OS POSTULADOS E A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA FUNÇÃO DE ONDA

SUPONHAMOS UM CASO 1D. O QUE OS POSTULADOS DIZEM SOBRE A PROBABILIDADE DE SE MEDIR A POSIÇÃO DA PARTÍCULA ENTRE x E $x+dx$? TRATA-SE DO OBSERVÁVEL POSIÇÃO X, CUJOS AUTO-VALORES E AUTO-VETORES SÃO:

$$X|x\rangle = x|x\rangle \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

SE O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO $|\psi\rangle$, A PROBABILIDADE PROCURADA É, SEGUNDO O POSTULADO 4,

$$dP(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 dx = |\psi(x)|^2 dx$$

QUE CORRESPONDE EXATAMENTE À INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA FUNÇÃO DE ONDA DE MAX BORN.

ANALOGAMENTE, PARA O MOMENTO ANGULAR p_x:

$$P_x|p_x\rangle = p_x|p_x\rangle \qquad p_x \in (-\infty, +\infty)$$

É A PROBABILIDADE DE SE MEDIR O MOMENTO LINEAR ENTRE p_x E $p_x + dp_x$ É:

$$dP(p_x) = |\langle p_x|\psi\rangle|^2 dp_x = |\bar{\Psi}(p_x)|^2 dp_x$$

QUE É UM RESULTADO JÁ ENCONTRADO NO CAP. 1 ($\bar{\Psi}(p_x)$ É A TRANSFORMADA DE FOURIER DE $\psi(x)$).

COMO ESSES RESULTADOS SE GENERALIZAM PARA 3D? NESSE CASO,

$$X|\vec{r}\rangle = x|\vec{r}\rangle$$

E $|\vec{r}\rangle \equiv |x,y,z\rangle$ SÃO AUTO-VETORES DEGENERADOS DE X. O POSTULADO 4, NESSE CASO, NOS DIZ QUE DEVEMOS SOMAR SOBRE O AUTO-SUB-ESPAÇO DEGENERADO DE X:

$$dP(x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, |\langle x,y,z|\psi\rangle|^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, |\psi(x,y,z)|^2 \, dx$$

ANALOGAMENTE PARA O MOMENTO LINEAR:

$$dP(p_x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \, |\langle p_x, p_y, p_z | \psi \rangle|^2 \right] dp_x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \, |\Psi(p_x, p_y, p_z)|^2 \, dp_x$$

VALOR MÉDIO DE UM OBSERVÁVEL

NA ESTATÍSTICA, DEFINIMOS O VALOR MÉDIO DE UMA QUANTIDADE ALEATÓRIA a_n COMO:

$$\bar{a} = \sum_n a_n P(a_n)$$

ONDE ASSUMIMOS VALORES DISCRETOS PARA A QUANTIDADE ALEATÓRIA E $P(a_n)$ É A PROBABILIDADE DE SE OBTER a_n. SEGUNDO O POSTULADO 4:

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$

SE:

$$A|u_n^i\rangle = a_n |u_n^i\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, g_n)$$

PORTANTO:

$$\bar{a} = \sum_n a_n \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 =$$

$$= \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} a_n \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$= \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | A | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A \underbrace{\left[\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \right]}_{\mathbb{1} \text{ (FECHAMENTO)}} | \psi \rangle$$

$$\bar{a} = \langle \psi | A | \psi \rangle \equiv \langle A \rangle$$

ESSE É UM RESULTADO MUITO IMPORTANTE. O VALOR MÉDIO, OU VALOR ESPERADO (EXPECTATION VALUE), DE UMA QUANTIDADE FÍSICA $\underline{A}$ NUM ESTADO $|\psi\rangle$ É O ELEMENTO DE MATRIZ DE A ENTRE $\langle\psi|$ E $|\psi\rangle$. A NOTAÇÃO MAIS COMUM É:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

NOTEM QUE A INTERPRETAÇÃO ESTATÍSTICA DESSE RESULTADO É QUE:

(i) PREPARA-SE O SISTEMA NO ESTADO $|\psi\rangle$ E MEDE-SE $\underline{A}$ UM NÚMERO $\underline{N}$ DE VEZES. O CONJUNTO É CHAMADO UM "ENSEMBLE".

(ii) TOMA-SE A MÉDIA AMOSTRAL NO LIMITE $N \to \infty$:

$$\langle A \rangle = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \right)$$

ESSE MESMO RESULTADO É OBTIDO PARA ESPECTROS CONTÍNUOS:

$$\bar{a} = \int \alpha \, dP(\alpha) = \int \alpha \, |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha$$

$$= \int \alpha \langle \psi | v_\alpha \rangle \langle v_\alpha | \psi \rangle \, d\alpha$$

$$= \int \langle \psi | A | v_\alpha \rangle \langle v_\alpha | \psi \rangle \, d\alpha$$

$$= \langle \psi | A \left[\int d\alpha \, | v_\alpha \rangle \langle v_\alpha | \right] | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A | \psi \rangle$$

ONDE SUPUSEMOS UM ESPECTRO NÃO-DEGENERADO MAS O RESULTADO É VÁLIDO TAMBÉM NO CASO DEGENERADO, COMO É FÁCIL DE MOSTRAR.

EXEMPLOS:

$$\langle X \rangle = \langle \psi | X | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \langle \psi | X | x \rangle \langle x | \psi \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x \, \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x \, |\psi(x)|^2$$

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \, \langle \psi | P_x | p_x \rangle \langle p_x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \, |\bar{\Psi}(p_x)|^2 \, p_x$$

EXEMPLO: SEJA, NA BASE $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ O OPERADOR:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

E QUE O SISTEMA ESTEJA NO ESTADO

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle$$

QUAL É O VALOR ESPERADO DE A NESSE ESTADO?

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

NA NOTAÇÃO MATRICIAL:

$$\langle A\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + i/2 & 1 & -i/\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 2$$

RESULTADO DE A	PROBABILIDADE
1	3/8
2	1/4
3	3/8

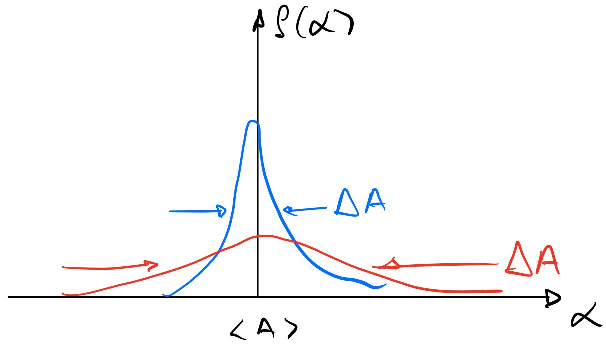
SOMA = 1

$$\langle A \rangle = \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{8} \times 3$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO

A MÉDIA DE UMA QUANTIDADE ALEATÓRIA NÃO FALA NADA SOBRE A DISPERSÃO DOS VALORES EM TORNO DA MÉDIA.



AS DUAS DENSIDADES $\rho(\alpha)$ AO LADO TÊM A MESMA MÉDIA, MAS DISPERSÕES (LARGURAS) BEM DIFERENTES.

GOSTARIÁMOS DE TER UMA DESCRIÇÃO DA LARGURA DA DISTRIBUIÇÃO, OU SEJA, QUANTO OS VALORES DE α FLUTUAM EM TORNO DE $\langle A \rangle$. A MÉDIA DA DIFERENÇA

$$\langle (A - \langle A \rangle) \rangle = \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$$

NÃO É UMA BOA MEDIDA, PORQUE OS VALORES POSITIVOS DE $A - \langle A \rangle$ $(A > \langle A \rangle)$ CANCELAM EXATAMENTE OS VALORES NEGATIVOS $(A < \langle A \rangle)$.

ESSE CANCELAMENTO PODE SER EVITADO COM :

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = (\Delta A)^2$$

QUE É O DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO.

PODEMOS SIMPLIFICAR UM POUCO:

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \left[A^2 - 2\langle A \rangle A + (\langle A \rangle)^2 \right] \rangle$$

$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + (\langle A \rangle)^2$$

$$= \langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2}}$$

NOTEM QUE PARA O CÁLCULO DE ΔA TUDO QUE PRECISAMOS SÃO OS DOIS VALORES ESPERADOS:

$$\langle A^2 \rangle \quad E \quad \langle A \rangle$$

A PARTIR DESSA DEFINIÇÃO PRECISA DE ΔA PODE-SE ESCREVER O PRINCÍPIO DE INCERTEZA RIGOROSAMENTE:

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar/2$$
$$\Delta y \Delta P_y \geq \hbar/2$$
$$\Delta z \Delta P_z \geq \hbar/2$$

EXEMPLO: SEJA, NA BASE $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$
O OPERADOR:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

E QUE O SISTEMA ESTEJA NO ESTADO

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle$$

QUAL É O DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO DE $\underline{A}$ NESSE ESTADO?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4i \\ 0 & 4 & 0 \\ 4i & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle A^2 \rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4i \\ 0 & 4 & 0 \\ 4i & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} - 2i \\ 2 \\ 4i/\sqrt{2} + 5/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} - \frac{2i}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{2i}{\sqrt{2}} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{19}{4}$$

$$\Delta A^2 = \frac{19}{4} - \langle A \rangle^2 = \frac{19}{4} - 4 = \frac{3}{4} \Rightarrow \Delta A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

RESULTADO DE A	PROBABILIDADE
1	3/8
2	1/4
3	3/8

SOMA = 1

$$\langle A^2 \rangle = \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{3}{8} \times 9 = \frac{3+8+27}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PROVA (COMPLEMENTO C_{III}):

ESSA PROVA PARA DOIS OPERADORES HERMITIANOS CUJO COMUTADOR É:

$$[Q, P] = iC \quad \text{ONDE } \underline{C} \in \mathbb{R}$$

NOTE QUE O LADO DIREITO É IMAGINÁRIO PURO PORQUE:

$$([Q,P])^\dagger = (QP - PQ)^\dagger = PQ - QP = [P,Q] = -[Q,P]$$

SEJA $|\psi\rangle$ UM KET QUALQUER E $\lambda \in \mathbb{R}$ UM PARÂMETRO QUALQUER. ENTÃO, DEFINIMOS:

$$|\varphi\rangle = (Q + i\lambda P)|\psi\rangle$$

E

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|\varphi\rangle &= \langle\psi|(Q - i\lambda P)(Q + i\lambda P)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|Q^2 + \lambda^2 P^2 + i\lambda(QP - PQ)|\psi\rangle \\
&= \langle Q^2\rangle + \lambda^2\langle P^2\rangle + i\lambda\langle\psi|[Q,P]|\psi\rangle \\
&= \langle Q^2\rangle + \lambda^2\langle P^2\rangle - \lambda C \geqslant 0
\end{aligned}$$

POIS $\langle\varphi|\varphi\rangle \geqslant 0$. COMO A DESIGUALDADE É VÁLIDA PARA QUALQUER λ REAL, SEGUE QUE O DISCRIMINANTE DO LADO ESQUERDO É NEGATIVO OU ZERO (SE FOR POSITIVO,

HAVERÁ 2 RAÍZES REAIS E O POLINÔMIO TROCA DE SINAL, O QUE NÃO É COMPATÍVEL COM ELE SER ≥ 0). O DISCRIMINANTE É:

$$c^2 - 4\langle Q^2\rangle\langle P^2\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle Q^2\rangle\langle P^2\rangle \geq \frac{c^2}{4}$$

DEFININDO AGORA:

$$Q' = Q - \langle Q\rangle = Q - \langle\psi|Q|\psi\rangle$$
$$P' = P - \langle P\rangle = P - \langle\psi|P|\psi\rangle$$

E COMO:

$$[Q', P'] = [Q - \langle Q\rangle, P - \langle P\rangle] = [Q, P] = ic$$

SEGUE QUE:

$$\langle (Q')^2\rangle\langle (P')^2\rangle \geq \frac{c^2}{4}$$

MAS: $\Delta Q^2 = \langle (Q')^2\rangle = \langle (Q - \langle Q\rangle)^2\rangle$

$\Delta P^2 = \langle (P')^2\rangle = \langle (P - \langle P\rangle)^2\rangle$

$$\Rightarrow (\Delta Q \Delta P)^2 \geq \frac{c^2}{4} \Rightarrow \Delta Q \Delta P \geq \frac{c}{2}$$

SE $c = \hbar \Rightarrow \Delta Q \Delta P \geq \hbar/2$ (Q.E.D.)

NO MESMO COMPLEMENTO C_{III} PROVA-SE UM RESULTADO INTERESSANTE: O ESTADO CORRESPONDENTE AO LIMITE INFERIOR DO PRINCÍPIO DE INCERTEZA:

$$\Delta x \, \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$$

É UMA FUNÇÃO GAUSSIANA TANTO NA REPRESENTAÇÃO x QUANTO NA p_x:

$$\psi(x) = \frac{1}{\left[2\pi(\Delta x)^2\right]^{1/4}} \, e^{i\langle p\rangle x/\hbar} \, e^{-\left[\frac{x-\langle x\rangle}{2\Delta x}\right]^2}$$

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\left[2\pi(\Delta p)^2\right]^{1/4}} \, e^{-i\langle x\rangle p/\hbar} \, e^{-\left[\frac{p-\langle p\rangle}{2\Delta p}\right]^2}$$

ESSAS FUNÇÕES SÃO CHAMADAS <u>PACOTES DE INCERTEZA MÍNIMA</u>.

COMPATIBILIDADE DE OBSERVÁVEIS

DOIS OBSERVÁVEIS A E B QUE COMUTAM, $[A,B]=0$, SÃO DITOS COMPATÍVEIS. ESSA NOMENCLATURA REFLETE O FATO DE QUE ELES PODEM SER MEDIDOS UM LOGO APÓS O OUTRO EM QUALQUER ORDEM E:

(1) OS RESULTADOS OBTIDOS TÊM A MESMA PROBABILIDADE.

(2) A FUNÇÃO DE ONDA COLAPSA PARA O MESMO ESTADO AO FINAL DAS MEDIDAS.

VAMOS MOSTRAR ESSAS CARACTERÍSTICAS. SE $[A,B]=0$, ENTÃO EXISTE UMA BASE DE AUTO-VETORES COMUNS, QUE DENOTAREMOS:

$$|a_n, b_m, i\rangle \qquad \langle a_n, b_m, i | a_{n'} b_{m'} j\rangle = \delta_{ij}\, \delta_{nn'}\, \delta_{mm'}$$

ONDE:

$$A|a_n, b_m, i\rangle = a_n |a_n, b_m, i\rangle$$
$$B|a_n, b_m, i\rangle = b_m |a_n, b_m, i\rangle$$

E O ÍNDICE i DISTINGUE ESTADOS DIFERENTES COM OS MESMOS AUTO-VALORES a_n E b_m DE A E B. APENAS SE A E B FORMAM UM CCOC É QUE i PODE SER IGNORADO.

UM ESTADO GENÉRICO $|\psi\rangle$ PODE SER EXPANDIDO COMO:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m,i} c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

SUPONHAMOS QUE MEDIMOS $\underline{A}$ E, IMEDIATAMENTE DEPOIS, $\underline{B}$. QUAL É A PROBABILIDADE DE SE OBTER O PAR (a_n, b_m)?

NA PRIMEIRA MEDIDA:

$$P_1(a_n) = \sum_{m,i} |c^i_{n,m}|^2$$

E O ESTADO APÓS A MEDIDA SERÁ:

$$|\psi_{1n}\rangle = \frac{\sum_{m,i} c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle}{\left[\sum_{m,i} |c^i_{n,m}|^2\right]^{1/2}}$$

NOTE QUE NÃO HÁ SOMA SOBRE $\underline{n}$!

NA SEGUNDA MEDIDA:

$$P_2(b_m) = \sum_i |\langle a_n, b_m, i | \psi_{1n}\rangle|^2$$

$$= \frac{\sum_i |c^i_{n,m}|^2}{\sum_{m,i} |c^i_{n,m}|^2}$$

A PROBABILIDADE FINAL É O PRODUTO DAS PROBABILIDADES PARCIAIS:

$$P(a_n, b_m) = P_1(a_n) P_2(b_m) = \sum_i |c^i_{n,m}|^2$$

O ESTADO FINAL APÓS AS DUAS MEDIDAS É:

$$|\psi_{2n,m}\rangle = \frac{\sum_i c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle}{\left[\sum_i |c^i_{n,m}|^2\right]^{1/2}}$$

SE AGORA INVERTERMOS A ORDEM DAS MEDIDAS, TEREMOS:

$$P_1(b_m) = \sum_{n,i} |c^i_{n,m}|^2$$

$$|\psi_{1m}\rangle = \frac{\sum_{n,i} c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle}{\left[\sum_{n,i} |c^i_{n,m}|^2\right]^{1/2}}$$

$$P_2(a_n) = \frac{\sum_i |c^i_{n,m}|^2}{\sum_{n,i} |c^i_{n,m}|^2}$$

$$\Rightarrow P(b_m, a_n) = P_1(b_m) P_2(a_n) = \sum_i |c^i_{n,m}|^2$$

$$|\psi_{2n,m}\rangle = \frac{\sum_i c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle}{\left[\sum_i |c^i_{n,m}|^2\right]^{1/2}}$$

NOTA-SE QUE TANTO A PROBABILIDADE FINAL QUANTO O ESTADO FINAL SÃO OS MESMOS. POR ESSA RAZÃO, OS DOIS OBSERVÁVEIS COMPATÍVEIS PODEM ATÉ MESMO SEREM MEDIDOS SIMULTANEAMENTE, SEM AMBIGUIDADE SOBRE OS RESULTADOS.

PREPARAÇÃO DE UM ESTADO

O EXEMPLO ANTERIOR ILUSTRA A IDEIA DE PREPARAÇÃO DE UM ESTADO. O ESTADO FINAL EM AMBOS OS CASOS PERTENCE AO AUTO-SUB-ESPAÇO DE a_n, b_m:

$$|\psi_f\rangle = \frac{\sum_i c^i_{n,m} |a_n, b_m, i\rangle}{\left[\sum_i |c^i_{n,m}|^2\right]^{1/2}}$$

SE $\underline{A}$ E $\underline{B}$ FORMAM UM CCOC, O ESTADO FINAL SERIA <u>ÚNICO</u>

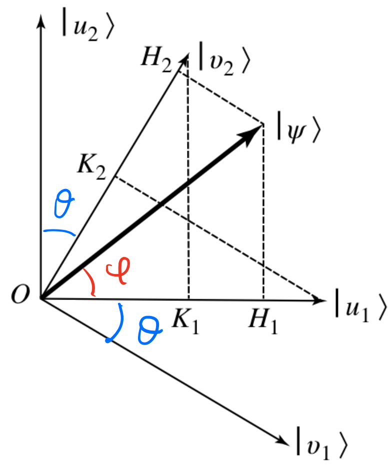
$$|\psi_f\rangle = \frac{c_{n,m}}{|c_{n,m}|} |a_n, b_m\rangle \Rightarrow |a_n, b_m\rangle$$

JÁ QUE $\frac{c}{|c|}$ É APENAS UMA FASE GLOBAL.

DE MANEIRA GERAL, OS ESTADOS RESULTANTES DA MEDIDA SIMULTÂNEA DE UM CCOC É ÚNICA: $CCOC = \{A, B, C, \dots\}$

$$\Rightarrow |\psi_f\rangle = |a_n, b_m, c_p, \dots\rangle$$

SE, PELO CONTRÁRIO, $[A,B] \neq 0$, ENTÃO A ORDEM IMPORTA. ISSO É MELHOR ILUSTRADO POR UM CONTRA-EXEMPLO SIMPLES EM UM ESPAÇO DE 2 DIMENSÕES.



SUPONHA QUE $\underline{A}$ TENHA AUTO-VALORES a_1, a_2 COM AUTO-VETORES CORRESPONDENTES $|u_1\rangle, |u_2\rangle$, COMO NA FIGURA, E QUE $\underline{B}$ TEM b_1, b_2 E $|v_1\rangle, |v_2\rangle$. COMO $[A,B] \neq 0$, OS AUTO-VETORES NÃO COINCIDEM.

POR SIMPLICIDADE, SUPONHA QUE, COMO SUGERIDO PELA GEOMETRIA

$$|v_1\rangle = \cos\theta\,|u_1\rangle - \sin\theta\,|u_2\rangle$$
$$|v_2\rangle = \sin\theta\,|u_1\rangle + \cos\theta\,|u_2\rangle$$

SUPONHAMOS UMA MEDIDA CUJOS RESULTADOS SÃO (a_1, b_2). DEPENDENDO DA ORDEM

1) A PRIMEIRO, B DEPOIS (ESTADO $|\psi\rangle$)

$$P(a_1) = |\langle u_1|\psi\rangle|^2 = \cos^2\varphi$$

$$|\psi_{1a}\rangle = |u_1\rangle$$

$$P(b_2) = |\langle v_2|u_1\rangle|^2 = \sin^2\theta$$

$$P(a_1, b_2) = P(a_1)P(b_2) = \cos^2\varphi \sin^2\theta$$

$$|\psi_{2b}\rangle = |v_2\rangle$$

2) B PRIMEIRO, A DEPOIS (ESTADO $|\psi\rangle$)

$$P(b_2) = |\langle v_2|\psi\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \varphi\right) = \sin^2(\theta + \varphi)$$

$$|\psi_{1b}\rangle = |v_2\rangle$$

$$P(a_1) = |\langle u_1|v_2\rangle|^2 = \sin^2\theta$$

$$P(b_2, a_1) = P(b_2)P(a_1) = \sin^2(\theta+\varphi)\sin^2\theta \neq P(a_1, b_2)$$

$$|\psi_{2a}\rangle = |u_1\rangle \neq |\psi_{2b}\rangle$$

PORTANTO, MEDIR SIMULTANEAMENTE A E B NESSE CASO DÁ RESULTADOS AMBÍGUOS.