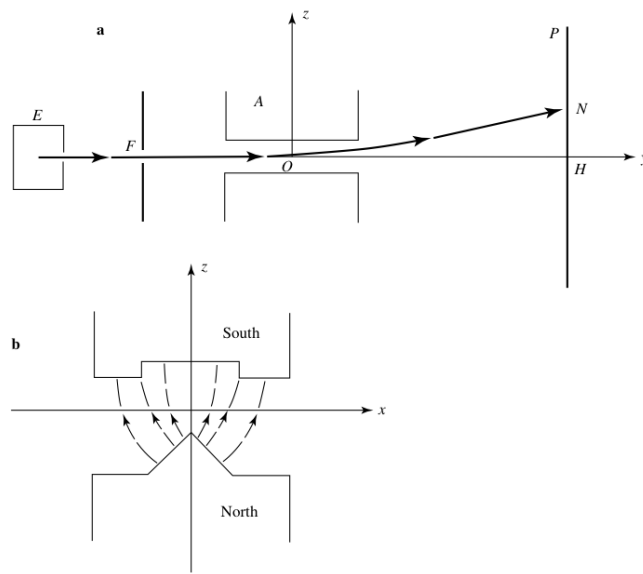


## CAPÍTULO 4:

### APLICAÇÕES DOS POSTULADOS: SPIN- $\frac{1}{2}$ E SISTEMAS DE DOIS NÍVEIS

O CONTEXTO MAIS SIMPLES PARA DISCUTIRMOS APLICAÇÕES DOS POSTULADOS É EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO 2. EXISTEM CASOS MUITO IMPORTANTES FÍSICAMENTE QUE SÃO ESPAÇOS DE DIMENSÃO 2. O PRIMEIRO QUE DISCUTIREMOS É UMA **PARTÍCULA DE SPIN  $\frac{1}{2}$** .

O APARATO EXPERIMENTAL DE STERN-GERLACH  
UM EXPERIMENTO MUITO IMPORTANTE E FUNDAMENTAL NO DESENVOLVIMENTO DA MECÂNICA QUÂNTICA FOI O **EXPERIMENTO DE OTTO STERN E WALTHER GERLACH, OU SIMPLEMENTE, STERN-GERLACH**. ESSE EXPERIMENTO DEMONSTRA A QUANTIZAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR DE MANEIRA MUITO IMPACTANTE E SERVE COMO PLATAFORMA DE EXPLORAÇÃO DOS POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA ELE FOI REALIZADO EM 1922.



ÁTOMOS SÃO GERADOS NO FORNO E E COLIMADOS PELA FENDA F, INCIDINDO NUMA REGIÃO DE CAMPO MAGNÉTICO **NÃO UNIFORME**, NA REGIÃO PRÓXIMA À ORIGEM. OS ÁTOMOS SÃO NEUTROS (ÁTOMOS DE PRATA, NO EXPERIMENTO ORIGINAL). O CAMPO MAGNÉTICO PODE SER TOMADO COMO TENDO APENAS COMPONENTES  $B_x$  E  $B_z$  (VER FIGURA b), OS ÁTOMOS PASSAM PELA REGIÃO DO CAMPO E ATINGEM O ANTEPARO P. A FORÇA RESULTANTE NO ÁTOMO TEM ORIGEM APENAS NO **MOMENTO MAGNÉTICO DO ÁTOMO:  $\vec{M}$** , JÁ QUE ELE É NEUTRO.

## DESCRIÇÃO CLÁSSICA DA DEFLEXÃO

UM MOMENTO MAGNÉTICO  $\vec{M}$  NUM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO ESTÁ SUJEITO A FORÇAS E TORQUES. O TORQUE EXISTE MESMO QUANDO O CAMPO É UNIFORME E É DADO POR:

$$\vec{N} = \vec{M} \times \vec{B}$$

A FORÇA SO EXISTE SE O CAMPO FOR NÃO UNIFORME:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{B})$$

EM AMBOS OS CASOS, ESTAMOS SUPONDO QUE O MOMENTO MAGNÉTICO TEM UM TAMANHO MUITO MENOR QUE AS VARIAÇÕES ESPACIAIS DO CAMPO.

MODELOS SIMPLES CLÁSSICOS DE DISTRIBUIÇÕES DE CARGAS GIRANTES NOS DÃO QUE O MOMENTO ANGULAR TOTAL  $\vec{L}$  É PROPORCIONAL AO MOMENTO MAGNÉTICO:

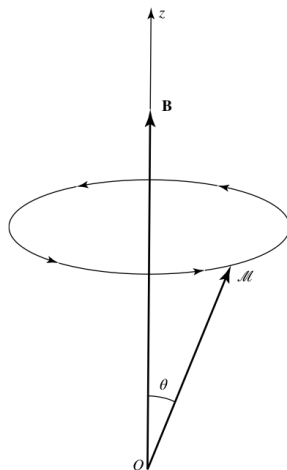
$$\vec{M} = \gamma \vec{L} \quad \gamma = \text{FATOR GIROMAGNÉTICO}$$

ESSE RESULTADO É VÁLIDO TAMBÉM EM MECÂNICA QUÂNTICA, COMO VEREMOS MAIS ADIANTE.

SENDO ASSIM, DE:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}$$

CUJA SOLUÇÃO É A PRECESSÃO (DE LARMOR) DO VETOR  $\vec{L}$  EM TORNO DE  $\vec{B}$ , MANTENDO O ÂNGULO ENTRE ELAS CONSTANTE:



SE  $\vec{B} = B \hat{z}$ , É FÁCIL RESOLVER A EQ. ACIMA E OBTER:  $L_z = \text{CONST.}$

$$L_x = L_{\perp} \sin(\omega_0 t) \quad ; \quad L_y = L_{\perp} \cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \gamma B_z \quad |\vec{L}| = \sqrt{L_{\perp}^2 + L_z^2} = \text{CONST.}$$

PARA CALCULAR O EFEITO DO TORQUE, PODEMOS APROXIMAR:

$$\vec{L} \sim \langle \vec{L} \rangle \cong L_z \vec{z}$$

JÁ QUE A PRECESSÃO EM TORNO DE  $\vec{B}$  É MUITO RÁPIDA. PARA VALORES TÍPICOS ( $\Delta y = 1 \mu\text{m}$ ,  $T = 400 \text{ K}$ ,  $B_z \approx 1 \text{ T}$ ),  $\vec{L}$  PRECESSIONA  $\sim 10^3$  VEZES ENQUANTO PASSA PELO APARATO.

ASSIM, DESPREZANDO  $L_x$  E  $L_y$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \cong \gamma \vec{\nabla} (L_z B_z) = \gamma L_z \vec{\nabla} B_z$$

PELA CONFIGURAÇÃO DE CAMPO DA FIGURA, VEMOS QUE:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

E QUE NO PLANO  $yz$ ,  $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$  POR SIMETRIA. ASSIM, APENAS  $F_z$  É NÃO NULA:

$$F_z = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} L_z \quad \text{E É PROPORCIONAL A } L_z$$

TOMANDO  $\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \text{CONST.}$ , VEMOS QUE OS  
ÁTOMOS SÃO DEFLETIDOS NA DIREÇÃO  $z$   
POR UMA FORÇA PROPORCIONAL A  $L_z$ .

PARA USO POSTERIOR, É BOM SABER QUE  
A FORÇA E O TORQUE SÃO DERIVADOS  
DE UMA EXPRESSÃO DA ENERGIA DO  
MOMENTO MAGNÉTICO NO CAMPO DADA  
POR:

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma \vec{L} \cdot \vec{B}$$

RESULTADOS:

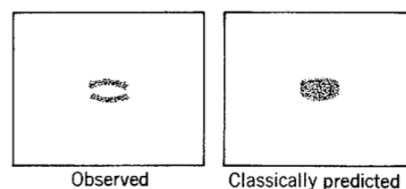
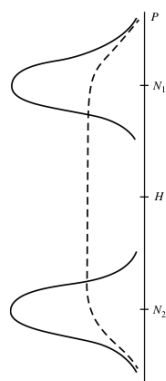
COMO ESPERAMOS UMA DISTRIBUIÇÃO ISOTRÓ-  
PICA DE  $\vec{L}$  SAINDO DO FORNO, CLASSICAMENTE  
ESPERAMOS DEFLEXÕES COM TODOS OS  
VALORES POSSÍVEIS CORRESPONDENTES  
A:

$$L_z \in [-|\vec{L}|, +|\vec{L}|]$$

ONDE  $|\vec{L}|$  É O MÓDULO DO MOMENTO ANGULAR  
TOTAL DO ÁTOMO.

OS RESULTADOS, NO ENTANTO, INDICAM QUE  $L_z$  ASSUME APENAS 2 VALORES:

CORTE NO  
PLANO  $yz$   
NO ANTEPARO



A LINHA TRACEJADA NA FIGURA À ESQUERDA CORRESPONDE À EXPECTATIVA CLÁSSICA. AS LINHAS CONTÍNUAS CORRESPONDEM AO OBSERVADO. VEJA TAMBÉM A FIGURA DA DIREITA.

OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS SUGEREM QUE  $L_z$  É QUANTIZADO E SÓ PODE ASSUMIR DOIS VALORES. A TEORIA DO MOMENTO ANGULAR QUÂNTICO, A SER DESENVOLVIDA MAIS ADIANTE, NOS MOSTRADA QUE ISSO CORRESPONDE AO CASO DE SPIN  $Y_2$ , E OS VALORES POSSÍVEIS SÃO:

$$= \frac{\hbar}{2} \quad \text{OU} \quad + \frac{\hbar}{2}$$

O EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH, PORTANTO, PODE SER ENCARADO COMO UM APARATO CAPAZ DE MEDIR UMA COMPONENTE QUALQUER DE  $\vec{L}$  (EVIDENTEMENTE, GIRANDO O APARATO, PODE-SE MEDIR QUALQUER COMPONENTE DE  $\vec{L}$ ). COMO A MEDIDA É FEITA DEFLETINDO ESPECIALMENTE O FEIXE, A TÉCNICA É CHAMADA DE **QUANTIZAÇÃO ESPACIAL**.

É INTERESSANTE ENTENDER PORQUE O ÁTOMO DE PRATA TEM SPIN  $\frac{1}{2}$ . SUA CONFIGURAÇÃO ELETRÔNICA NO ESTADO FUNDAMENTAL É:



O CAROÇO DE Kr TEM CAMADAS FECHADAS COM MOMENTO ANGULAR NULO. O MESMO SE APLICA À CAMADA FECHADA  $4d^{10}$ . O ÚLTIMO ELÉTRON TEM MOMENTO ANGULAR ORBITAL NULO ( $S \rightarrow l=0$ ) E MOMENTO ANGULAR DE SPIN  $S = \frac{1}{2}$ . O MOMENTO ANGULAR TOTAL É, PORTANTO,  $\frac{1}{2}$ .



## O ESPAÇO DE ESTADOS E $S_z$

ASSOCIAMOS A  $L_z$  UM OBSERVÁVEL  $S_z$  COM DOIS AUTO-VETORES, QUE ASSUMIREMOS NÃO-DEGENERADOS, COM A SEGUINTE NOTAÇÃO:

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

$$S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

ONDE:  $\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$  E  $\langle + | - \rangle = 0$

$S_z$  FORMA UM CLOD E O ESPAÇO É BIDIMENSIONAL:

$$|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| = \mathbb{1} \quad (\text{FECHAMENTO})$$

UM ESTADO GENÉRICO NORMALIZADO PODE SER EXPANDIDO COMO:

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle ; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

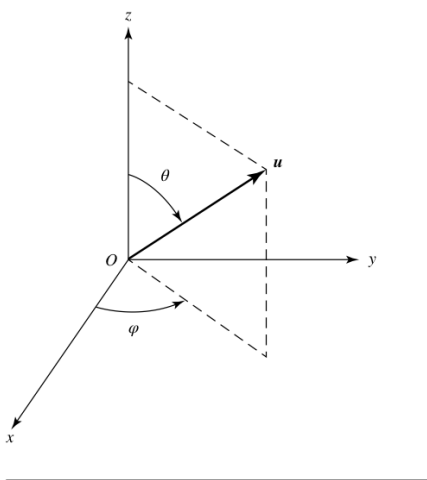
A MATRIZ QUE REPRESENTA  $S_z$  NESTA BASE É:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$$

OS OUTROS OBSERVÁVEIS ASSOCIADOS A  $L_x$  E  $L_y$  SÃO, RESPECTIVAMENTE  $S_x$  E  $S_y$ , CUJA REPRESENTAÇÃO MATRICIAL É:

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

NOTE QUE  $S_x$ ,  $S_y$  E  $S_z$  NÃO COMUTAM ENTRE SI. UMA COMPONENTE NUMA DIREÇÃO ARBITRÁRIA DADA POR UM UNITÁRIO  $\hat{u}$ , CARACTERIZADO POR ÂNGULOS ESFÉRICOS  $(\theta, \phi)$



$$E' : \vec{L} \cdot \hat{u} = L_x \sin \theta \cos \phi + L_y \sin \theta \sin \phi + L_z \cos \theta$$

$$\Rightarrow S_u = S_x \sin \theta \cos \phi + S_y \sin \theta \sin \phi + S_z \cos \theta = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\phi} \\ \sin \theta e^{-i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

QUALQUER COMPONENTE DE  $\vec{S}$  ( $S_x, S_y, S_z$  ou  $S_u$ ) TEM COMO AUTO-VALORES:

$$+\frac{\hbar}{2} \quad \text{E} \quad -\frac{\hbar}{2}$$

O QUE DECORRE DO FATO DE QUE A ESCOLHA DA "DIREÇÃO DE QUANTIZAÇÃO" É COMPLETAMENTE ARBITRÁRIA, CORRESPONDENDO SIMPLEMENTE A UMA ESCOLHA DO SISTEMA DE EIXOS (PODE-SE SEMPRE ESCOLHER  $\hat{u} = \hat{z}$ ).

EVIDENTEMENTE, A BASE  $|+\rangle, |-\rangle$  CORRESPONDE A UMA ESCOLHA PARTICULAR DE  $\hat{z}$ . UMA VEZ ESCOLHIDA, OS AUTO-VETORES DE  $S_x, S_y$  E  $S_u$  SÃO:

$$| \pm \rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [ | + \rangle \pm | - \rangle ]$$

$$| \pm \rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [ | + \rangle \pm i | - \rangle ]$$

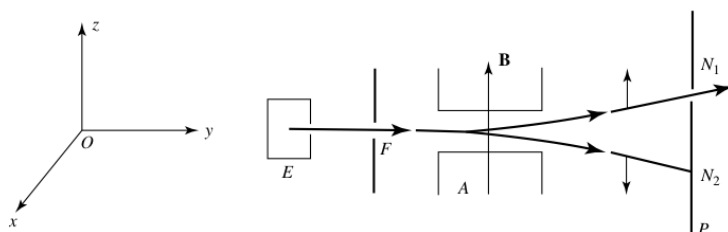
$$| + \rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} | + \rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} | - \rangle$$

$$| - \rangle_u = -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} | + \rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} | - \rangle$$

TODOS ESSES RESULTADOS PODEM SER FACILMENTE DEDUZIDOS

## PREPARAÇÃO DE ESTADOS

OS FEIXES DEFLETIDOS NO APARATO DE SG JÁ SAEM PREPARADOS EM ESTADOS ESPECÍFICOS. USANDO FENDAS NO ANTEPARO, PODEMOS SELECIONAR ESSES ESTADOS

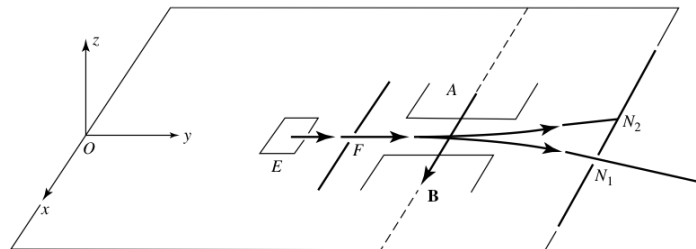


AS PARTÍCULAS QUE PASSAM POR  $N_1$  ACIMA ESTÃO NO ESTADO  $|+\rangle$  E AS DE  $N_2$  ESTÃO NO ESTADO  $|-\rangle$ . LEMBRE QUE A FORÇA É:

$$F_z = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} L_z \quad \text{ONDE } \gamma < 0 \text{ E } \frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$$

LOGO  $F_z > 0$  SE  $L_z > 0$  E VICE-VERSA. ISSO MOSTRA COMO PREPARAR OS ESTADOS  $|+\rangle$  E  $|-\rangle$ .

O MESMO FEIXE PODE SER USADO PARA PREPARAR ESTADOS  $|+\rangle_x$  OU  $|-\rangle_x$ ,



BASTANDO PARA ISSO GIRAR O APARATO DE  $\pi/2$  EM TORNO DE  $\hat{y}$ .

DIRECIONANDO O FEIXE EM OUTRAS DIREÇÕES E GIRANDO O APARATO APROPRIADAMENTE, PODEMOS SELECIONAR QUALQUER ESTADO DO TIPO  $|\pm\rangle_u$ .

A PERGUNTA É: É POSSÍVEL PREPARAR QUALQUER ESTADO DESSA MANEIRA?

A RESPOSTA É SIM, UM ESTADO GÊNÉRICO É

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \text{ ONDE } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

PODEMOS ESCOLHER:

$$|\alpha| = \cos \frac{\theta}{2} \quad |\beta| = \sin \frac{\theta}{2} \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \in [0, +\infty)$$

PARA AS FASES, ESCOLHEENDO:

$$\alpha = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\lambda_1} \quad \beta = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\lambda_2}$$

PODE-SE FAZER, SEM PERDA DE GENERALIDADE

$$\lambda_1 = -\frac{\varphi}{2} + \mu \quad ; \quad \lambda_2 = +\frac{\varphi}{2} + \mu$$

E

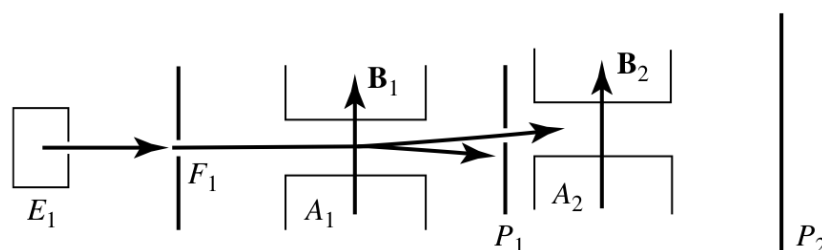
$$\begin{aligned} |+\rangle &= e^{i\mu} \left[ \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \right] \\ &= e^{i\mu} |+\rangle_u \end{aligned}$$

ONDE SABEMOS QUE A FASE GLOBAL  $e^{i\mu}$  É IRRELEVANTE. ASSIM, O ESTADO  $|+\rangle_u$  GENÉRICO CORRESPONDE AO ESTADO MAIS GERAL POSSÍVEL. DADOS  $\alpha$  E  $\beta$ , ESCOLHEMOS  $(\theta, \varphi)$  A TRAVÉS DE:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|\beta|}{|\alpha|} \quad \varphi = \lambda_2 - \lambda_1 = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$$

PREPARANDO ESTADOS ADEQUADOS COM APARATOS DE SG E EM SEGUIDA USANDO OUTRO APARATO DE SG PARA MEDIR  $L_z$ , PODEMOS TESTAR OS POSTULADOS.

EXPERIMENTO 1 :

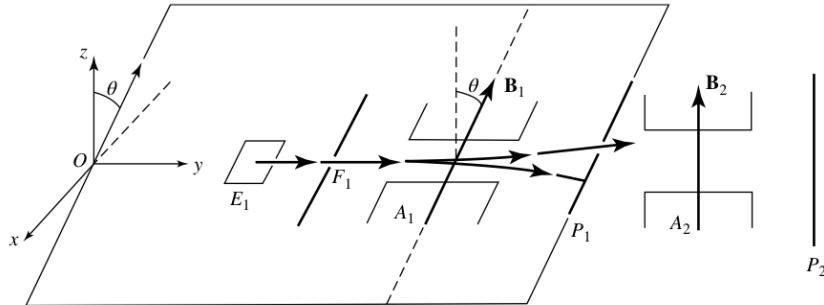


DOIS APARATOS COM CAMPOS NA DIREÇÃO  $z$ . O PRIMEIRO PREPARA O SISTEMA NO ESTADO  $|+\rangle$  (FEIXE SUPERIOR). O 2º MEDE  $L_z$  ( $S_z$ ). É CLARO QUE O ÚNICO RESULTADO POSSÍVEL É

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \text{ COM } P(+\frac{\hbar}{2}) = |\langle + | + \rangle|^2 = 1$$

E TODOS OS ÁTOMOS SELECIONADOS POR  $\vec{B}_1$  SÃO DEFLETIDOS PARA CIMA.

## EXPERIMENTO 2:



COM  $\vec{B}_2$  NO PLANO  $xz$ , FAZENDO UM ÂNGULO  $\theta$  COM O EIXO  $z$  ( $\varphi=0$ ), PREPARA-SE O ESTADO:

$$|+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

EM SEGUIDA, MEDE-SE COM  $\vec{B}_2 \parallel \hat{z}$ .

$$\Rightarrow P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle + | + \rangle_u|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle - | + \rangle_u|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

EXPERIMENTO 3: PREPARA-SE O MESMO ESTADO DO EXPERIMENTO 2, MAS MEDE-SE COM  $\vec{B}_2 \parallel \hat{x}$ :

$$P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle + | + \rangle_u|^2 = \frac{1}{2} |(\langle + | \langle - |) | + \rangle_u|^2 =$$



$$= \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 = \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \left| \langle -1 | \psi \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left| (\langle +1 | - \langle -1 |) | \psi \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

### VALORES MÉDIOS

$$1) \langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

$$2) \langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\hbar}{2} \sin \theta$$

QUE TAMBÉM PODEM SER OBTIDOS DIRETAMENTE DA REPRESENTAÇÃO MATRICIAL:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle S_z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ -\sin \theta/2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} [2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}] = \frac{\hbar}{2} \sin \theta
\end{aligned}$$

PARA O ESTADO GENÉRICO  $|+\rangle_u$ , OBTENEMOS:

$$\langle + | S_x | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\langle + | S_y | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\langle + | S_z | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

QUE CORRESPONDEM ÀS COMPONENTES  
DE UM VETOR **CLÁSSICO** :

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{2} \hat{u}$$

## DINÂMICA EM UM CAMPO MAGNÉTICO

A DINÂMICA É DETERMINADA PELA ES.  
O HAMILTONIANO É:

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$$

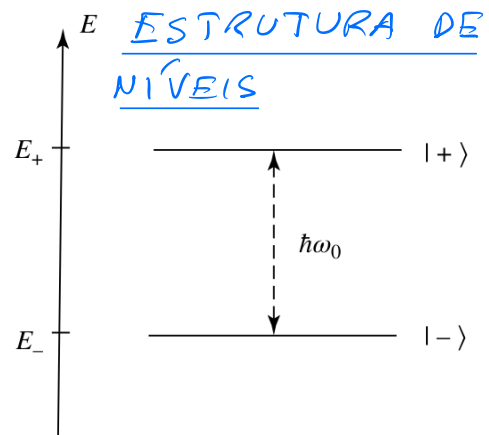
PARA UM CAMPO NA DIREÇÃO  $\hat{z}$ :  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$

$$H = -\gamma B_0 S_z \equiv \omega_0 S_z \quad \omega_0 \equiv -\gamma B_0 > 0$$

OS AUTO-VETORES DE H SÃO OS MESMOS  
DE  $S_z$ :

$$H |+\rangle = \frac{\hbar \omega_0}{2} |+\rangle$$

$$H |-\rangle = -\frac{\hbar \omega_0}{2} |-\rangle$$



HÁ UMA FREQUÊNCIA DE BOHR!

$$\nu = \frac{E_+ - E_-}{h} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

SE O ESTADO INICIAL É O ESTADO GÊNÉRICO:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

SUA EVOLUÇÃO TEMPORAL SOB  $\underline{H}$  É IMEDIATA  
JÁ QUE ELE JÁ ESTÁ ESCRITO NA BASE  
DE  $\underline{H}$ :

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} e^{-iE_+t/\hbar} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} e^{-iE_-t/\hbar} |-\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} |-\rangle$$

NOTE QUE O ESTADO RETÉM A FORMA DE  
 $|+\rangle_u$ , MAS COM

$$\theta(t) = \theta \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$$

DONDE:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos(\varphi_0 + \omega_0 t) \\ \langle S_y \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin(\varphi_0 + \omega_0 t) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{OSCILAM COM A} \\ \text{FREQUÊNCIA DE BOHR} \\ \text{JÁ QUE NÃO COMUTAM} \\ \text{COM } \underline{H} \end{array} \right\}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\theta \quad (\text{INDEPENDENTE DO TEMPO} \\ \text{JÁ QUE } [S_z, \underline{H}] = 0)$$

ASSIM, VEMOS QUE OS VALORES MÉDIOS EXECUTAM  
A MESMA PRECESSÃO DE LARMOR QUE O  
RESULTADO CLÁSSICO.