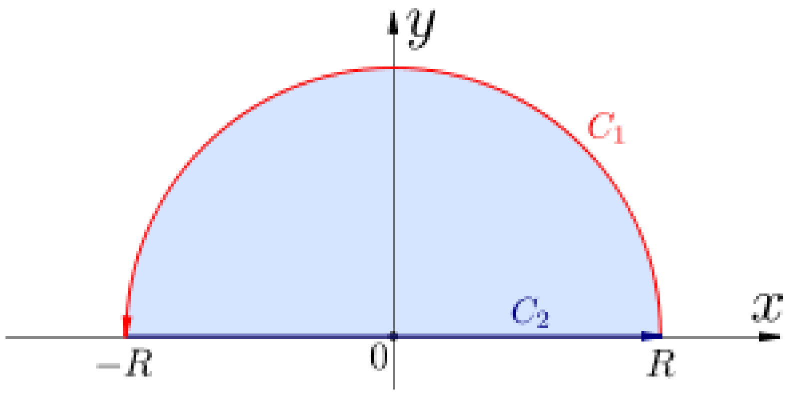

Figura 1: Caminhos C_1 e C_2.