DIFERENÇA ENTRE SUPERPOSIÇÃO LINEAR E MISTURA ESTATÍSTICA

SUPONHA UM OBSERVÁVEL $\underline{A}$ COM AUTO-VALORES E AUTO-VETORES DADOS POR: $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$.
SE O SISTEMA ESTIVER NO ESTADO $|\psi_1\rangle$, A PROBABILIDADE DE SE MEDIR $\underline{a_n}$ É:

$$P_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2$$

SE AGORA O SISTEMA ESTIVER EM $|\psi_2\rangle$, UM ESTADO ORTOGONAL A $|\psi_1\rangle$ $(\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0)$, A PROBABILIDADE DE SE MEDIR $\underline{a_n}$ É:

$$P_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

CONSIDERE AGORA UMA SUPERPOSIÇÃO LINEAR

$$|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle \qquad |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$$

TAL QUE $\langle\psi|\psi\rangle = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ SE $|\psi_1\rangle$ E $|\psi_2\rangle$ ESTIVEREM NORMALIZADOS.

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1.$$

UMA MISTURA ESTATÍSTICA DOS ESTADOS $|\psi_1\rangle$ E $|\psi_2\rangle$ COM PESOS $|\lambda_1|^2$ E $|\lambda_2|^2$, RESPECTIVAMENTE, CORRESPONDE A UMA SITUAÇÃO EM QUE A PROBABILIDADE DE SE MEDIR $\underline{a_n}$ SEJA:

$$P_{MIST}(a_n) = |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n)$$

ISSO OCORRERIA SE TIVÉSSEMOS UM "ENSEMBLE" DE $\underline{N}$ ESTADOS DO SISTEMA EM QUE:

$|\lambda_1|^2 N = N_1$ ESTÃO NO ESTADO $|\psi_1\rangle$

$|\lambda_2|^2 N = N_2$ " " " $|\psi_2\rangle$

PORÉM, O ESTADO $|\psi\rangle$ ACIMA NÃO CORRESPONDE A ESSA MISTURA ESTATÍSTICA. DE FATO:

$$P_\psi(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

$$= |\lambda_1|^2 |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\lambda_1^* \lambda_2 \langle u_n|\psi_1\rangle^* \langle u_n|\psi_2\rangle\right] =$$

$$= |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\left[\lambda_1^* \lambda_2 \langle u_n|\psi_1\rangle^* \langle u_n|\psi_2\rangle\right]$$

NOTEM A PRESENÇA DO "TERMO DE INTERFERÊNCIA", QUE NOS MOSTRA QUE UMA SUPERPOSIÇÃO LINEAR DE ESTADOS <u>NÃO REPRESENTA UMA MISTURA ESTATÍSTICA.</u>

MEDIDAS INTERMEDIÁRIAS

CONSIDERE 3 OBSERVÁVEIS, $\underline{A}$, $\underline{B}$ E $\underline{C}$, QUE NÃO COMUTAM ENTRE SI. SEUS AUTO-VALORES E AUTO-VETORES SÃO:

$$\left.\begin{aligned} A|a_n\rangle &= a_n|a_n\rangle \\ B|b_\ell\rangle &= b_\ell|b_\ell\rangle \\ C|c_k\rangle &= c_k|c_k\rangle \end{aligned}\right\} \text{TODOS NORMALIZADOS E NÃO-DEGENERADOS}$$

SUPONHA QUE O ESTADO INICIAL SEJA $|a_n\rangle$. CONSIDERE 2 PROTOCOLOS DE MEDIDAS:

1) MEDE-SE $\underline{C}$: A PROBABILIDADE DE SE OBTER $\underline{c_k}$ É:

$$P_n(c_k) = |\langle c_k|a_n\rangle|^2$$

2) MEDE-SE PRIMEIRO $\underline{B}$ E, LOGO APÓS, $\underline{C}$: A PROBABILIDADE DE SE OBTER $\underline{b_\ell}$ E $\underline{c_k}$ NESSAS MEDIDAS É:

$$P_n(b_\ell)\, P_\ell(c_k) = |\langle b_\ell|a_n\rangle|^2\, |\langle c_k|b_\ell\rangle|^2$$

ONDE USAMOS QUE O ESTADO APÓS A MEDIDA DE $\underline{B}$ "COLAPSA" EM $|b_\ell\rangle$

PODEMOS COMPARAR OS DOIS PROTOCOLOS DA SEGUINTE MANEIRA. USANDO O FECHAMENTO DE B, O PROTOCOLO 1) NOS DÁ:

$$P_n(c_k) = |\langle c_k|a_n\rangle|^2 = \left|\sum_\ell \langle c_k|b_\ell\rangle\langle b_\ell|a_n\rangle\right|^2$$

$$= \sum_\ell \langle c_k|b_\ell\rangle\langle b_\ell|a_n\rangle \sum_{\ell'} \langle c_k|b_{\ell'}\rangle^* \langle b_{\ell'}|a_n\rangle^* =$$

SEPARANDO OS TERMOS COM $\ell=\ell'$ DOS TERMOS COM $\ell\neq\ell'$:

$$= \sum_\ell |\langle c_k|b_\ell\rangle|^2 |\langle b_\ell|a_n\rangle|^2 +$$

$$+ \sum_{\ell\neq\ell'} \langle c_k|b_\ell\rangle\langle c_k|b_{\ell'}\rangle^* \langle b_\ell|a_n\rangle\langle b_{\ell'}|a_n\rangle^*$$

$$= \sum_\ell P_n(b_\ell)\, P_\ell(c_k) + \text{TERMOS DE INTERFERÊNCIA}$$

PORTANTO, AO ESCREVERMOS:

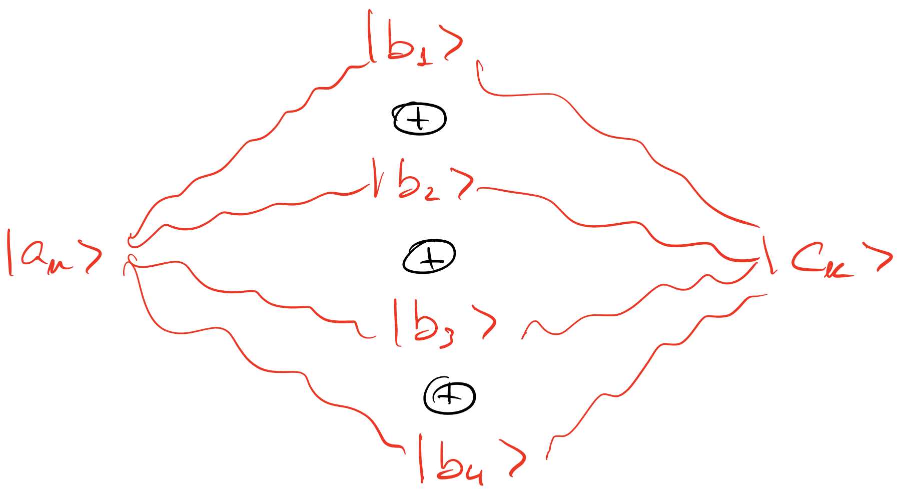
$$\langle c_k|a_n\rangle = \sum_\ell \langle c_k|b_\ell\rangle\langle b_\ell|a_n\rangle$$

E TOMARMOS O MÓDULO QUADRADO, APARECEM TERMOS DE INTERFERÊNCIA.

PICTORICAMENTE:

$$\langle c_k|a_m\rangle = \sum_l \langle c_k|b_l\rangle\langle b_l|a_m\rangle$$

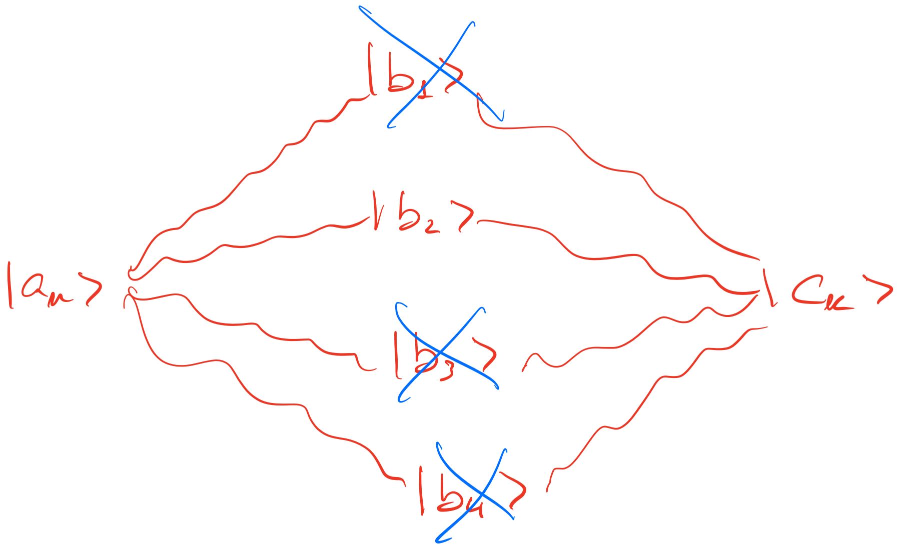
É COMO:



OU SEJA, PARA IR DE $|a_m\rangle$ ATÉ $|c_k\rangle$, SOMAMOS TODAS AS AMPLITUDES DE CADA "TRAJETÓRIA" QUE PASSA POR CADA $|b_l\rangle$ INTERMEDIÁRIO. A PROBABILIDADE FINAL É O MÓDULO QUADRADO DA SOMA DE AMPLITUDES, QUE DÁ ORIGEM A INTERFERÊNCIAS.

NOTE A GRANDE SEMELHANÇA COM UM EXPERIMENTO DE INTERFERÊNCIA COM VÁRIAS FENDAS.

OLHANDO AGORA PARA O PROTOCOLO 2), VEMOS QUE A MEDIDA INTERMEDIÁRIA DE <u>B</u>, "BLOQUEIA" TODAS AS TRAJETÓRIAS QUE <u>NÃO</u> PASSAM POR $|b_\ell\rangle$, DESTRUINDO ASSIM O PADRÃO DE INTERFERÊNCIA:



$$\Rightarrow P_m(b_\ell)\, P_\ell(c_n) = |\langle b_\ell | a_m\rangle|^2\, |\langle b_\ell | c_n\rangle|^2$$

A MEDIDA INTERMEDIÁRIA DE <u>B</u> PROJETA (COLAPSA) O ESTADO EM UM DOS AUTO-ESTADOS DE B.

OU SEJA, AO DEIXARMOS APENAS UMA FENDA ABERTA, DESTRUÍMOS O PADRÃO DE INTERFERÊNCIA.

POSTULADO 5 (COLAPSO DA FUNÇÃO DE ONDA) PARA ESPECTROS CONTÍNUOS

O POSTULADO DO COLAPSO DO ESTADO APÓS A MEDIDA DEVE SER REFORMULADO QUANDO O ESPECTRO DO OBSERVÁVEL É CONTÍNUO. NESSE CASO:

$$A|v_\alpha\rangle = \alpha|v_\alpha\rangle \qquad \alpha \in \text{INTERVALO REAL}$$

NÃO FAZ SENTIDO FALAR EM UM APARATO MEDIDOR CAPAZ DE SELECIONAR APENAS UM VALOR DE $\underline{\alpha}$. O MAIS COMUM É QUE O APARATO SEJA CAPAZ DE MEDIR SE $\underline{\alpha}$ PERTENCE A UM DADO INTERVALO:

APARATO DE MEDIDA DETERMINA SE

$$\alpha \in \left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$$

NESSE CASO, SE A RESPOSTA DO APARATO À PERGUNTA ACIMA É <u>SIM</u>, OU SEJA, $\alpha \in \left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$, ENTÃO, APÓS A MEDIDA, O ESTADO COLAPSA PARA

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{MEDIDA DE } \underline{A}]{} |\psi'\rangle = \frac{P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle}}$$

ONDE:

$$P_{\Delta\alpha}(\alpha_0) = \int_{\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} |v_\alpha\rangle\langle v_\alpha| \, d\alpha$$

É O PROJETOR NO SUB-ESPAÇO DE $\alpha \in \left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$.

<u>EXEMPLO</u>: MEDIDA DA POSIÇÃO $\underline{X}$ DE UMA PARTÍCULA PARA DETERMINAR SE $x \in I = [x_1, x_2]$. O PROJETOR RELEVANTE É:

$$P_I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, |x,y,z\rangle\langle x,y,z|$$

NOTE QUE NÃO ESTAMOS INTERESSADOS NO VALOR DE y E z, POR ISSO A INTEGRAÇÃO SOBRE ELES NO INTERVALO $(-\infty, +\infty)$.

LEMBRE QUE A PROBABILIDADE DE ACHAR A POSIÇÃO X NO INTERVALO $\underline{I}$ É:

$$P(x \in I) = \langle \psi | P_I | \psi \rangle$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \underbrace{\langle \psi | x, y, z \rangle}_{\psi^*(x,y,z)} \underbrace{\langle x, y, z | \psi \rangle}_{\psi(x,y,z)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, |\psi(x,y,z)|^2$$

SE O RESULTADO DA MEDIDA FOR: SIM, A POSIÇÃO DA PARTÍCULA ESTÁ NO INTERVALO I, ENTÃO, APÓS:

$$\rightarrow |\psi'\rangle = \frac{1}{N} P_I |\psi\rangle = \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, |x,y,z\rangle\langle x,y,z|\psi\rangle$$

ONDE $\underline{N}$ É UMA CONSTANTE DE NORMALIZAÇÃO. A FUNÇÃO DE ONDA CORRESPONDENTE A $|\psi'\rangle$ É:

$$\langle x,y,z|\psi'\rangle = \psi'(x,y,z) =$$

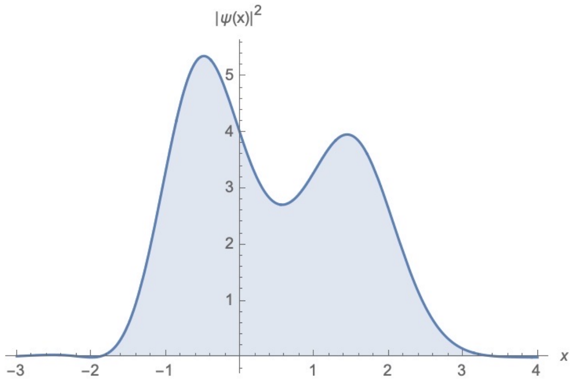
$$= \frac{1}{N}\int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \langle x,y,z|x',y',z'\rangle \langle x,y,z|\psi\rangle =$$

(NOTE A MUDANÇA DOS SÍMBOLOS DAS VARIÁVEIS DE INTEGRAÇÃO)

$$= \frac{1}{N}\int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\,\psi(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{N}\int_{x_1}^{x_2} dx' \, \delta(x-x')\,\psi(x',y,z)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N}\psi(x,y,z) & \text{SE } x \in I = [x_1, x_2] \\ 0 & \text{SE } x \notin I \end{cases}$$



$\overset{P_I}{\Longrightarrow}$