AUTO-ESTADOS DO HAMILTONIANO

NORMALIZAÇÃO

COMO VIMOS, OS AUTO-ESTADOS DE H SÃO NÃO DEGENERADOS E:

1) $a|\varphi_0\rangle = 0$

2) $|\varphi_1\rangle = \dfrac{a^\dagger|\varphi_0\rangle}{K_1}, \quad |\varphi_2\rangle = \dfrac{(a^\dagger)^2|\varphi_0\rangle}{K_2}, \ldots$

QUEREMOS ENCONTRAR AS CONSTANTES DE NORMALIZAÇÃO $K_1, K_2, \ldots$

SUPONHA QUE $|\varphi_{n-1}\rangle$ ESTÁ NORMALIZADO. ENTÃO:

$$|\varphi_n\rangle = C_n a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = |C_n|^2 \langle\varphi_{n-1}|a a^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle$$

MAS, DO COMUTADOR $[a, a^\dagger] = 1 \Rightarrow a a^\dagger = 1 + a^\dagger a$

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = |C_n|^2 \langle\varphi_{n-1}|1 + N|\varphi_{n-1}\rangle$$
$$= [(n-1)+1]|C_n|^2 = n|C_n|^2$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

PORTANTO:

$$|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^{\dagger} |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} (a^{\dagger})^2 |\varphi_{n-2}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)}} (a^{\dagger})^3 |\varphi_{n-3}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)\cdots 2\times 1}} (a^{\dagger})^n |\varphi_0\rangle$$

$$\boxed{|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^{\dagger})^n |\varphi_0\rangle}$$

ORTONORMALIDADE E FECHAMENTO

COMO $|\varphi_n\rangle$ E $|\varphi_{n'}\rangle$ TÊM AUTO-VALORES DIFERENTES SE $n \neq n'$:

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \delta_{n,n'} \quad \text{(ORTONORMALIDADE)}$$

ASSUMINDO QUE $\underline{H}$ É UM OBSERVÁVEL (ISSO PODE SER PROVADO), SEUS AUTO-VETORES FORMAM UMA BASE COMPLETA:

$$\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = \mathbb{1} \quad \text{(FECHAMENTO).}$$

AÇÃO DE OPERADORES GERAIS NOS AUTO-VETORES

A AÇÃO GENÉRICA DE OPERADORES LINEARES NOS AUTO-ESTADOS $|\varphi_n\rangle$ É OBTIDA A PARTIR DA AÇÃO DE a E $a^\dagger$. JÁ PROVAMOS QUE:

$$a^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_n\rangle$$

OU AINDA:

$$\boxed{a^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle}$$

ATUANDO NA PENÚLTIMA EQUAÇÃO COM $\underline{a}$:

$$a\,a^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\,a|\varphi_n\rangle$$

MAS, $a a^\dagger = 1 + a^\dagger a$ E:

$$(1 + a^\dagger a)|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\,a|\varphi_n\rangle$$
$$[1 + (n-1)]|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\,a|\varphi_n\rangle$$
$$n|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\,a|\varphi_n\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle}$$

COMO TEMOS X E P EM TERMOS DE a E $a^\dagger$ PODEMOS OBTER A ATUAÇÃO DE QUALQUER OPERADOR LINEAR SOBRE OS AUTO-VETORES. POR EXEMPLO:

$$X = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \quad \text{E} \quad P = \frac{\hbar}{\lambda}\frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

ONDE : $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. ASSIM:

$$X|\varphi_n\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(a|\varphi_n\rangle + a^\dagger|\varphi_n\rangle\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} X|\varphi_n\rangle &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle + \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle\right) \\ P|\varphi_n\rangle &= \frac{\hbar}{\lambda}\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle\right) \end{aligned}}$$

COM ISSO, PODEMOS CALCULAR ALGUMAS PROPRIEDADES DOS AUTO-ESTADOS $|\varphi_n\rangle$. POR EXEMPLO, É IMEDIATO QUE:

$$\langle\varphi_n|x|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|P|\varphi_n\rangle = 0$$

EMBORA OS VALORES ESPERADOS DE $\underline{X}$ E $\underline{P}$ SEJAM NULOS, O MESMO NÃO É VERDADE PARA SEUS QUADRADOS. DE FATO:

$$X^2 = \frac{\lambda^2}{2}(a+a^\dagger)(a+a^\dagger) = \frac{\lambda^2}{2}\left[a^2+(a^\dagger)^2+aa^\dagger+a^\dagger a\right]$$

$$X^2 = \frac{\lambda^2}{2}\left[a^2+(a^\dagger)^2+2a^\dagger a+1\right]$$

ONDE USAMOS O COMUTADOR $[a,a^\dagger]=1$ NA ÚLTIMA PASSAGEM. SEMELHANTEMENTE:

$$P^2 = -\frac{\hbar^2}{2\lambda^2}(a^\dagger-a)(a^\dagger-a) = -\frac{\hbar^2}{2\lambda^2}\left[(a^\dagger)^2+a^2-aa^\dagger-a^\dagger a\right]$$

$$P^2 = \frac{\hbar^2}{2\lambda^2}\left[-(a^\dagger)^2-a^2+2a^\dagger a+1\right]$$

COM ISSO,

$$\langle \varphi_n | x^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \langle \varphi_n | 2a^\dagger a + 1 | \varphi_n \rangle = \lambda^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\langle \varphi_n | x^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

E:

$$\langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar^2}{2\lambda^2} \langle \varphi_n | 2a^\dagger a + 1 | \varphi_n \rangle =$$

$$\langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

DONDE: $\Delta X = \sqrt{\langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}$

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - (\langle P \rangle)^2} = \sqrt{\hbar m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta X \Delta P = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

(i) O RESULTADO É COMPATÍVEL COM O P.I. DE HEISENBERG: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

(ii) O ESTADO FUNDAMENTAL É UM ESTADO DE MÍNIMA INCERTEZA: $\Delta X_0 \Delta P_0 = \frac{\hbar}{2}$

(O SUB-ÍNDICE 0 INDICA QUE O RESULTADO É VÁLIDO APENAS PARA O EST. FUNDAMENTAL)

JÁ HAVÍAMOS VISTO QUE O PACOTE DE INCERTEZA MÍNIMA É SEMPRE GAUSSIANA. DE FATO, TAMBÉM MOSTRAMOS QUE O ESTADO FUNDAMENTAL É UMA GAUSSIANA.

PACOTE DE INCERTEZA MÍNIMA:

$$\psi(x) = \frac{1}{[2\pi(\Delta x)^2]^{1/4}} e^{i\langle p\rangle x/\hbar} e^{-\left[\frac{x-\langle x\rangle}{2\Delta x}\right]^2}$$

ESTADO FUNDAMENTAL DO OH 1D:

$$\varphi_0(x) = A\, e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} = A\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

DE FATO, USANDO QUE $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$, E QUE

$\Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, VEMOS QUE OS RESULTADOS SÃO IDÊNTICOS. A FUNÇÃO DE ONDA NORMALIZADA DO ESTADO FUNDAMENTAL É, PORTANTO:

$$\boxed{\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

OUTRO FATO INTERESSANTE É QUE:

$$\langle V(x) \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle X^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

E

$$\left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2m} \langle P^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

VEMOS QUE, PARA QUALQUER AUTO-ESTADO $|\varphi_n\rangle$, OS VALORES MÉDIOS DAS ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL SÃO IGUAIS.

$$\langle V(x) \rangle = \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle$$

MAS ISSO JÁ HAVIA SIDO PROVADO NO PROBLEMA 10(a) DO CAPÍTULO III (TEOREMA DO VIRIAL), ONDE, SE $V(x) = \lambda X^n$,

$$n \langle V(x) \rangle = 2 \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle$$

SE $\underline{n=2}$, OBTEMOS O CASO PARTICULAR DO OSCILADOR HARMÔNICO.