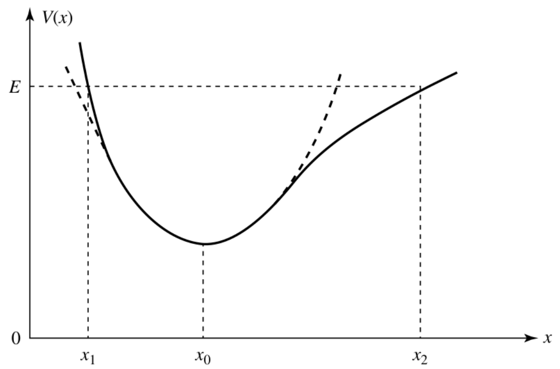
CAPÍTULO 5: O OSCILADOR HARMÔNICO UNI-DIMENSIONAL

O OSCILADOR HARMÔNICO UNIDIMENSIONAL TEM MUITAS APLICAÇÕES EM FÍSICA, MUITO ALÉM DO TRADICIONAL SISTEMA MASSA-MOLA. SEMPRE QUE TIVERMOS UM GRAU DE LIBERDADE QUE FAZ PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UM MÍNIMO LOCAL, SE O MÍNIMO FOR QUADRÁTICO, TEREMOS UM OSCILADOR HARMÔNICO 1D (OH 1D).



ASSIM, EXPANDINDO O POTENCIAL EM TORNO DE UM MÍNIMO EM $x = x_0$:

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

TEREMOS CLASSICAMENTE:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -V'(x) = -V''(x_0)(x-x_0)$$

REDEFININDO $x' \equiv x - x_0$ E $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x'}{dt^2} = -V''(x_0)\,x' \equiv -k\,x'$$

QUE É A EQUAÇÃO CLÁSSICA DO OH1D.
A PARTIR DE AGORA, VOLTAMOS A USAR $\underline{x}$ AO INVÉS DE x'.

A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO CLÁSSICA É:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi)$$

ONDE $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$ E x_m E φ SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS DETERMINADAS PELAS CONDIÇÕES INICIAIS.

A ENERGIA MECÂNICA TOTAL:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ONDE DESPREZAMOS $V(x_0)$, UMA CONSTANTE QUE SÓ DÁ O PONTO DE REFERÊNCIA DA ENERGIA, OPTAMOS POR USAR $\underline{\omega}$ AO INVÉS DE k OU $V''(x_0)$. A ENERGIA TOTAL É CONSERVADA (SISTEMA CONSERVATIVO), COMO PODE SER VISTO CLARAMENTE DA SOLUÇÃO GERAL:

$$\dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\omega^2}{2} x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$$ QUE NÃO DEPENDE DO TEMPO.

A ENERGIA NOS FORNECE O HAMILTONIANO DO OH 1D:

$$H[p,x] = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

USANDO AS REGRAS DE QUANTIZAÇÃO, O HAMILTONIANO QUÂNTICO FICA:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \quad ; \quad [X, P] = i\hbar$$

A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO É, NA REPRESENTAÇÃO $\underline{X}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\varphi(x)=E\varphi(x)$$

QUE PODE SER RESOLVIDA USANDO O MÉTODO DE EXPANSÃO EM SÉRIE (COMPLEMENTO C_V). AQUI SEGUIREMOS UMA ROTA DIFERENTE, USANDO UM MÉTODO ALGÉBRICO, MAIS PODEROSO E DE CONSEQUÊNCIAS POSTERIORES MAIS PROFUNDAS.

MÉTODOS DOS OPERADORES "ESCADA"

É MAIS INTERESSANTE TRABALHAR COM OPERADORES ADIMENSIONAIS. COM AS CONSTANTES DISPONÍVEIS m, ω, $\hbar$ PODEMOS FORMAR UMA COMBINAÇÃO COM DIMENSÃO DE MOMENTO LINEAR:

$$[m\hbar\omega] = [mE] = [p^2]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{P} = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

EVIDENTEMENTE, $[p] = \left[\frac{\hbar}{L}\right]$, E

$$\left[\frac{\hbar}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right] = L = \left[\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right]$$

DONDE DEFINIMOS:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

RELAÇÃO DE COMUTAÇÃO:

$$\boxed{[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{1}{\hbar}[x, p] = i}$$

ASSIM:

$$H = \frac{1}{2m}(m\hbar\omega)\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\hat{X}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{X}^2\right)$$

FINALMENTE, DEFININDO UM HAMILTONIANO ADIMENSIONAL:

$$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)$$

DEFINIMOS AGORA:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, X + i \frac{P}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

E

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, X - i \frac{P}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

A TRANSFORMAÇÃO INVERSA É:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{+} + a)$$

$$\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^{+} - a)$$

NOTE QUE a^{+} É O HERMITIANO CONJUGADO DE a. NEM a NEM a^{+} SÃO HERMITIANOS.

UM FATO IMPORTANTE É A RELAÇÃO DE COMUTAÇÃO ENTRE $\underline{a}$ E $\underline{a^{+}}$:

$$[a,a^{+}] = \frac{1}{2}[\hat{X}+i\hat{P},\hat{X}-i\hat{P}] = \frac{i}{2}\left([\hat{P},\hat{X}]-[\hat{X},\hat{P}]\right)$$

$$\boxed{[a,a^{+}]=1} \Rightarrow aa^{+}-a^{+}a = 1$$

O OPERADOR $a^{+}a$ TAMBÉM É MUITO IMPORTANTE:

$$a^{+}a = \frac{1}{2}(\hat{X}-i\hat{P})(\hat{X}+i\hat{P}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2+\hat{P}^2+i\hat{X}\hat{P}-i\hat{P}\hat{X})$$

$$a^{+}a = \frac{1}{2}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)+\frac{i}{2}[\hat{X},\hat{P}] = \frac{1}{2}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)-\frac{1}{2}$$

PORTANTO, O HAMILTONIANO $\hat{H}$ FICA:

$$\boxed{\hat{H} = a^{+}a+\frac{1}{2}}$$

ALTERNATIVAMENTE, DA RELAÇÃO DE COMUTAÇÃO

$$\hat{H} = aa^{+}-\frac{1}{2}$$

A COMBINAÇÃO $a^{+}a$ TEM UMA DENOMINAÇÃO ESPECIAL:

$$N = a^{+}a$$

N É HERMITIANO: $N^{+} = (a)^{+}(a^{+})^{+} = a^{+}a = N$.

PODEMOS CALCULAR, PARA USO FUTURO, OS SEGUINTES COMUTADORES:

$$[N,a] = [a^{+}a, a] = a^{+}[a,a] + [a^{+},a]a = -a$$

$$[N,a^{+}] = [a^{+}a, a^{+}] = a^{+}[a,a^{+}] = a^{+}$$

$$\boxed{\begin{aligned}[N,a] &= -a \\ [N,a^{+}] &= a^{+}\end{aligned}}$$

SEGUE QUE:

$$\hat{H} = N + \frac{1}{2}$$

PORTANTO, SE SOUBERMOS OS AUTO-VALORES E AUTO-VETORES DE N TEREMOS OS DE $\hat{H}$.

VAMOS CHAMAR OS AUTO-VALORES DE $\underline{N}$ DE $\underline{\nu}$ E OS AUTO-VETORES CORRESPONDENTES DE $|\varphi_\nu^i\rangle$, ONDE O SUPER-ÍNDICE $\underline{i}$ SERVE PARA DISTINGUIR OS POSSÍVEIS AUTO-VETORES DIFERENTES DE UM AUTO-VALOR DEGENERADO:

$$N|\varphi_\nu^i\rangle = \nu|\varphi_\nu^i\rangle$$

$$\hat{H}|\varphi_\nu^i\rangle = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)|\varphi_\nu^i\rangle$$

$$H|\varphi_\nu^i\rangle = \hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)|\varphi_\nu^i\rangle$$

AUTO-VALORES DE N

PARA ENCONTRARMOS O ESPECTRO DE $\underline{N}$ PRECISAMOS PROVAR ALGUNS LEMAS:

LEMA 1) $\boxed{\nu \geqslant 0}$

SEJA UM $|\varphi_\nu^i\rangle$ QUALQUER. A NORMA DE $a|\varphi_\nu^i\rangle$ É NÃO NEGATIVA:

$$\| a|\varphi_\nu^i\rangle \|^2 = \langle \varphi_\nu^i | a^\dagger a | \varphi_\nu^i \rangle = \langle \varphi_\nu^i | N | \varphi_\nu^i \rangle$$

$$= \nu \langle \varphi_\nu^i | \varphi_\nu^i \rangle \geqslant 0$$

COMO $\langle \varphi_\nu^i | \varphi_\nu^i \rangle > 0 \Rightarrow \boxed{\nu \geqslant 0}$

LEMA 2a) $a|\varphi_{\nu=0}^i\rangle = 0$

COMO NO LEMA ANTERIOR:

$$\| a|\varphi_{\nu=0}^i\rangle \|^2 = 0 \langle \varphi_{\nu=0}^i | \varphi_{\nu=0}^i \rangle = 0$$

MAS, SE UM VETOR TEM NORMA NULA, ELE É O VETOR NULO:

$$a|\varphi_{\nu=0}^i\rangle = 0$$

NA VERDADE, QUALQUER ESTADO DESTRUÍDO POR $\underline{a}$ É AUTO-VETOR DE $\underline{N}$ COM AUTO-VALOR NULO. SEJA $|\varphi\rangle$ TAL QUE:

$$a|\varphi\rangle = 0$$

MULTIPLICANDO PELA ESQUERDA POR $a^\dagger$:

$$a^\dagger a|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow N|\varphi\rangle = 0.$$

LEMA 2b) SE $\nu > 0$, $N(a|\varphi_\nu^i\rangle) = (\nu-1)(a|\varphi_\nu^i\rangle)$
OU SEJA, $a|\varphi_\nu^i\rangle$ É AUTO-VETOR DE $\underline{N}$ COM AUTO-VALOR $(\nu-1)$.

USANDO O COMUTADOR $[N,a] = -a$:

$$(Na - aN)|\varphi_\nu^i\rangle = -a|\varphi_\nu^i\rangle$$

$$\Rightarrow N(a|\varphi_\nu^i\rangle) = aN|\varphi_\nu^i\rangle - a|\varphi_\nu^i\rangle$$
$$= \nu\, a|\varphi_\nu^i\rangle - a|\varphi_\nu^i\rangle$$
$$= (\nu-1)\, a|\varphi_\nu^i\rangle \checkmark$$

POR ESSA PROPRIEDADE, O OPERADOR a É UM OPERADOR DE <u>DESTRUIÇÃO</u> (DE QUANTA DE EXCITAÇÃO, COMO VEREMOS)

LEMA 3a) $a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \neq 0$

TOMANDO A NORMA DE VETOR:

$$\| a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle\|^2 = \langle\varphi_\nu^i| a a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle \quad (\text{USANDO } [a,a^\dagger]=1)$$
$$= \langle\varphi_\nu^i| a^\dagger a + 1 |\varphi_\nu^i\rangle$$
$$= \langle\varphi_\nu^i| N + 1 |\varphi_\nu^i\rangle$$
$$= (\nu+1)\langle\varphi_\nu^i|\varphi_\nu^i\rangle > 0$$

JÁ QUE $\nu \geq 0$ E $\langle\varphi_\nu^i|\varphi_\nu^i\rangle \neq 0$ POR HIPÓTESE.

LOGO,

$$a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \neq 0.$$

LEMA 3b) $N[a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle] = (\nu+1)[a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle]$

DO COMUTADOR $[N, a^\dagger] = a^\dagger$

$$(Na^\dagger - a^\dagger N)|\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$$
$$Na^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger N|\varphi_\nu^i\rangle + a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$$
$$= (\nu+1)\, a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \checkmark$$

POR ESSA PROPRIEDADE, O OPERADOR $a^\dagger$ É UM OPERADOR DE <u>CRIAÇÃO</u> (DE QUANTA DE EXCITAÇÃO, COMO VEREMOS)

DE POSSE DESSES LEMAS, PODEMOS AGORA ENCONTRAR O ESPECTRO DE $\underline{N}$.
A POSSIBILIDADE DE QUE UM AUTO-VALOR $\underline{\nu}$ SEJA NÃO INTEIRO LEVA A UMA CONTRADIÇÃO COM OS LEMAS. DE FATO, SUPONHA QUE $\nu = 3{,}6$. SEGUE DO LEMA 2b QUE A SEGUINTE SEQUÊNCIA É COMPOSTA DE AUTO-VETORES DE $\underline{N}$:

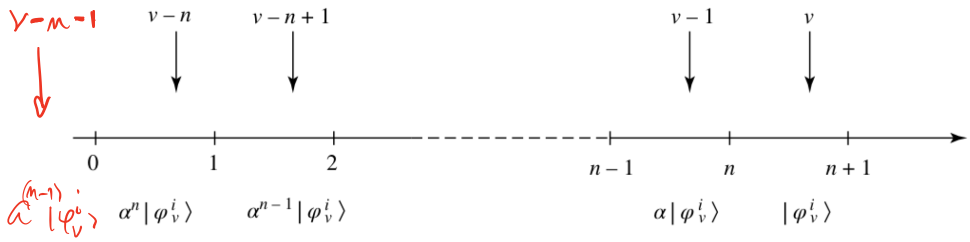
$$a|\varphi^i_{3,6}\rangle = c_1 |\varphi^i_{2,6}\rangle$$

$$a^2|\varphi^i_{3,6}\rangle = c_2 |\varphi^i_{1,6}\rangle$$

$$a^3|\varphi^i_{3,6}\rangle = c_3 |\varphi^i_{0,6}\rangle$$

$$a^4|\varphi^i_{3,6}\rangle = c_4 |\varphi^i_{-0,6}\rangle \; !!$$

OU SEJA, $a^4|\varphi^i_{3,6}\rangle$ SERIA UM AUTO-VETOR DE $\underline{N}$ COM AUTO-VALOR NEGATIVO $(-0{,}6)$ O QUE CONTRADIZ O LEMA 1.



CONCLUSÃO:

OS AUTO-VALORES DE $\underline{N}$ TÊM QUE SER INTEIROS. PORQUE, NESSE CASO, A SEQUÊNCIA TERMINA EM $|\varphi_0^i\rangle$, TAL QUE: $a|\varphi_0^i\rangle = 0$, COMO DITA O LEMA 2a.

ASSIM, UMA VEZ CONSTRUÍDO O AUTO-VETOR DE AUTO-VALOR NULO, $|\varphi_0^i\rangle$, (VER MAIS ADIANTE), PODEMOS CONSTRUIR UMA SEQUÊNCIA INFINITA E ENUMERÁVEL DE AUTO-VETORES DE $\hat{N}$ COM TODOS OS INTEIROS COMO AUTO-VALORES; USANDO O LEMA 3a:

$$|\varphi_1^i\rangle = \frac{a^+|\varphi_0^i\rangle}{K_i} \quad ; \quad |\varphi_2^i\rangle = \frac{(a^+)^2|\varphi_0^i\rangle}{K_2} \quad \cdots$$

OU, DE MANEIRA GERAL,

$$|\varphi_n^i\rangle = \frac{(a^+)^n|\varphi_0^i\rangle}{K_n}$$

ESSES AUTO-VETORES AINDA NÃO ESTÃO NORMALIZADOS, DAÍ OS FATORES $\underline{K_n}$.

EM CONCLUSÃO, TEMOS OS SEGUINTES ESPECTROS:

$$\hat{N} \rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\hat{H} \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$H \rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

DEGENERESCÊNCIA DOS AUTO-VALORES

AGORA, VAMOS MOSTRAR QUE OS AUTO-VALORES DE N E, PORTANTO, DE H SÃO TODOS NÃO DEGENERADOS.

PRIMEIRAMENTE, MOSTRAMOS QUE O ESTADO FUNDAMENTAL (AUTO-VETOR COM AUTO-VALOR NULO $n=0$) É NÃO DEGENERADO. ESSE AUTO-VETOR, $|\varphi_0^i\rangle$, SATISFAZ A SEGUINTE EQUAÇÃO (LEMA 2a):

$$a|\varphi_0^i\rangle = 0$$

OU, EM TERMOS DOS OPERADORES $\underline{X}$ E $\underline{P}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,X + \frac{iP}{\sqrt{m\omega}}\right]|\varphi_0^i\rangle = 0$$

NA REPRESENTAÇÃO $|x\rangle$, ISSO SE TORNA:

$$\left[\sqrt{m\omega}\,x + \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]\varphi_0^i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0^i(x) = 0$$

TRATA-SE DE UMA EQ. DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE PRIMEIRA ORDEM, CUJA SOLUÇÃO GERAL É FACILMENTE OBTIDA: (FAZENDO $\lambda^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$)

$$\frac{d\varphi_0^i(x)}{dx} = -\frac{x}{\lambda^2}\varphi_0^i(x) \Rightarrow \frac{1}{\varphi_0^i(x)}\frac{d\varphi_0^i(x)}{dx} = -\frac{x}{\lambda^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|\varphi_0^i(x)|\right] = -\frac{x}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \ln|\varphi_0^i(x)| = -\frac{x^2}{2\lambda^2} + \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow \varphi_0^i(x) = A\,e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} = A\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ONDE $\underline{A}$ É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA. ASSIM, QUALQUER SOLUÇÃO DA EQ. DIF. É PROPORCIONAL À SOLUÇÃO ACIMA. SE ELA FOR NORMALIZADA A $\underline{1}$, SÓ HÁ UMA ÚNICA SOLUÇÃO. PORTANTO, PODEM IGNORAR O ÍNDICE $\underline{i}$ EM $|\varphi_0^i\rangle$:

$|\varphi_0\rangle$ É O ESTADO FUNDAMENTAL <u>NÃO DEGENERADO</u> DE H COM AUTO-VALOR $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

AGORA VAMOS MOSTRAR QUE TODOS OS AUTO-VALORES SÃO NÃO DEGENERADOS. SERÁ UMA PROVA POR INDUÇÃO. SUPONHA QUE $|\varphi_n\rangle$ É UM AUTO-VETOR NÃO DEGENERADO DE <u>N</u> (NOTE A AUSÊNCIA DO SUPER-ÍNDICE <u>i</u>):

$$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$$

SUPONHA QUE HAJA MAIS DE UM AUTO-VETOR COM AUTO-VALOR $(n+1)$, POR EXEMPLO:

$$N|\varphi^{(1)}_{n+1}\rangle = (n+1)|\varphi^{(1)}_{n+1}\rangle \qquad N|\varphi^{(2)}_{n+1}\rangle = (n+1)|\varphi^{(2)}_{n+1}\rangle$$

ATUEMOS COM a NOS DOIS AUTO-VETORES. PELO LEMA 2b, SABEMOS QUE, EM <u>AMBOS</u> OS CASOS, OBTEREMOS UM AUTO-VETOR COM AUTO-VALOR n. COMO ESTE É ÚNICO, POR HIPÓTESE, TEREMOS:

$$a|\varphi^{(1)}_{n+1}\rangle = c_1|\varphi_n\rangle \quad ; \quad a|\varphi^{(2)}_{n+1}\rangle = c_2|\varphi_n\rangle$$

ATUANDO AGORA COM a^{+} NAS ÚLTIMAS EQUAÇÕES

$$a^{+}a|\varphi^{(1)}_{n+1}\rangle = (n+1)|\varphi^{(1)}_{n+1}\rangle = c_1 a^{+}|\varphi_n\rangle$$

$$a^{+}a|\varphi_{n+1}^{(2)}\rangle = (n+1)|\varphi_{n+1}^{(2)}\rangle = c_2 a^{+}|\varphi_n\rangle$$

SEGUE QUE: $|\varphi_{n+1}^{(1)}\rangle = \dfrac{c_1}{n+1} a^{+}|\varphi_n\rangle$

$$|\varphi_{n+1}^{(2)}\rangle = \frac{c_2}{n+1} a^{+}|\varphi_n\rangle$$

PORTANTO, $|\varphi_{n+1}^{(1)}\rangle = \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)|\varphi_{n+1}^{(2)}\rangle$

E SÃO LINEARMENTE DEPENDENTES E, PORTANTO, IGUAIS QUANDO NORMALIZADOS A 1. PORTANTO, $(n+1)$ É UM AUTO-VALOR NÃO DEGENERADO.

COMO PROVAMOS QUE $|\varphi_0\rangle$ É NÃO DEGENERADO, SEGUE QUE TODOS OS $|\varphi_n\rangle$ TAMBÉM O SÃO, POR INDUÇÃO.

A PARTIR DE AGORA, PODEMOS SUPRIMIR O SUPER-ÍNDICE i DE $|\varphi_n^{i}\rangle$ E ESCREVER SIMPLESMENTE: $|\varphi_n\rangle$. FINALMENTE:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{K_1} a^{+}|\varphi_0\rangle \; ; \; |\varphi_2\rangle = \frac{(a^{+})^2}{K_2}|\varphi_0\rangle \; ;$$

$$\ldots \; ; \; |\varphi_n\rangle = \frac{(a^{+})^n}{K_n}|\varphi_0\rangle \; ; \; \ldots$$