A DUALIDA ONDA-PARTÍCULA

COMO VIMOS, TANTO A LUZ COMO A MATÉRIA APRESENTAM COMPORTAMENTO QUE, EM DETERMINADAS SITUAÇÕES, APONTA PARA UM COMPORTAMENTO ONDULATÓRIO, E EM OUTRAS PARA UM COMPORTAMENTO DE PARTÍCULAS. VAMOS TENTAR ENTENDER ESSA DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA UM POUCO MELHOR.

O EXPERIMENTO MAIS SIMPLES DE FÍSICA ONDULATÓRIA É A INTERFERÊNCIA DE LUZ POR FENDA DUPLA, ESQUEMATIZADO NA FIGURA ABAIXO: UM FEIXE MONOCROMÁTICO DE LUZ INCIDE NUM ANTEPARO COM 2 FENDAS E É DETECTADO NA PLACA E.

SE APENAS A FENDA F_1 É ABERTA, OBSERVA-SE O PADRÃO I_1 E SE APENAS F_2 É ABERTA, OBSERVA-SE I_2. ENTRETANTO, SE AS DUAS FENDAS SÃO ABERTAS SIMULTANEAMENTE, O PADRÃO OBSERVADO É I

$$I(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$$

QUE NÃO É A SOMA DE $I_1(x)$ E $I_2(x)$, POIS HÁ CLARAMENTE UM PADRÃO DE INTERFERÊNCIA. NO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO, A INTENSIDADE I É PROPORCIONAL AO QUADRADO DO CAMPO ELÉTRICO $E(x)$.
O CAMPO ELÉTRICO NA PLACA, POR OUTRO LADO, É A SOMA (VETORIAL) DAS CONTRIBUIÇÕES ADVINDAS DE CADA UMA DAS FENDAS, $E_1(x)$ E $E_2(x)$:

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

$$I(x) \propto |E(x)|^2 = |E_1(x) + E_2(x)|^2$$
$$= |E_1(x)|^2 + |E_2(x)|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\left[E_1^*(x)\,E_2(x)\right]}_{\text{TERMO DE INTERFERÊNCIA}}$$

ONDE USAMOS NOTAÇÃO COMPLEXA, POR CONVENIÊNCIA.

O CARÁTER QUÂNTICO DA LUZ SÓ É PERCEPTÍVEL EM BAIXAS INTENSIDADES QUANDO POUCOS FÓTONS SÃO EMITIDOS. O QUE ACONTECE NESSE CASO?

NESSE CASO, OS FÓTONS SÃO DETECTADOS COMO PONTINHOS NA PLACA E. SUA POSIÇÃO PARECE ALEATÓRIA E SEU CARÁTER LOCALIZADO SUGERE UMA VISÃO CORPUSCULAR DA LUZ.

ENTRETANTO, SE OBSERVARMOS POR UM LONGO TEMPO, OS PONTINHOS IRÃO SE CONCENTRAR MAIS EM ALGUMAS REGIÕES E MENOS NOUTRAS, AO FINAL FORMANDO AS FRANJAS DE INTERFERÊNCIA CLÁSSICAS. QUANDO O NÚMERO DE FÓTONS É GRANDE, RECUPERAMOS O RESULTADO CLÁSSICO.

FINALMENTE, SE TENTARMOS DETERMINAR DE ALGUMA MANEIRA POR QUAL FENDA O FÓTON PASSOU, DESCOBRINDO ASSIM QUAL FOI A TRAJETÓRIA DO FÓTON, O PADRÃO DE INTERFERÊNCIA É DESTRUÍDO.

ALGUNS ASPECTOS DESSE EXPERIMENTO JÁ ILUSTRAM ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DA DESCRIÇÃO QUÂNTICA, QUE VEREMOS COM DETALHES NO CURSO:

a) A COMPLEMENTARIDADE ONDA-PARTÍCULA

b) A AUSÊNCIA DE TRAJETÓRIA DAS PARTÍCULAS NA MECÂNICA QUÂNTICA

c) O CARÁTER PROBABILÍSTICO DA DESCRIÇÃO QUÂNTICA

d) O FATO DE QUE PROCESSOS DE MEDIDA OU DETECÇÃO PERTURBAM INEVITAVELMENTE E FUNDAMENTALMENTE UM SISTEMA.

EMBORA TENHAMOS UTILIZADO A LUZ PARA EXEMPLIFICAR O EXPERIMENTO DE DUPLA FENDA, ELE PODE SER REALIZADO COM A MATÉRIA TAMBÉM, MOSTRANDO O SEU CARÁTER ONDULATÓRIO:

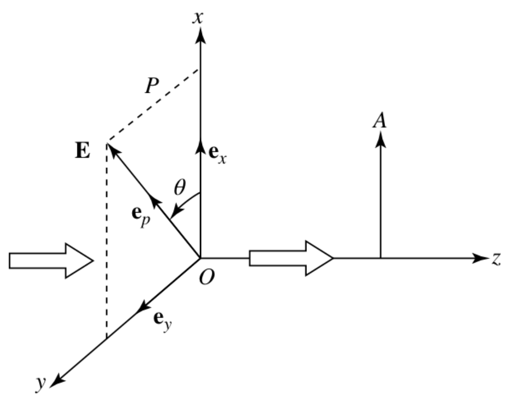
ELÉTRONS, NEUTRONS, ÁTOMOS E MOLÉCULAS JÁ FORAM UTILIZADOS EM EXPERIMENTOS DE INTERFERÊNCIA, COMO JÁ VIMOS.

TAMBÉM NESSES CASOS, AS 4 CARACTERÍSTICAS LISTADAS NA PÁGINA ANTERIOR SÃO OBSERVADAS

PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

VÁRIOS ASPECTOS IMPORTANTES DA DESCRIÇÃO QUÂNTICA DA NATUREZA SÃO ILUSTRADOS COM UM EXPERIMENTO QUE ENVOLVE LUZ E POLARIZADORES. HÁ EXPERIMENTOS ANÁLOGOS FEITOS COM PARTÍCULAS QUE SERÃO DISCUTIDOS MAIS ADIANTE NO CURSO.

UM FEIXE DE LUZ MONOCROMÁTICA PROPAGA-SE NA DIREÇÃO z. O FEIXE TEM POLARIZAÇÃO LINEAR NA DIREÇÃO $\hat{e}_p$, QUE FAZ UM ÂNGULO θ COM A DIREÇÃO $\hat{x}$, COMO NA FIGURA. O FEIXE PASSA POR UM POLARIZADOR A, CUJO EIXO ESTÁ ALINHADO COM A DIREÇÃO $\hat{x}$.



VAMOS, PRIMEIRAMENTE, ANALISAR A SITUAÇÃO CLASSICAMENTE, QUANDO A INTENSIDADE DA LUZ É <u>ALTA</u>.

O CAMPO ELÉTRICO ANTES DO POLARIZADOR A PODE SER DESCRITO, EM NOTAÇÃO COMPLEXA, COMO:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \, \hat{e}_p \, e^{i(kz-\omega t)}$$

SUA INTENSIDADE I É PROPORCIONAL A $|E_0|^2$. PODEMOS DECOMPOR O CAMPO ELÉTRICO COMO:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 (\cos\theta \, \hat{x} + \sin\theta \, \hat{y}) e^{i(kz-\omega t)}$$

COMO O POLARIZADOR (ASSUMIDO IDEAL) DEIXA PASSAR A COMPONENTE $\hat{x}$ E ABSORVE COMPLETAMENTE A COMPONENTE $\hat{y}$, APÓS A, O CAMPO ELÉTRICO É DADO POR:

$$\vec{E}'(\vec{r},t) = (E_0 \cos\theta) \, \hat{x} \, e^{i(kz-\omega t)}$$

CUJA INTENSIDADE I' É PROPORCIONAL A $|E_0|^2 \cos^2\theta$ OU:

$$I' = I \cos^2\theta \qquad \text{(LEI DE MALUS)}$$

O QUE ACONTECE QUANDO A INTENSIDADE DA LUZ É BAIXA? NESSE CASO, OS FÓTONS SÃO INCIDENTES "UM A UM". A PRIMEIRA COISA A SALIENTAR É QUE UM DETETOR COLOCADO APÓS A APENAS REGISTRA FÓTONS COMPLETOS, NÃO "FRAÇÕES" DE FÓTONS.

ALÉM DISSO, OU UM FÓTON "PASSA" PELO POLARIZADOR A E É DETETADO (DETETOR IDEAL) OU ELE É ABSORVIDO POR A.

EXISTEM ALGUMAS POSSIBILIDADES:

a) SE $\hat{e}_p = \hat{x}$ $(\theta = 0)$, TODOS OS FÓTONS PASSAM POR A E SÃO DETECTADOS.

b) SE $\hat{e}_p = \hat{y}$ $(\theta = \pi/2)$, TODOS OS FÓTONS SÃO ABSORVIDOS POR A E NÃO SÃO DETETADOS.

CHAMAMOS OS CASOS $\hat{e}_p = \hat{x}$ E $\hat{e}_p = \hat{y}$ DE AUTO-ESTADOS DE POLARIZAÇÃO

ASSIM, SE $\hat{e}_p$ CORRESPONDE A UM AUTO-ESTADO, O RESULTADO DA MEDIDA É CERTO (DETERMINÍSTICO)

C) SE $\theta \neq 0$ E $\theta = \frac{\pi}{2}$, O RESULTADO É APENAS PROBABILÍSTICO, E AS PROBALIDADES SÃO DADAS PELOS QUADRADOS DOS COEFICIENTES DE DECOMPOSIÇÃO DO ESTADO $\hat{e}_p$ NOS AUTO-ESTADOS DO POLARIZADOR A:

$$\hat{e}_p = \cos\theta \, \hat{x} + \sin\theta \, \hat{y}$$

ASSIM, O FÓTON SERÁ DETECTADO COM PROBABILIDADE $\cos^2\theta$ E ABSORVIDO POR A COM PROBABILIDADE $\sin^2\theta$. EVIDENTEMENTE, OS QUADRADOS DOS COEFICIENTES DEVEM SER NORMALIZADOS DE FORMA QUE A SOMA DE TODOS ELES SEJA 1.
ESSE É O "PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL"
DEVE-SE NOTAR QUE A DECOMPOSIÇÃO DEPENDE DA "MEDIDA": SE O POLARIZADOR A TIVER UM EIXO DIFERENTE, OS AUTO-ESTADOS SERÃO DIFERENTE E, CONSEQUENTEMENTE, TAMBÉM A DECOMPOSIÇÃO E AS PROBABILIDADES.

d) FINALMENTE, O ESTADO DA LUZ APÓS O POLARIZADOR A É $\hat{e}_p' = \hat{x}$.
SE USARMOS UM SEGUNDO POLARIZADOR A' APÓS A COM EIXO $\hat{x}$, TODOS OS FÓTONS QUE PASSARAM POR A TAMBÉM PASSARÃO POR A'. EM OUTRAS PALAVRAS:

ESTADO ANTES DA A : $\hat{e}_p$

ESTADO DEPOIS DE A : $\hat{x}$

ISSO MOSTRA QUE O PROCESSO DE MEDIDA PERTURBA O SISTEMA E MUDA O SEU ESTADO.

RESUMINDO OS ASPECTOS MAIS IMPORTANTES:

a) SE O ESTADO FOR UM AUTO-ESTADO DO APARATO MEDIDOR → RESULTADOS DETERMINÍSTICOS

b) SE FOR UMA SUPERPOSIÇÃO DE AUTO-ESTADOS → RESULTADO PROBABILÍSTICO (PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL)

c) A MEDIDA MODIFICA O ESTADO DO SISTEMA.

A FUNÇÃO DE ONDA E A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

INSPIRADOS PELA DISCUSSÃO ANTERIOR SOBRE O COMPORTAMENTO DA LUZ E LEVANDO EM CONTA QUE O COMPORTAMENTO DA MATÉRIA É MUITO SEMELHANTE, PODEMOS FAZER COMO SCHRÖDINGER E OUTROS PIONEIROS DA TEORIA QUÂNTICA E POSTULAR QUE O ESTADO DE UMA PARTÍCULA QUÂNTICA, COMO O ELÉTRON, É DESCRITO POR UMA FUNÇÃO DE ONDA:

$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow$ FUNÇÃO DE ONDA DE UM ELÉTRON

(OBS.: NESTE MOMENTO, VAMOS IGNORAR O SPIN DO ELÉTRON. VOLTAREMOS A ELE MAIS TARDE).

A PROBABILIDADE DO ELÉTRON SER ENCONTRADO NUM VOLUME INFINITESIMAL $d^3r = dx\,dy\,dz$ NO PONTO $\underline{\vec{r}}$ NO INSTANTE $\underline{t}$ É:

$$dP(\vec{r},t) = c\,|\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r$$

$\underline{c}$ É UMA CONSTANTE DE NORMALIZAÇÃO

NOTE QUE $\psi(\vec{r},t)$ É UMA FUNÇÃO EM GERAL COMPLEXA, DAÍ A IMPORTÂNCIA DO MÓDULO QUADRADO NA PROBABILIDADE.
A FUNÇÃO DE ONDA É ENCARADA COMO UMA AMPLITUDE DE PROBABILIDADE.
É EVIDENTE QUE ESSA INTERPRETAÇÃO, DEVIDA A MAX BORN, LEVA IMEDIATAMENTE A EFEITOS DE INTERFERÊNCIA (COMPARE COM $\vec{E}(\vec{r},t)$ E $I \propto |\vec{E}(\vec{r},t)|^2$ NO CASO DA LUZ).

DADA UMA CERTA QUANTIDADE FÍSICA $\underline{A}$, SUA MEDIDA SERÁ TAL QUE:

a) SÓ SERÃO OBTIDOS VALORES PERTENCENTER A UM GRUPO DE VALORES (CHAMADOS AUTO-VALORES), COLETIVAMENTE DENOTADOS POR:

$$a = a_1, a_2, a_3, \dots$$

b) A CADA AUTO-VALOR $\underline{a}$ ESTÁ ASSOCIADO UM AUTO-ESTADO $\psi_a(\vec{r})$

SE $\psi(\vec{r},t_0) = \psi_a(\vec{r})$, ENTÃO MEDIDAS DE A NECESSARIAMENTE DARÁ $\underline{\underline{a}}$
(DETERMINÍSTICO)

c) NO CASO GERAL, QUALQUER FUNÇÃO DE ONDA PODE SER EXPANDIDA NA BASE DE AUTO-ESTADOS DE A:

$$\psi(\vec{r}, t_0) = \sum_a c_a \psi_a(\vec{r})$$

E A PROBABILIDADE DE SE OBTER O RESULTADO PARTICULAR $\underline{a}$ NUMA MEDIDA DE A É:

$$P_a = \frac{|c_a|^2}{\sum_a |c_a|^2}$$

NOTE: $\sum_a P_a = 1$.

d) APÓS A MEDIDA, O ESTADO DA PARTÍCULA PASSA A SER:

$$\psi'(\vec{r}, t_0) = \psi_a(\vec{r})$$

CASO A MEDIDA TENHA DADO $\underline{a}$ COMO RESULTADO

UM COMENTÁRIO MATEMÁTICO IMPORTANTE.
DADA A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA, SEGUE QUE

$$\int dP(\vec{r},t) = C \int |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = 1$$

O QUE NOS DÁ O VALOR DA CONSTANTE $\underline{C}$.
MAS, O MAIS IMPORTANTE É QUE ISSO IMPÕE UMA RESTRIÇÃO IMPORTANTE SOBRE AS POSSÍVEIS FUNÇÕES DE ONDA FÍSICAS: ELAS DEVEM TER O SEU MÓDULO QUADRADO TAL QUE A INTEGRAL EM TODO O ESPAÇO É FINITA: DIZ-SE QUE ELAS DEVEM SER DE QUADRADO INTEGRÁVEL.

A EVOLUÇÃO TEMPORAL

UMA MANEIRA DE CHEGAR À EQUAÇÃO QUE DÁ A EVOLUÇÃO TEMPORAL, VEM DE CONSIDERAR A PARTÍCULA LIVRE. NESSE CASO, TEMOS AS RELAÇÕES DE EINSTEIN-PLANCK:

$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad (\omega = 2\pi\nu)$$

E DE BROGLIE:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

OU, EM 3D,:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

ASSIM, É NATURAL ESCREVER:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \psi_0\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$$

COMO UMA PARTÍCULA LIVRE NÃO-RELATIVÍSTICA TEM:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

TEMOS QUE:

$$\psi(\vec{x},t) = \psi_0 e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{p^2}{2m}t)/\hbar}$$

E:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{x},t)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \frac{p^2}{2m}\psi(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right)\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

NOTEM A ASSOCIAÇÃO:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

NA PRESENÇA DE UM POTENCIAL QUALQUER $V(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r},t)\psi}$$

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER DETERMINA A EVOLUÇÃO TEMPORAL DO ESTADO.
VALE NOTAR:

a) A EQUAÇÃO É LINEAR

b) A EQUAÇÃO É DE PRIMEIRA ORDEM NO TEMPO, OU SEJA, DADA $\psi(\vec{r},t_0)$, ELA PODE SER USADA PARA DETERMINAR:

$$\psi(\vec{r},t) \quad \text{PARA} \quad t>t_0 \quad \text{OU} \quad t<t_0$$

PARA UM POTENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO $V(\vec{r})$, PODEMOS ENCONTRAR SOLUÇÕES SEPARÁVEIS:

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \phi_E(\vec{r})$$

TAL QUE: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\,\psi(\vec{r},t)$

E:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \phi_E(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\phi_E(\vec{r}) = E\,\phi_E(\vec{r})}$$

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO.

NOTE QUE A DENSIDADE DE PROBABILIDADE CORRESPONDENTE É:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = |\phi_E(\vec{r})|^2$$

QUE INDEPENDE DO TEMPO. POR ISSO, ESSES ESTADOS SÃO CHAMADOS ESTADOS ESTACIONÁRIOS.