F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023
24/04/2023
Aula 14

Aula passada

Adição de momentos angulares j_1 e j_2

O problema consiste em, no sub-espaço de dimensão $(2j_1+1)(2j_2+1)$ com j_1 e j_2 fixos:

a) Achar os valores possíveis de j (onde $\mathbf{J}=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$) e quantas vezes cada um aparece (para cada j, m varia em $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$).

b) Achar a transformação de uma base para outra.

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \to |j_1, j_2, j, m\rangle$$

Resposta para o item (a)

1. Os valores possíveis de j são:

$$\boxed{j = |j_1 - j_2|\,, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2}$$

2. Cada valor de j só aparece uma vez:

$$\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\} \to \text{C.C.O.C.}$$

Aula passada

Resposta para o item (b): os coeficientes da transformação de base podem ser obtidos sistematicamente e são chamados de coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{m_1=j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{m_2=j_2} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle \, |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Problema 2 da lista 4 (cont.)

3. Consider a system composed of two spin 1/2 particles whose orbital variables are ignored. The Hamiltonian of the system is:

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

where S_{1z} and S_{2z} are the projections of the spins $\mathbf{S}_1$ and $\mathbf{S}_2$ of the two particles onto Oz, and ω_1 and ω_2 are real constants.

a. The initial state of the system, at time $t = 0$, is:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\,-\rangle + |-\,+\rangle\right]$$

(with the notation of § B of Chapter X). At time t, $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ is measured. What results can be found, and with what probabilities?

b. If the initial state of the system is arbitrary, what Bohr frequencies can appear in the evolution of $\langle \mathbf{S}^2 \rangle$? Same question for $S_x = S_{1x} + S_{2x}$.

Auto-vetores/valores de H:

$$H|\underbrace{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}_{\{|++\rangle,\,|+-\rangle,\,|-+\rangle,\,|--\rangle\}}\rangle = \frac{\hbar}{2}\overbrace{(\varepsilon_1\omega_1 + \varepsilon_2\omega_2)}^{E_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}|\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle$$

Frequências de Bohr que aparecem na evolução temporal de $<O>(t)$:

$$\omega_{m,n} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \text{ aparece se } \langle \varphi_m | O | \varphi_n \rangle \neq 0$$

Soma de dois spins ½: s=0 ou 1

$$|s=1, m=1\rangle = |{+}{+}\rangle$$

$$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle \right)$$

$$|s=1, m=-1\rangle = |{-}{-}\rangle$$

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle \right)$$

$$\begin{cases} |{+}{-}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(|s=1, m=0\rangle + |s=0, m=0\rangle \right) \\ |{-}{+}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(|s=1, m=0\rangle - |s=0, m=0\rangle \right) \end{cases}$$

$\vec{S}^2 |{+}{+}\rangle = \vec{S}^2 |s=1, m=1\rangle = 2\hbar^2 |s=1, m=1\rangle = 2\hbar^2 |{+}{+}\rangle$

$\Rightarrow \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 | \vec{S}^2 | {+}{+} \rangle = 0$ EXCETO SE $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +$

$\Rightarrow$ FR. DE BOHR $\to 0$, NÃO INTERESSA

$\vec{S}^2 |{-}{-}\rangle = 2\hbar^2 |{-}{-}\rangle$

$\Rightarrow \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 | \vec{S}^2 | {-}{-} \rangle = 0$ EXCETO SE $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -$

$\Rightarrow$ NÃO FORNECE F. DE B. NÃO NULA

$$\vec{S}^2|+-\rangle = \vec{S}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s=1,m=0\rangle + |s=0,m=0\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2\hbar^2)|s=1,m=0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(2\hbar^2)\left[|+-\rangle + |-+\rangle\right]$$

$\langle +-|\vec{S}^2|+-\rangle = \hbar^2 \Rightarrow$ F. DE. B. É NULA

$$\langle -+|\vec{S}^2|+-\rangle = \hbar^2 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\cancel{\hbar}}\left[\underbrace{\frac{\cancel{\hbar}}{2}(-\omega_1+\omega_2)}_{E_{-+}} - \underbrace{\frac{\cancel{\hbar}}{2}(\omega_1-\omega_2)}_{E_{+-}}\right]$$

$$\boxed{\omega = \omega_2-\omega_1}$$ ✓

$$\langle ++|\vec{S}^2|+-\rangle = 0$$

$$\langle --|\vec{S}^2|+-\rangle = 0$$

$$\vec{S}^2|-+\rangle = \vec{S}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s=1,m=0\rangle - |s=0,m=0\rangle\right)\right]$$

$$= \hbar^2\left[|+-\rangle + |-+\rangle\right] \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_1-\omega_2}$$ ✓

$\langle S_x \rangle (t) = ?$ $\qquad S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \qquad S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$

LEMBRETE: $\quad |j,m\rangle \to \vec{J}^2 |j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle$

$$J_z |j,m\rangle = m\hbar |j,m\rangle$$

$$J_+ |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j,m+1\rangle$$
$$J_- |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j,m-1\rangle$$

$$J_\pm = J_x \pm i J_y \Rightarrow J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \;;\; J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

$$S_x |++\rangle = S_x |s=1, m=1\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)|s=1, m=1\rangle$$
$$= \frac{1}{2} S_- |s=1, m=1\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\, |s=1, m=0\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2}\left[|+-\rangle + |-+\rangle \right]$$

$$S_x |++\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[|+-\rangle + |-+\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \omega_{(++),(+-)} = \frac{E_{++} - E_{+-}}{\hbar} = \frac{1}{2}\left[\cancel{\omega_1} + \omega_2 - (\cancel{\omega_1} - \omega_2)\right]$$

$$= \omega_2 \checkmark$$

$$\omega_{(++),(-+)} = \frac{E_{++} - E_{-+}}{\hbar} = \frac{1}{2}\left[\omega_1 + \omega_2 - (-\omega_1 + \omega_2)\right]$$

$$= \omega_1 \checkmark$$

E ETC.

$$S_x|--\rangle, \quad S_x|+-\rangle, \quad S_x|-+\rangle$$

Teoria de perturbação independente do tempo

O problema

DADO: $H = H_0 + W$ QUEREMOS RESOLVER A E.S.I.T.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (1)$$

MAS:

(i) NÃO EXISTE SOLUÇÃO EXATA PARA (1)

(ii) EXISTE SOLUÇÃO EXATA PARA:

$$H_0|\varphi_n^i\rangle = E_n^{(0)}|\varphi_n^i\rangle$$

$E_n^{(0)}$: AUTO-ENERGIAS DE H_0

$|\varphi_n^i\rangle$: AUTO-ESTADOS DE H_0

(iii) $\underline{W}$ DE ALGUMA FORMA É "PEQUENO" EM RELAÇÃO A H_0

POR EXEMPLO, TODOS OS AUTO-VALORES DE W SÃO MUITO MENORES QUE OS DE H_0

PARA EXPLICITAR (iii), ESCREVE-SE

$$W = \lambda \hat{W}$$

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda \hat{W} \quad \text{E} \quad \lambda \ll 1$$

ASSUMIMOS: $H_0 |\varphi_p^i\rangle = E_p^0 |\varphi_p^i\rangle \quad p = 1, 2, \ldots$

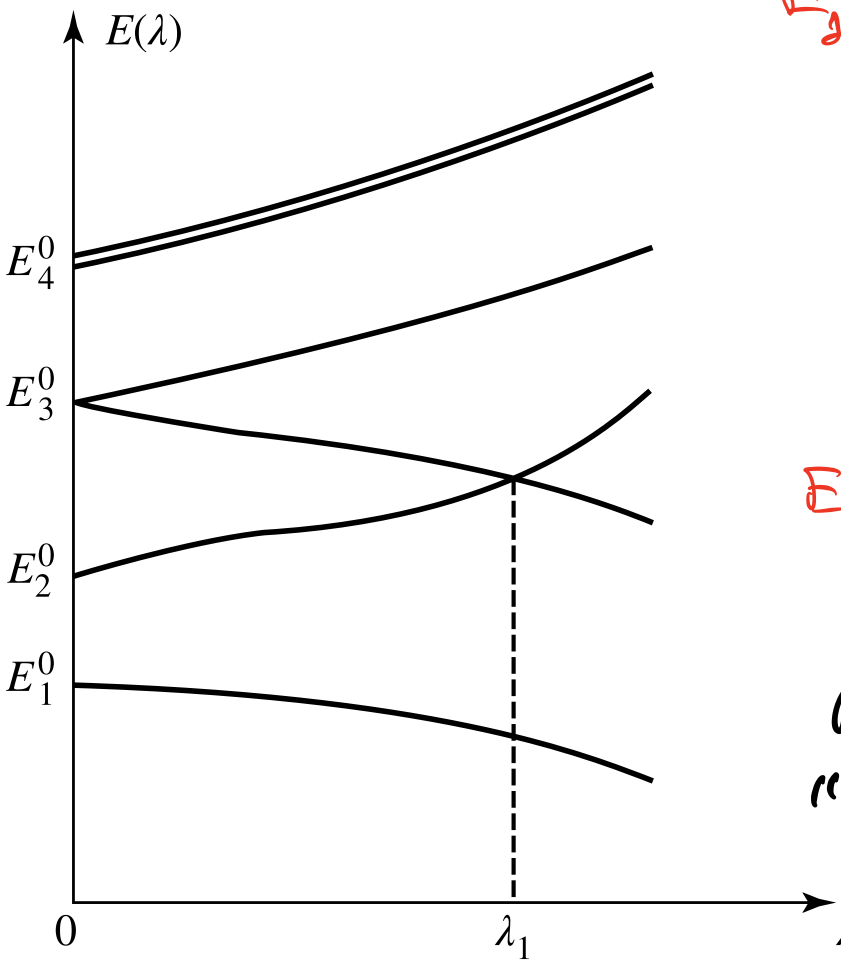
$i = 1, 2, \ldots, g_p$

$$\langle \varphi_{p'}^{i'} | \varphi_p^i \rangle = \delta_{p,p'} \delta_{i,i'}$$

$$\sum_p \sum_i |\varphi_p^i\rangle\langle\varphi_p^i| = \mathbb{1}$$

SE: $H(\lambda) |\psi_p^i(\lambda)\rangle = E_p(\lambda) |\psi_p^i(\lambda)\rangle$

SE $\lambda \to 0$: $E_p(\lambda \to 0) \to E_p^0$



E_1^0: O ESTADO INICIAL ($\lambda=0$) É NÃO DEGENERADO E CONTINUA NÃO-DEGENERADO QUANDO λ CRESCE

E_3^0: O ESTADO É INICIALMENTE ($\lambda=0$) DUPLAMENTE DEGENERADO, MAS O AUMENTO DE λ "QUEBRA" OU "LEVANTA" A DEGENERESCÊNCIA INICIAL

E_4^0: A APLICAÇÃO DA PERTURBAÇÃO NÃO ALTERA A DEGENERESCÊNCIA INICIAL

E_2^0: É, DE MANEIRA GERAL, NÃO DEGENERADO, MAS "CRUZA" E λ_1 COM UM DOS ESTADOS QUE COMEÇAM EM E_3^0

O método

$$H(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle \qquad H(\lambda) = H_0 + \lambda\hat{W}$$

A ESTRATÉGIA CONSISTE EM ASSUMIR QUE OS AUTO-ESTADOS E AUTO-VALORES PODEM SER ESCRITOS COMO UMA SÉRIE DE TAYLOR EM λ:

$$E(\lambda) = \varepsilon_0 + \lambda\varepsilon_1 + \lambda^2\varepsilon_2 + \dots$$

$$|\psi(\lambda)\rangle = |0\rangle + \lambda|1\rangle + \lambda^2|2\rangle + \dots$$

$$(H_0 + \lambda\hat{W})\left[\sum_{q=0}^{\infty}\lambda^q|q\rangle\right] = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varepsilon_n\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}\lambda^q|q\rangle\right]$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\lambda^q H_0|q\rangle + \sum_{q=0}\lambda^{(q+1)}\hat{W}|q\rangle = \sum_{n,q=0}^{\infty}\lambda^{(q+n)}\varepsilon_n|q\rangle$$

IGUALANDO AS POTÊNCIAS DE λ TERMO A TERMO

λ^0: $H_0|0\rangle = \varepsilon_0|0\rangle \qquad (1)$

λ^1: $H_0|1\rangle + \hat{W}|0\rangle = \varepsilon_0|1\rangle + \varepsilon_1|0\rangle$

$$\Rightarrow (H_0 - \varepsilon_0)|1\rangle + (\hat{W} - \varepsilon_1)|0\rangle = 0 \qquad (2)$$

λ^2: $H_0|2\rangle + \hat{W}|1\rangle = \varepsilon_0|2\rangle + \varepsilon_1|1\rangle + \varepsilon_2|0\rangle$

$$\Rightarrow (H_0 - \varepsilon_0)|2\rangle + (\hat{W} - \varepsilon_1)|1\rangle - \varepsilon_2|0\rangle = 0 \qquad (3)$$

E ASSIM POR DIANTE.