BASES NA NOTAÇÃO DE DIRAC

UMA BASE EM $\mathcal{F}$ $\{u_i(\vec{r})\}$ (DISCRETA), DEFINE UMA BASE DISCRETA EM $\mathcal{E}$:

$$u_i(\vec{r}) \longrightarrow |u_i\rangle$$

ORTONORMALIDADE: $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

PARA O FECHAMENTO, CONSIDERE A EXPANSÃO:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \quad ; \quad c_i = \langle u_i | \psi \rangle$$

SEGUE QUE:

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle |u_i\rangle = \underbrace{\boxed{\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|}}_{\mathbb{1} \Rightarrow \text{OPERADOR IDENTIDADE}} |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}}$$ RELAÇÃO DE FECHAMENTO

ANALOGAMENTE PARA BASES CONTÍNUAS

$w_\alpha(\vec{r}) \longrightarrow |w_\alpha\rangle$ (KETS GENERALIZADOS)

ORTOGONALIDADE: $\langle w_\alpha | w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$

FECHAMENTO: $\int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1}$

EXPANSÃO: $|\psi\rangle = \int d\alpha\ c(\alpha)\, |w_\alpha\rangle$ ONDE

$$c(\alpha) = \langle w_\alpha | \psi\rangle$$

EM QUALQUER DOS CASOS, ESCOLHER UMA BASE E EXPANDIR O ESTADO NESSA BASE É ESCOLHER UMA REPRESENTAÇÃO

$\{\,\lvert u_i\rangle\,\}$ representation	$\{\,\lvert w_\alpha\rangle\,\}$ representation
$\langle u_i \lvert u_j\rangle = \delta_{ij}$ $P_{\{u_i\}} = \sum_i \lvert u_i\rangle\langle u_i\rvert = \mathbb{1}$	$\langle w_\alpha \lvert w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')$ $P_{\{w_\alpha\}} = \int \mathrm{d}\alpha\ \lvert w_\alpha\rangle\langle w_\alpha\rvert = \mathbb{1}$

NOTAÇÃO MATRICIAL

ESTÁ CLARO QUE, NUMA DADA REPRESENTAÇÃO, O ESTADO É REPRESENTADO POR:

$$c_i = \langle u_i | \psi \rangle \quad \text{OU} \quad c(\alpha) = \langle w_\alpha | \psi \rangle$$

QUE PODEMOS ESCREVER COMO UM VETOR-COLUNA:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1 | \psi \rangle \\ \langle u_2 | \psi \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

OU O ANÁLOGO CONTÍNUO.

OS BRAS TAMBÉM PODEM SER EXPANDIDOS:

$$\langle \varphi | = \sum_i \langle \varphi | u_i \rangle \langle u_i | = \sum_i b_i^* \langle u_i |$$

ONDE $b_i^* = \langle \varphi | u_i \rangle$ OU $b_i = \langle u_i | \varphi \rangle$

É CONVENIENTE REPRESENTAR OS BRAS POR VETORES-LINHA:

$$\left(b_1^* \quad b_2^* \; \cdots \right) = \left(\langle \varphi | u_1 \rangle \quad \langle \varphi | u_2 \rangle \; \cdots \right)$$

COM ESSAS DEFINIÇÕES, O PRODUTO ESCALAR

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_i b_i^* c_i = b_1^* c_1 + b_2^* c_2 + \cdots$$

CORRESPONDE AO <u>PRODUTO MATRICIAL</u> DO VETOR-LINHA DO BRA PELO VETOR-COLUNA DO KET:

$$\left(b_1^* \; b_2^* \; \cdots \right) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_1^* c_1 + b_2^* c_2 + \cdots$$

DA MESMA MANEIRA, UM OPERADOR LINEAR A, PODE SER ESCRITO COMO:

$$A = \left(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\right) A \left(\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\right)$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$$

ONDE: $A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$, QUE PODE SER REPRESENTADO POR UMA MATRIZ:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

COM ESSAS CONVENÇÕES, TODAS AS OPERAÇÕES JÁ DEFINIDAS SE TORNAM MULTIPLICAÇÕES MATRICIAIS.

ATUAÇÃO DE UM OPERADOR EM UM KET:

$$A|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| A \sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} c_j |u_i\rangle = |\psi'\rangle = \sum_i c_i' |u_i\rangle$$

LOGO:

$$c_i' = \sum_j A_{ij} c_j$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ELEMENTO DE MATRIZ:

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \sum_{i,j} \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle$$

$$= \sum_{i,j} b_i^* A_{ij} c_j$$

$$\Longrightarrow (b_1^* \; b_2^* \cdots) \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

PRODUTO DE OPERADORES:

$$\langle u_i | A B | u_j \rangle = \sum_k \langle u_i | A | u_k \rangle \langle u_k | B | u_j \rangle$$

$$= \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$\Rightarrow (AB)_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

ATUAÇÃO DE UM OPERADOR EM UM BRA:

$$\langle \varphi | A = \sum_{i,j} \langle \varphi | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j |$$

$$= \sum_{i,j} b_i^* A_{ij} \langle u_j | = \langle \varphi' | = \sum_i (b_i')^* \langle u_i |$$

$$\Rightarrow (b_1'^* \; b_2'^* \cdots) = (b_1^* \; b_2^* \cdots) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

OPERADOR ADJUNTO:

$$(A^{+})_{ij} = \langle u_i | A^{+} | u_j \rangle = \left(\langle u_j | A | u_i \rangle \right)^{*} = A^{*}_{ji}$$

PORTANTO, DADA A REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM OPERADOR $\underline{A}$ (A_{ij}) SEU ADJUNTO OU CONJUGADO HERMITIANO TEM COMO REPRESETAÇÃO MATRICIAL A MATRIZ OBTIDA DE A_{ij} TOMANDO SUA TRANSPOSTA E O COMPLEXO CONJUGADO DE CADA ELEMENTO:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ \vdots & & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{+} = \begin{pmatrix} A^{*}_{11} & A^{*}_{21} & A^{*}_{31} & \cdots \\ A^{*}_{12} & A^{*}_{22} & A^{*}_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

<u>EXEMPLO</u>: NUM ESPAÇO $\mathcal{E}_2$ DE DIMENSÃO <u>2</u>, UM OPERADOR LINEAR É REPRESENTADO NUMA BASE PELA MATRIZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3i & 2+i \end{pmatrix}$$

O SEU ADJUNTO É REPRESENTADO NA MESMA BASE POR:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 4 & 2-i \end{pmatrix}$$

OPERADORES HERMITIANOS

A REPRENTAÇÃO DE UM OPERADOR HERMITIANO NUMA BASE QUALQUER SATISFAZ :

$$A_{ij} = A_{ji}^*$$

OU SEJA, TODOS OS ELEMENTOS DA DIAGONAL SÃO REAIS: $A_{ii} = A_{ii}^*$ E OS ELEMENTOS FORA DA DIAGONAL SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO A ELA SÃO COMPLEXO CONJUGADOS UM DO OUTRO.

EXEMPLO: AS SEGUINTES MATRIZES 2x2 REPRESENTAM OPERADORES HERMITIANOS EM $\mathcal{E}_2$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

QUALQUER OPERADOR HERMITIANO EM $\mathcal{E}_2$ PODE SER ESCRITO COMO UMA COMBINAÇÃO LINEAR DESSAS 4 MATRIZES:

$$a\mathbb{1} + b\sigma_x + c\sigma_y + d\,\sigma_z = \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix}$$

MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO

SEJAM 2 BASES $\{|u_i\rangle\}$ E $\{|t_i\rangle\}$. CADA KET DE UMA BASE PODE SER EXPANDIDO NOS KETS DA OUTRA:

$$|t_i\rangle = \sum_j |u_j\rangle\langle u_j|t_i\rangle = \sum_j S_{ji}|u_j\rangle$$

ONDE: $S_{ji} = \langle u_j|t_i\rangle$.

ESSA MATRIZ É UMA MATRIZ UNITÁRIA, OU SEJA, SUA HERMITIANA CONJUGADA É SUA INVERSA:

$$\sum_j S_{ij}S^\dagger_{jk} = \sum_j S_{ij}S^*_{kj}$$

$$= \sum_j \langle u_i|t_j\rangle\left(\langle u_k|t_j\rangle\right)^*$$

$$= \sum_j \langle u_i|t_j\rangle\langle t_j|u_k\rangle = \langle u_i|u_k\rangle = \delta_{ik}$$

$$\sum_j S^\dagger_{ij}S_{jk} = \sum_j S^*_{ji}S_{jk} = \sum_j \left(\langle u_j|t_i\rangle\right)^*\langle u_j|t_k\rangle$$

$$= \sum_j \langle t_i|u_j\rangle\langle u_j|t_k\rangle = \langle t_i|t_k\rangle = \delta_{ij}$$

SEJA AGORA UM KET QUALQUER $|\psi\rangle$.
SUA REPRESENTAÇÃO EM CADA BASE É:

$$c_i = \langle u_i|\psi\rangle \quad \text{E} \quad d_i = \langle t_i|\psi\rangle$$

PODEMOS ESCREVER:

$$d_i = \langle t_i|\psi\rangle = \sum_j \langle t_i|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle$$
$$= \sum_j S_{ji}^* c_j = \sum_j (S^\dagger)_{ij} c_j$$

E SUA INVERSA:

$$c_i = \sum_j \left[(S^\dagger)^{-1}\right]_{ij} d_j = \sum_j S_{ij} d_j$$

PARA A TRANSFORMAÇÃO DO BRA:

$$d_k^* = \langle\psi|t_k\rangle = \sum_i \langle\psi|u_i\rangle\langle u_i|t_k\rangle = \sum_i c_i^* S_{ik}$$

E

$$c_i^* = \sum_j d_j^* S_{jk}^\dagger$$

FINALMENTE, PARA UM OPERADOR:

$$A'_{kl} = \langle t_k | A | t_l \rangle \qquad A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$$

SEGUE QUE:

$$A'_{kl} = \sum_{ij} \langle t_k | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | t_l \rangle$$

$$= \sum_{ij} S^{\dagger}_{ki} A_{ij} S_{jl}$$

E A INVERSA:

$$A_{ij} = \sum_{kl} S_{ik} A'_{kl} S^{\dagger}_{lj}$$