CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A EQ. DE SCHR.

O POSTULADO 6, A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER, GOVERNA A EVOLUÇÃO TEMPORAL DE UM ESTADO. VAMOS VER ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS.

1) A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER (ES) É LINEAR:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle$$

PORTANTO, VALE O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO: SE $|\psi_1(t)\rangle$ E $|\psi_2(t)\rangle$ SÃO SOLUÇÕES DA ES ENTÃO:

$$|\psi(t)\rangle = \lambda_1|\psi_1(t)\rangle + \lambda_2|\psi_2(t)\rangle$$

TAMBÉM É SOLUÇÃO.

2) A ES É DE PRIMEIRA ORDEM EM $\frac{\partial}{\partial t}$. PORTANTO, DADO O ESTADO NO INSTANTE INICIAL t_0, $|\psi(t_0)\rangle$, ENTÃO $|\psi(t)\rangle$ FICA UNIVOCAMENTE DETERMINADO PARA QUALQUER OUTRO INSTANTE DE TEMPO t.

$$|\psi(t_0+dt)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \left(\frac{dt}{i\hbar}\right)H(t_0)|\psi(t_0)\rangle, \text{ ETC.}$$

3) A NORMA DE UM ESTADO NÃO VARIA NO TEMPO. DE FATO:

$$\frac{d}{dt}\left(\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle\right) = \left(\frac{d\langle\psi(t)|}{dt}\right)|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\left(\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt}\right)$$

MAS: $\dfrac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle$

TOMANDO O HERMITIANO CONJUGADO DA ES:

$$\frac{d\langle\psi(t)|}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H(t)$$

JÁ QUE $H(t)$ É HERMITIANO. ASSIM,

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle$$

$$= 0.$$

COMO: $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \int d^3r\, |\psi(\vec{r},t)|^2 = 1$, ISSO QUER DIZER QUE A PROBABILIDADE TOTAL DE SE ENCONTRAR A PARTÍCULA EM ALGUM LUGAR É CONSERVADA. CHAMAMOS ISSO DE CONSERVAÇÃO GLOBAL DA PROBABILIDADE.

4) CONSERVAÇÃO LOCAL DA PROBABILIDADE

ALÉM DA CONSERVAÇÃO GLOBAL DA PROBABILIDADE EXISTE UMA CONSERVAÇÃO LOCAL TAMBÉM. A SITUAÇÃO É ANÁLOGA À CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA, CUJA LEI LOCAL DE CONSERVAÇÃO É:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c = 0$$

ONDE $\rho_c(\vec{r},t)$ É A DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CARGA ELÉTRICA E $\vec{J}_c(\vec{r},t)$ É A DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE ELÉTRICA. SABEMOS QUE A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DESSA EQUAÇÃO É MAIS FÁCIL NA SUA FORMA INTEGRAL:

$$\frac{d Q(V)}{dt} = -\int_{S(V)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -I[S(V)]$$

$S(V)$ = SUPERFÍCIE QUE CONTÉM O VOLUME V.

A TAXA DE VARIAÇÃO DA CARGA TOTAL EM V É IGUAL A MENOS A CORRENTE QUE ATRAVESSA $S(V)$: A CARGA EM V SÓ VARIA PORQUE ALGUMA DESSA CARGA SAI DE V PELAS BORDAS DE V

POIS BEM, ALGO ANÁLOGO ACONTECE COM A DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE SE ACHAR A PARTÍCULA EM $\vec{r}$:

$$\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 = \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

DE FATO:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial \psi^*(\vec{r},t)}{\partial t}\right]\psi(\vec{r},t) + \psi^*(\vec{r},t)\left[\frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t}\right]$$

SUPONHAMOS UMA ES PARA UMA PARTÍCULA NUM POTENCIAL $V(\vec{r},t)$:

$$i\hbar\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

E, TOMANDO O COMPLEXO CONJUGADO,

$$-i\hbar\frac{\partial \psi^*(\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi^*(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi^*(\vec{r},t)$$

JÁ QUE $V(\vec{r},t)$ É REAL (OU $H(t)$ NÃO SERIA HERMITIANO).

ASSIM, O TERMO EM $V(\vec{r},t)$ SE CANCELA E:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

$$= -\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

CONSIDERE AGORA: $\boxed{\vec{J}(\vec{r},t) \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)}$

SEGUE QUE:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\underbrace{(\vec{\nabla}\psi^*)\cdot(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\psi^*)}_{=0} + \psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

LOGO:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$ LEI DE CONSERVAÇÃO LOCAL DA PROBABILIDADE

O VETOR $\vec{J}(\vec{r},t)$ DEFINIDO ACIMA TEM A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DE UMA CORRENTE VOLUMÉTRICA DE PROBABILIDADE.

NOTE QUE $\vec{J}^*(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) \Rightarrow \vec{J}(\vec{r},t)$ É REAL.

EXEMPLO: ONDA PLANA: $\psi(\vec{r},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ $\left(\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}\right)$

$\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 = |A|^2$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[A^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} (i\vec{k}) A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - (\quad)^* \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left[|A|^2 (i\vec{k}) - |A|^2(-i\vec{k}) \right]$$

$$= \frac{\hbar\vec{k}}{m} |A|^2 = \vec{v}_G\, \rho(\vec{r},t)$$

ONDE $\vec{v}_G = \frac{\hbar\vec{k}}{m} = \frac{\vec{p}}{m}$ = VELOCIDADE DE GRUPO.

NOTE QUE OS COEFICIENTES DE REFLEXÃO E DE TRANSMISSÃO QUE VIMOS EM PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS SÃO RAZÕES ENTRE CORRENTES DE PROBABILIDADE. POR ISSO HÁ UM FATOR DE k MULTIPLICANDO $|A|^2$.

EVOLUÇÃO TEMPORAL DE VALORES ESPERADOS

SEJA $A(t)$ UM OPERADOR QUE PODE DEPENDER EXPLICITAMENTE DO TEMPO. UM EXEMPLO É UM POTENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO $V(\vec{r},t)$ AO QUAL SE ASSOCIA O OPERADOR $V(\vec{R},t)$. VAMOS CALCULAR A VARIAÇÃO TEMPORAL DE SEU VALOR ESPERADO NUM ESTADO $|\psi(t)\rangle$:

$$\langle A\rangle(t) = \langle\psi(t)|A(t)|\psi(t)\rangle$$

NOTE QUE A DEPENDÊNCIA TEMPORAL ADVÉM TANTO DO ESTADO $|\psi(t)\rangle$ QUANTO DO OPERADOR $A(t)$. ENTÃO:

$$\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = \left[\frac{d\langle\psi(t)|}{dt}\right] A(t)|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|A(t)\left[\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt}\right] + \langle\psi(t)|\frac{\partial A}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

USANDO A ES:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\left[A(t)H(t) - H(t)A(t)\right]|\psi(t)\rangle$$

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\left[A(t),H(t)\right]|\psi(t)\rangle$$

UMA APLICAÇÃO IMPORTANTE DESSE RESULTADO É CONHECIDA COMO "TEOREMA DE EHRENFEST". SEJA UM SISTEMA DE UMA PARTÍCULA SOB UM POTENCIAL CONSERVATIVO.

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{R})$$

TEMOS QUE:

$$\frac{d\langle\vec{R}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{R},H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{R},\frac{\vec{P}^2}{2m}]\rangle$$

$$\frac{d\langle\vec{P}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{P},H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{P},V(\vec{R})]\rangle$$

VIMOS ANTERIORMENTE (LISTA 2a) QUE:

$$[\vec{R},\frac{\vec{P}^2}{2m}] = \frac{i\hbar}{m}\vec{P} \qquad [\vec{P},V(\vec{R})] = -i\hbar\vec{\nabla}V(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{d\langle\vec{R}\rangle}{dt} &= \frac{\langle\vec{P}\rangle}{m} \\ \frac{d\langle\vec{P}\rangle}{dt} &= -\langle\vec{\nabla}V(\vec{R})\rangle \end{aligned}}$$

NOTEM A SEMELHANÇA COM AS EQS. DE HAMILTON

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$$

O TEOREMA DE EHRENFEST É UMA AFIRMAÇÃO EXATA SOBRE CERTOS VALORES ESPERADOS. ELE SÓ SE REDUZ ÀS EQS. DE HAMILTON (LIMITE CLÁSSICO) SOB CERTAS CONDIÇÕES. DE FATO, SE A FUNÇÃO DE ONDA É TÃO LOCALIZADA NO ESPAÇO, TAL QUE:

$$\langle \vec{R} \rangle = \int (\vec{r}) |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r \cong \vec{r}_c(t)$$

ONDE $\vec{r}_c(t)$ É O CENTRO DO PACOTE $\psi(\vec{r},t)$

E,

$$\langle -\vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle = \int [-\vec{\nabla} V(\vec{r})] |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r \cong -\vec{\nabla} V \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_c(t)}$$

ENTÃO: $m \dfrac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \langle \vec{P} \rangle \qquad \dfrac{d\langle \vec{P} \rangle}{dt} = -\vec{\nabla} V \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_c(t)}$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}_c(t)}{dt} = -\vec{\nabla} V \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_c(t)} = \vec{F}(\vec{r}_c(t))$$

DE TAL FORMA QUE O CENTRO DO PACOTE DE ONDAS SEGUE AS EQS. CLÁSSICAS. A CONDIÇÃO DE VALIDADE É QUE O POTENCIAL VARIE <u>LENTAMENTE</u> NA ESCALA TÍPICA DO PACOTE DE ONDAS (COMP. DE ONDA DE DE BROGLIE)

SISTEMAS CONSERVATIVOS

O CASO DE SISTEMAS CONSERVATIVOS, NOS QUAIS $\underline{H}$ NÃO DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO É MUITO IMPORTANTE. VAMOS VER AS SUAS CARACTERÍSTICAS.

1) SOLUÇÃO GERAL DA $\underline{ES}$ NA BASE DE AUTO-ESTADOS DE H

SEJAM OS AUTO-ESTADOS DE H:

$$H|\varphi_{n,\tau}\rangle = E_n|\varphi_{n,\tau}\rangle \; ; \; \langle\varphi_{n,\tau}|\varphi_{n',\tau'}\rangle = \delta_{n,n'}\delta_{\tau,\tau'}$$

ONDE OS ÍNDICES $\underline{\tau}$ DISTINGUEM AUTO-ESTADOS DEGENERADOS DIFERENTES.

PODEMOS EXPANDIR O ESTADO NUM INSTANTE GENÉRICO $\underline{t}$ NA BASE AUTO-VETORES DE $\underline{H}$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} C_{n,\tau}(t)|\varphi_{n,\tau}\rangle \quad ; \quad C_{n,\tau}(t) = \langle\varphi_{n,\tau}|\psi(t)\rangle$$

DERIVANDO COM RELAÇÃO AO TEMPO:

$$\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} \dot{C}_{n,\tau}(t)|\varphi_{n,\tau}\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\sum_{n,\tau} C_{n,\tau} H|\varphi_{n,\tau}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\sum_{n,\tau} E_n C_{n,\tau}(t)|\varphi_{n,\tau}\rangle$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES:

$$i\hbar\,\dot{C}_{n,\tau}(t) = E_n\,C_{n,\tau}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{n,\tau}(t) = C_{n,\tau}(t_0)\,e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}}$$

ISSO NOS DÁ UMA RECEITA PARA RESOLVER A ES QUANDO H NÃO DEPENDE DO TEMPO:

1) DADO $|\psi(t_0)\rangle$, O ESTADO INICIAL EM $t=t_0$, EXPANDA-O NA BASE DE AUTO-ESTADOS DE H

$$C_{n,\tau}(t_0) = \langle\varphi_{n,\tau}|\psi(t_0)\rangle$$

2) O ESTADO NUM INSTANTE t QUALQUER É:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} C_{n,\tau}(t_0)\,e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}\,|\varphi_{n,\tau}\rangle$$

3) O MESMO VALE PARA UMA BASE CONTÍNUA:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\tau}\int dE\; C_\tau(E,t_0)\,e^{-iE(t-t_0)/\hbar}\,|\varphi_{E,\tau}\rangle$$

$$C_\tau(E,t_0) = \langle\varphi_{E,\tau}|\psi(t_0)\rangle$$

EXEMPLO: SUPONHA QUE O EXEMPLO JÁ FEITO:

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

BASE
$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

E QUE O SISTEMA ESTEJA NO ESTADO

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \text{ EM } t=0$$

VIMOS QUE OS AUTO-VALORES E AUTO-VETORES DE H SÃO:

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|3\rangle) \qquad \lambda_1 = E_0$$

$$|\lambda_2\rangle = |2\rangle \qquad \lambda_2 = 2E_0$$

$$|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|3\rangle) \qquad \lambda_3 = 3E_0$$

ALÉM DISSO: $\langle\lambda_1|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$,

$\langle\lambda_2|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle\lambda_3|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

PORTANTO:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{-iE_0t/\hbar}|\lambda_1\rangle + e^{-2iE_0t/\hbar}|\lambda_2\rangle + \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{-3iE_0t/\hbar}|\lambda_3\rangle\right]$$

SE QUISERMOS O ESTADO NA BASE INICIAL

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{-iE_0t/\hbar}\frac{(|1\rangle - i|3\rangle)}{\sqrt{2}} + e^{-2iE_0t/\hbar}|2\rangle \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{-3iE_0t/\hbar}\frac{(|1\rangle + i|3\rangle)}{\sqrt{2}}\right]$$

QUE PODE SER MAIS SIMPLIFICADO MAS NÃO O FAREMOS. NOTE QUE A DEPENDÊNCIA TEMPORAL É SIMPLES NA BASE DE AUTO-VETORES DE $\underline{H}$, MAS NÃO NUMA BASE QUALQUER.

2) ESTADOS ESTACIONÁRIOS

SE O ESTADO INICIAL PERTENCE A UM AUTO-SUB-ESPAÇO DE H:

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_{r} c_{n,r}(t_0)\,|\varphi_{n,r}\rangle$$

(NOTE QUE NÃO HÁ SOMA SOBRE $\underline{n}$), ENTÃO:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \sum_{r} c_{n,r}(t_0)\,|\varphi_{n,r}\rangle$$

$$= e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}\,|\psi(t_0)\rangle$$

E O ESTADO SÓ MUDA POR UMA FASE GLOBAL, QUE É IRRELEVANTE FISICAMENTE. PORTANTO, NENHUMA PROPRIEDADE FÍSICA DO SISTEMA (PROBABILIDADES, VALORES ESPERADOS, ETC.) MUDAM COM O TEMPO. POR ISSO, TAIS ESTADOS SÃO CHAMADOS DE ESTACIONÁRIOS.

3) CONSTANTES DO MOVIMENTO

ESSAS SÃO ANÁLOGAS ÀS SUAS CONTRAPARTIDAS CLÁSSICAS, TAMBÉM CHAMADAS DE QUANTIDADES CONSERVADAS. UMA CONSTANTE DO MOVIMENTO É UM OPERADOR $\underline{A}$ TAL QUE:

1) $\dfrac{\partial A}{\partial t} = 0$ (NÃO DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO)

E

2) $[A, H] = 0$ (COMUTAM COM O HAMILTONIANO)

CARACTERÍSTICAS

(i) $\dfrac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle \dfrac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \dfrac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle = 0$

O VALOR ESPERADO DE A NÃO DEPENDE DO TEMPO EM NENHUM ESTADO.

(ii) COMO EXISTE UMA BASE DE AUTO-VETORES SIMULTÂNEOS DE A E H

$$H|\varphi_{n,p,\tau}\rangle = E_n|\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$
$$A|\varphi_{n,p,\tau}\rangle = a_n|\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$

(τ DISTINGUE AUTO-VETORES DIFERENTES SE $\underline{A}$ E $\underline{H}$ NÃO FORMAM UM CCOC). TAIS ESTADOS SÃO ESTACIONÁRIOS. PORTANTO, SE O SISTEMA FOR PREPARADO EM UM DELES (OU MESMO NUM AUTO-SUB-ESPAÇO SIMULTÂNEO DE $\underline{A}$ E $\underline{H}$), ELE SERÁ UM AUTO-VETOR DE A EM QUALQUER INSTANTE DE TEMPO, COM O MESMO AUTO-VALOR:

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_\tau c_\tau|\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}\sum_\tau c_\tau|\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$

$$A|\psi(t)\rangle = a_n|\psi(t)\rangle \quad \text{PARA QUALQUER } \underline{t}.$$

POR ISSO, OS AUTO-VALORES DE $\underline{A}$ SÃO CHAMADOS DE **BONS NÚMEROS QUÂNTICOS**.

(iii) AS PROBABILIDADES DE MEDIDAS DE $\underline{A}$ NÃO DEPENDEM DO TEMPO.

NA BASE COMUM:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,p,z} c_{n,p,z}(t_0)\, e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,p,z}\rangle$$

$$\Rightarrow P(a_p, t) = \sum_{n,z} \left| c_{n,p,z}(t_0)\, e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \right|^2$$

$$= \sum_{n,z} \left| c_{n,p,z}(t_0) \right|^2 = P(a_p, t_0)$$

4) FREQUÊNCIAS DE BOHR

SE $[B, H] \neq 0$, ENTÃO

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} C_{n,\tau}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\tau}\rangle$$

E:

$$\langle B \rangle = \langle \psi(t)| B |\psi(t)\rangle = \sum_{\substack{n\tau \\ n'\tau'}} C^*_{n'\tau'}(t_0)\, C_{n\tau}(t_0)\, e^{-i(E_n - E_{n'})(t-t_0)/\hbar}$$

$$\times \langle \varphi_{n'\tau'} | B | \varphi_{n\tau}\rangle$$

A DEPENDÊNCIA TEMPORAL DE $\langle B \rangle$ É DETERMINADA POR UMA SUPERPOSIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

$$\nu_{n,n'} = \frac{(E_n - E_{n'})}{\hbar} \quad \text{"FREQUÊNCIAS DE BOHR"}$$

$$\langle B \rangle = \sum_{nn'} B_{nn'}\, e^{-i\nu_{n,n'} t} \quad \text{ONDE}$$

$$B_{n,n'} = C^*_{n'\tau'}(t_0)\, C_{n\tau}(t_0) \langle \varphi_{n'\tau'} | B | \varphi_{n\tau}\rangle$$

AS FREQUÊNCIAS SÃO DETERMINADAS APENAS POR H, MAS OS COEFICIENTES $B_{n,n'}$ DEPENDEM DE B E DO ESTADO INICIAL.

5) PRINCÍPIO DE INCERTEZA TEMPO-ENERGIA

VAMOS MOSTRAR QUE HÁ UM SENTIDO NO QUAL: $\Delta t\, \Delta E \gtrsim \hbar$, ONDE ΔE = INCERTEZA NA ENERGIA E Δt É UM TEMPO CARACTERÍSTICO DO SISTEMA.

(i) SE O ESTADO INICIALMENTE ESTÁ NUM AUTO-ESTADO DE H, ENTÃO $\Delta E = 0$, POIS A ENERGIA É DADA COM INCERTEZA NULA. MAS ESSE É UM ESTADO ESTACIONÁRIO, ONDE NENHUM PROPRIEDADE FÍSICA VARIA NO TEMPO, PORTANTO, $\Delta t \to \infty$, COMPATÍVEL COM $\Delta E\, \Delta t \gtrsim \hbar$.

(ii) TOME UM CASO SIMPLES DE SUPERPOSIÇÃO DE DOIS AUTO-ESTADOS DE H:

$$|\psi(t)\rangle = c_1\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, |\varphi_1\rangle + c_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, |\varphi_2\rangle$$

NESSE CASO, $\Delta E = |E_2 - E_1|$. ALÉM DISSO, A DEPENDÊNCIA TEMPORAL DAS PROPRIEDADES DE UMA QUANTIDADE ARBITRÁRIA B, $[B, H] \neq 0$ PODE SER ESTUDADA.

POR EXEMPLO, O VALOR ESPERADO DE $\underline{B}$ TEM FREQÜENCIA DE BOHR:

$$\nu_{12} = \frac{|E_2 - E_1|}{\hbar}$$

PORTANTO $\langle B \rangle$ VARIA NO TEMPO COM UMA ESCALA CARACTERÍSTICA

$$\Delta t \sim \frac{1}{\nu_{1,2}} = \frac{\hbar}{|E_2 - E_1|} = \frac{\hbar}{\Delta E} \Rightarrow \Delta t\, \Delta E \gtrsim \hbar$$

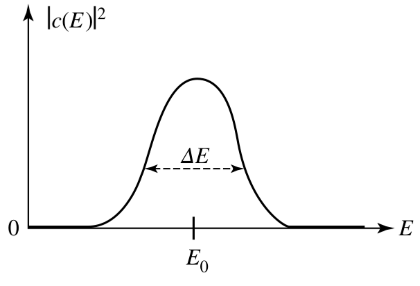
iii) NO CASO GERAL DE UM ESPECTRO CONTÍNUO

$$|\psi(t)\rangle = \int dE\, c(E)\, e^{-iEt/\hbar}\, |\varphi_E\rangle$$

CONSIDERE A PROBABILIDADE DE MEDIDA DE UM CERTO AUTO-VALOR DE $\underline{B}$, b_m, $[|u_m\rangle]$

$$P(b_m, t) = |\langle u_m | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \int dE\, c(E)\, e^{-iEt/\hbar} \langle u_m | \varphi_E \rangle \right|^2$$

SUPONHA QUE $c(E)$ SEJA TAL QUE SUA VARIAÇÃO SEJA COMO NA FIGURA,



E QUE $\langle u_m | \varphi_E \rangle$ NÃO VARIE MUITO ENTRE $E_0 - \frac{\Delta E}{2}$ E $E_0 + \frac{\Delta E}{2}$. NESSE CASO, PODEMOS APROXIMADAMENTE TOMAR $\langle u_m | \varphi_E \rangle \cong \langle u_m | \varphi_{E_0} \rangle$ E:

$$p(b_m, t) \cong |\langle u_m | \varphi_{E_0} \rangle|^2 \left| \int dE\, c(E)\, e^{-iEt/\hbar} \right|^2$$

MAS DAS PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER, A VARIAÇÃO TEMPORAL DA INTEGRAL É TAL QUE:

$$\Delta t\, \Delta E \gtrsim \hbar$$

UMA OUTRA ABORDAGEM DO PRINCÍPIO DE INCERTEZA TEMPO-ENERGIA

VOLTANDO À PROVA QUE FIZEMOS DO PRINCÍPIO DE INCERTEZA, PODEMOS RE-ESCREVER AQUELE RESULTADO, APLICANDO-O A DOIS OBSERVÁVEIS QUAISQUER $\underline{A}$ E $\underline{B}$:

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{|C|}{2}$$

ONDE:

$$C = \frac{1}{i} \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle \in \mathbb{R}$$

NOTE QUE O OPERADOR $\frac{1}{i}[A, B]$ É HERMITIANO:

$$\left(\frac{1}{i} [A, B] \right)^{+} = \left(\frac{1}{i} (AB - BA) \right)^{+} = \left(-\frac{1}{i} \right) (BA - AB) = \frac{1}{i} [A, B]$$

TOME AGORA O OPERADOR $\underline{A}$ COMO QUALQUER E $B = H =$ HAMILTIANO DO SISTEMA.

NESSE CASO, SE $\underline{A}$ NÃO DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO:

$$C = \frac{1}{i} \langle \psi | [A, H] | \psi \rangle = \hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt}$$

E TEMOS:

$$\Delta A \, \Delta H \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|$$

OU:

$$\frac{\Delta A}{|d\langle A \rangle / dt|} \, \Delta H \geq \frac{\hbar}{2}$$

A QUANTIDADE $\frac{\Delta A}{|d\langle A \rangle / dt|}$ PODE SER VISTA COMO UMA MEDIDA DE τ, A VARIAÇÃO TEMPORAL TÍPICA NUM ESTADO $|\psi(t)\rangle$, SE USARMOS O OBSERVÁVEL A COMO "RELÓGIO". DAÍ SEGUE:

$$\tau \, \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

AQUI DADA DE UMA FORMA PRECISA E BEM DEFINIDA.