MOMENTO ANGULAR NA MECÂNICA QUÂNTICA

O ESTUDO DO OBSERVÁVEL MOMENTO ANGULAR TEM GRANDE IMPORTÂNCIA EM MECÂNICA QUÂNTICA:

- SISTEMAS COMO ÁTOMOS, EM QUE OS ELÉTRONS ESTÃO SUJEITOS A UM POTENCIAL CENTRAL DO NÚCLEO, TÊM O MOMENTO ANGULAR TOTAL DOS ELÉTRONS COMO GRANDEZA CONSERVADA.

- O MOMENTO ANGULAR "INTRÍNSECO" (DE SPIN) É UM FENÔMENO PURAMENTE QUÂNTICO. SEU ENTENDIMENTO PASSA PELO ESTUDO DAS PROPRIEDADES GENÉRICAS DO MOM. ANGULAR QUÂNTICO.

- COMO O MOM. ANGULAR ESTÁ LIGADO À SIMETRIA SOB ROTAÇÕES, ELE É IMPORTANTE PARA DESCREVER COMO AS ROTAÇÕES AGEM SOBRE SISTEMAS QUÂNTICOS.

VAMOS, NESSE CAPÍTULO, ESTUDAR AS PROPRIEDADES BÁSICAS DO MOMENTO ANGULAR.

COMEÇAMOS ESCREVENDO OS OPERADORES CORRESPONDENTE ÀS TRÊS COMPONENTES DO MOMENTO ANGULAR <u>CLÁSSICO</u>:

$$\ell_x = y p_z - z p_y \, ; \; \ell_y = z p_x - x p_z \, ; \; \ell_z = x p_y - y p_x$$

OS OPERADORES ASSOCIADOS SÃO OBTIDOS DAS REGRAS DE QUANTIZAÇÃO: $x \to X$, $p_x \to P_x$, ...

$$L_x = Y P_z - Z P_y \, ; \; L_y = Z P_x - X P_z \, ; \; L_z = X P_y - Y P_x$$

NOTEM QUE NÃO É NECESSÁRIO SIMETRIZAR OS VÁRIOS PRODUTOS, PORQUE TODOS ENVOLVEM OPERADORES QUE COMUTAM.

PODEMOS IMEDIATAMENTE OBTER OS COMUTADORES ENTRE AS COMPONENTES, USANDO $[X, P_x] = [Y, P_y] = [Z, P_z] = i\hbar$:

$$[L_x, L_y] = [Y P_z - Z P_y, Z P_x - X P_z] = \underbrace{[Y P_z, Z P_x]}_{①} + \underbrace{[Z P_y, X P_z]}_{②}$$

$$[Y P_z, Z P_x] = Y [P_z, Z P_x] + \underbrace{[Y, Z P_x]}_{0} P_z =$$

$$= Y [P_z, Z] P_x + Y Z \underbrace{[P_z, P_x]}_{0} =$$

$$= -i\hbar Y P_x = ①$$

$$[zP_y, xP_z] = [z, xP_z]P_y = x[z, P_z]P_y = i\hbar\, xP_y = ②$$

$$\Rightarrow [L_x, L_y] = i\hbar(xP_y - yP_x) = i\hbar L_z$$

ANALOGAMENTE:

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

ÀS VEZES É ÚTIL ENCAPSULAR OS 3 COMUTADORES USANDO $L_x = L_1$; $L_y = L_2$; $L_z = L_3$ E:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\, \epsilon^{ijk} L_k$$

ONDE ϵ^{ijk} É O TENSOR TOTALMENTE ANTI-SIMÉTRICO DE LEVI-CIVITA:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{SE } (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1) \text{ OU } (3,1,2) \\ -1, & \text{SE } (ijk) = (2,1,3), (1,3,2) \text{ OU } (3,2,1) \\ 0, & \text{SE HOUVER REPETIÇÃO DE ÍNDICES} \end{cases}$$

É INTERESSANTE NOTAR QUE, SE HOUVER VÁRIAS CONTRIBUIÇÕES PARA O MOMENTO ANGULAR, VINDAS DE VÁRIAS PARTÍCULAS:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

AS RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO CONTINUAM VÁLIDAS PARA O MOMENTO ANGULAR TOTAL, POIS OS MOMENTOS ANGULARES DE PARTÍCULAS DIFERENTES COMUTAM ENTRE SI.

SENDO ASSIM, E EM VISTA DE GENERALIZAÇÕES POSTERIORES COMO NO CASO DO SPIN, VAMOS DEFINIR O MOMENTO ANGULAR GENÉRICO $\vec{J}$ COMO SENDO UM CONJUNTO DE 3 OPERADORES J_x, J_y E J_z TAIS QUE:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon^{ijk} J_k$$

DEFINIMOS O QUADRADO DE $\vec{J}$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

SEGUE QUE J^2 COMUTA COM J_x, J_y E J_z.
POR EXEMPLO:

$$[J^2, J_x] = [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x] = J_y[J_y, J_x] +$$
$$+ [J_y, J_x]J_y + J_z[J_z, J_x] + [J_z, J_x]J_z =$$

$$= i\hbar\left(-J_y J_z - J_z J_y + J_z J_y + J_y J_z\right) = 0$$

ANALOGAMENTE: $[J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

PORTANTO, EMBORA AS 3 COMPONENTES DE $\vec{J}$ NÃO COMUTEM ENTRE SI, TODAS COMUTAM COM J^2. PORTANTO, É POSSÍVEL ACHAR AUTO-VETORES SIMULTÂNEOS DE J^2 E UMA DAS COMPONENTES DE $\vec{J}$. CONVENCIONALMENTE, TOMA-SE O PAR (J^2, J_z) PARA DIAGONALIZAÇÃO SIMULTÂNEA. ESSA É A TAREFA QUE REALIZAREMOS EM SEGUIDA.

OS OPERADORES J_+ E J_-

A CONSTRUÇÃO QUE FAREMOS GUARDA GRANDE ANALOGIA COM A DO OSCILADOR HARMÔNICO. EM PARTICULAR, DEFINIMOS "OPERADORES ESCADA":

$$J_+ = J_x + i J_y$$
$$J_- = J_x - i J_y$$

COMO NO CASO DE a, ELES NÃO SÃO HERMITIANOS, MAS:

$$(J_+)^\dagger = J_- \qquad (J_-)^\dagger = J_+$$

NOTAMOS QUE:

$$J_+J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - i[J_x, J_y]$$
$$= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$$

$$J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y]$$
$$= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z$$

$$\Rightarrow J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$$

RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

AS SEGUINTES RELAÇÕES SÃO FACILMENTE PROVADAS:

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

E, EVIDENTEMENTE, $[J^2, J_\pm] = 0$.

OS AUTO-VALORES DE J^2 SÃO POSITIVOS OU ZERO

SEJA $J^2|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. ENTÃO:

$$\lambda\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|J^2|\psi\rangle = \langle\psi|(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)|\psi\rangle$$

$$= \| J_x|\psi\rangle\|^2 + \| J_y|\psi\rangle\|^2 + \| J_z|\psi\rangle\|^2 \geq 0$$

COMO $\langle\psi|\psi\rangle > 0$ PARA UM AUTO-VETOR NÃO TRIVIAL DE J^2, ENTÃO: $\lambda \geq 0$.

COMO J^2 TEM AS DIMENSÕES DE $\hbar^2$, É CONVENIENTE REDEFINIR:

$$J^2|\psi\rangle = \lambda\hbar^2|\psi\rangle$$

ONDE $\underline{\lambda}$ AGORA É ADIMENSIONAL. FINALMENTE, PARA CONVENIÊNCIA POSTERIOR, ESCREVEREMOS:

$$\lambda = j(j+1) \qquad j \geq 0$$

POIS, SE $\lambda \geq 0$, ENTÃO:

$$j = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{1+4\lambda^2}}{2} < 0 \\ \text{OU} \\ \dfrac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{2} > 0 \end{cases}$$

E $\underline{j}$ FICA UNIVOCAMENTE DETERMINADO A PARTIR DE $\underline{\lambda}$. ASSIM:

$$J^2|\psi\rangle = j(j+1)\hbar^2|\psi\rangle \; ; \; j \geq 0$$

SEM PERDA DE GENERALIDADE.

PODEMOS DENOTAR A BASE DE AUTO-VETORES SIMULTÂNEOS DE J^2 E J_z DA SEGUINTE MANEIRA:

$$J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle$$

$$J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle$$

ONDE OS NÚMEROS QUÂNTICOS j E m SÃO ASSOCIADOS A J^2 E J_z e k DENOTA UM CONJUNTO DE OUTROS NÚMEROS QUÂNTICOS NECESSÁRIOS PARA DISTINGUIR AUTO-VETORES LINEARMENTE INDEPENDENTES DE J^2 E J_z COM OS MESMOS VALORES DE j E m. ISSO É NECESSÁRIO PORQUE, EMBORA J^2 E J_z COMUTEM ENTRE SI, ELAS NÃO NECESSARIAMENTE FORMAM UM C.C.O.C. OS RÓTULOS ADICIONAIS k SÃO OS NÚMEROS QUÂNTICOS DOS OUTROS OPERADORES QUE FORMAM UM C.C.O.C. COM J^2, J_z.

LEMA I: $-j \leq m \leq j$

$$\| J_+ |k,j,m\rangle \|^2 = \langle k,j,m | J_- J_+ | k,j,m\rangle$$

$$= \langle k,j,m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z | k,j,m\rangle$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m(m+1)] \geq 0 \quad (1)$$

$$\| J_- |kjm\rangle \|^2 = \langle kjm | J_+ J_- | k,j,m\rangle$$

$$= \langle kjm | J^2 - J_z^2 + \hbar J_z | k,j,m\rangle$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m(m-1)] \geq 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (j-m)(j+m+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad j \geq m \quad \text{E} \quad m \geq -j-1$$

OU $j \leq m$ E $m \leq -j-1 \Rightarrow$ IMPOSSÍVEL

ASSIM, $(1) \Rightarrow \; -j-1 \leq m \leq j \quad (3)$

$(2) \Rightarrow (j - m + 1)(j + m) \geqslant 0$

$\Rightarrow j \geq m - 1 \quad E \quad m \geqslant -j$

OU

$\Rightarrow j \leqslant m - 1 \quad E \quad m \leqslant -j \Rightarrow$ IMPOSSÍVEL

ASSIM, $(2) \Rightarrow -j \leqslant m \leqslant j + 1 \quad (4)$

JUNTANDO (3) E (4):

$$-j \leq m \leq j + 1$$

$$-j - 1 \leq m \leq j$$

QUE TEM QUE SER SATISFEITAS SIMULTANEA-MENTE. SEGUE QUE:

$$-j \leq m \leq j$$

LEMA 2: (i) $J_-|k,j,-j\rangle = 0$

(ii) SE $m > -j$, ENTÃO $J_-|k,j,m\rangle$ É AUTO-VETOR NÃO NULO DE J^2 E J_z COM AUTO-VALORES $j(j+1)\hbar^2$ E $(m-1)\hbar$

(i) COMO VIMOS, DE (2) COM $m=-j$,

$$\| J_-|k,j,-j\rangle \|^2 = 0 \Rightarrow J_-|k,j,-j\rangle = 0$$

(ii) SE AGORA $m > -j$, DE (2):

$$\| J_-|k,j,m\rangle \|^2 \gtrsim 0 \Rightarrow J_-|k,j,m\rangle \neq 0$$

ALÉM DISSO, USANDO $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$,

$$(J_z J_- - J_- J_z)|k,j,m\rangle = -\hbar [J_-|k,j,m\rangle]$$

$$J_z[J_-|k,j,m\rangle] = (m-1)\hbar [J_-|k,j,m\rangle]$$

E, DE $[J^2, J_-] = 0$:

$$(J^2 J_- - J_- J^2)|k,j,m\rangle = 0$$
$$\Rightarrow J^2[J_-|k,j,m\rangle] = j(j+1)\hbar^2 [J_-|k,j,m\rangle]$$

LEMA 3: (i) $J_+|k,j,j\rangle = 0$

(ii) SE $m < j$, ENTÃO $J_+|k,j,m\rangle$ É AUTO-VETOR NÃO NULO DE J^2 E J_z COM AUTO-VALORES $j(j+1)\hbar^2$ E $(m+1)\hbar$

A PROVA É COMPLETAMENTE ANÁLOGA AO LEMA 2.

ASSIM, VEMOS QUE, COMO NO CASO DO OSCILADOR HARMÔNICO:

1) J_+ "AUMENTA" $\underline{m}$ E J_- "ABAIXA" m, AO MESMO TEMPO QUE NÃO ALTERA j.

2) A "SUBIDA DA ESCADA" TERMINA EM $|k,j,j\rangle$ E A "DESCIDA" TERMINA EM $|k,j,-j\rangle$.

DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE J_z E J^2

DADOS j E m, COMO A "DESCIDA DA ESCADA" TEM QUE TERMINAR EM $m=-j$ (DO CONTRÁRIO TEREMOS $m<-j$, O QUE É PROIBIDO PELO LEMA I), DEVEMOS TER:

$$m=-j+p$$ ONDE p É INTEIRO E $p\geq 0$

DE TAL FORMA QUE $(J_-)^p|k,j,m\rangle \propto |k,j,-j\rangle$.

ANALOGAMENTE, COMO A "SUBIDA" TERMINA EM $m=j$, DEVEMOS TER:

$$m=j-q$$ q É INTEIRO E $q\geq 0$

DE TAL FORMA QUE $(J_+)^q|k,j,m\rangle \propto |k,j,j\rangle$

SEGUE QUE:

$$j-q=-j+p \Rightarrow j=\frac{p+q}{2}$$

$\Rightarrow j =$ INTEIRO NÃO-NEGATIVO DIVIDIDO POR 2.

OU:

$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$

DADO j COMO ACIMA, $\underline{m}$ ASSUME OS VALORES:

$$m = \underbrace{-j, -j+1, -j+2, \ldots, j-2, j-1, j}_{(2j+1) \text{ POSSÍVEIS VALORES DE } \underline{m}}$$

EXEMPLOS:

(1) $j=0$, $m=0$; $|k,0,0\rangle$

(2) $j=\frac{1}{2}$, $m=\pm\frac{1}{2}$; $|k,\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle$, $|k,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

(SPIN-1/2, JÁ VISTO NO CAPÍTULO 4)

(3) $j=1$, $m=-1,0,+1$; $|k,1,-1\rangle, |k,1,0\rangle, |k,1,1\rangle$

E ASSIM POR DIANTE.