F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023
10/05/2023
Aula 18

Estrutura fina e hiperfina do átomo de hidrogênio

Correções ao Hamiltoniano do átomo de hidrogênio

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{R}$$ (NÃO-RELATIVÍSTICO)

NOS NÍVEIS DO ÁTOMO DE H: $\alpha \simeq \frac{e^2}{\hbar} \Rightarrow \frac{\alpha}{c} \simeq \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$

$\simeq 10^{-2}$

RAZÃO É PEQUENA, MAS DETECTÁVEL.

NESSE CAPÍTULO:

$H = H_0 + W$; W = PRIMEIRAS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS $\sim O\left(\frac{\alpha^2}{c^2}\right)$

TRATAR W COMO UMA PEQUENA PERTURBAÇÃO A H_0

Equação de Dirac

O QUE É W? EQUAÇÃO DE DIRAC

W PODE SER OBTIDO DIRETAMENTE DA EQ. DE DIRAC.

1) O SPIN DO ELÉTRON: A EQ. DE DIRAC EXIGE QUE A PARTÍCULA TENHA SPIN 1/2.

2) CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS COMO UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS EM $\frac{p}{c}$

O Hamiltoniano de estrutura fina

$$H = \underbrace{mc^2}_{\text{ENERGIA DE REPOUSO}} + \underbrace{\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(R)}_{H_0} \underbrace{- \frac{\mathbf{P}^4}{8m^3c^2}}_{W_{mv}} + \underbrace{\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{R}\frac{dV(R)}{dR}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}_{W_{SO}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V(R)}_{W_D}$$

$$V(R) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{e^2}{R}$$

$$\boxed{\text{ATÉ ORDEM } \frac{v^2}{c^2}}$$

$$W = W_{mv} + W_{So} + W_D$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{e^2}{R^2} \Rightarrow W_{So} = \frac{e^2}{2m^2c^2R^3}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

O termo W_{mv}

ENERGIA TOTAL RELATIVÍSTICA COMO FUNÇÃO DE $\vec{p}$ É:

$$\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc\left[1+\frac{p^2}{m^2c^2}\right]^{1/2} \simeq mc\left[1+\frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{p^4}{8m^4c^4}+\dots\right] = mc + \frac{p^2}{2mc} - \frac{p^4}{8m^3c^3}+\dots$$

$$E = \underbrace{mc^2}_{E_0} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{T_{NR}} - \underbrace{\frac{p^4}{8m^3c^2}}_{\text{1º CORREÇÃO RELATIVÍSTICA}}$$

ORDEM DE GRANDEZA DE W_{mo}:

$$\frac{W_{mo}}{H_0} \simeq \frac{p^4/8m^3c^2}{p^2/2m} = \frac{p^2}{4m^2c^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{137}\right)^2 \simeq 10^{-4}$$

$H_0 \sim 10\ eV$ $\qquad W_{mo} \sim 1\ meV$

A interação spin-órbita W_{SO}

NO REFERENCIAL DE REPOUSO INSTANTÂNEO DO ELÉTRON, O CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}$ DEVIDO AO NÚCLEO DÁ ORIGEM A UM CAMPO MAGNÉTICO:

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E}$$

ONDE $\vec{v}$ É A VELOCIDADE INSTANTÂNEA DO ELÉTRON EM RELAÇÃO AO NÚCLEO, EM PRIMEIRA ORDEM EM $\frac{v}{c}$.

$$\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$$

$$W' = -\vec{M}\cdot\vec{B} = \gamma\,\vec{S}\cdot\vec{B}' = \frac{q}{m}\,\vec{B}'\cdot\vec{S}$$

$q>0$

PARA O ELÉTRON: $\vec{M} = 2\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar} = -\frac{q}{m}\vec{S}$

$g_e = 2$

$\boxed{\text{NO LIVRO } q<0}$

$$W' = \frac{q}{m}\vec{S}\cdot\left(-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right) = \frac{q}{mc^2}(\vec{E}\times\vec{v})\cdot\vec{S}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow W' = \underbrace{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}}_{e^2}\frac{1}{mc^2r^3}\underbrace{(\vec{r}\times\vec{v})}_{\frac{\vec{L}}{m}}\cdot\vec{S} = \frac{e^2}{m^2c^2r^3}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$W_{SO} = \frac{1}{2}W'$$

↳ PRECESSÃO DE THOMAS, QUE VEM DO FATO DE QUE O REF. DE REPOUSO DO ELÉTRON É NÃO INERCIAL.

ORDEM DE GRANDEZA DO W_{SO} (VER NOTAS):

$$\frac{W_{SO}}{H_0} \simeq \left(\frac{1}{137}\right)^2 \simeq 10^{-4}$$

O termo de Darwin W_D

O ELÉTRON NÃO SENTE APENAS O POTENCIAL ELÉTRICO $V(r)$ DO PRÓTON NA SUA POSIÇÃO $\underline{r}$, MAS TAMBÉM NUMA VIZINHANÇA DE TAMANHO LINEAR $\frac{\hbar}{mc}$ = COMPRIMENTO DE ONDA COMPTON EM TORNO DE r (VER NOTAS)

$$W_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2\left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{\pi\hbar^2 e^2}{2m^2c^2}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

NOTEM QUE: $\langle\psi|W_D|\psi\rangle \propto \int \psi^*(\vec{r})\,\delta^{(3)}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})\,d^3r \propto |\psi(0)|^2$

COMO $R_{n\ell}(r) \sim r^\ell \Rightarrow \langle\psi|W_D|\psi\rangle \neq 0$ APENAS PARA NÍVEIS $\underline{S}$ $(\ell=0)$.

ORDEM DE GRANDEZA:

$$\frac{W_D}{H_0} \sim \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cong 10^{-4}$$

O Hamiltoniano hiperfino

O PRÓTON TEM SPIN 1/2, CUJO OPERADOR DE SPIN É DENOTADO POR $\vec{I}$. ASSOCIADO AO MOMENTO ANGULAR DE SPIN DO PRÓTON, HÁ UM MOMENTO MAGNÉTICO: $\vec{M}_I = g_p \dfrac{\mu_n}{\hbar} \vec{I}$

M_p = MASSA DO PRÓTON

$$\mu_n = \frac{\hbar e}{2M_p}$$ (MAGNETON NUCLEAR)

COMPARE COM O MAGNETON DE BOHR: $\mu_s = \dfrac{\hbar e}{2m}$

$$\Rightarrow \mu_n \simeq \frac{\mu_s}{1800}$$

$g_p = 5{,}585$ (FATOR GIROMAGNÉTICO DO PRÓTON).

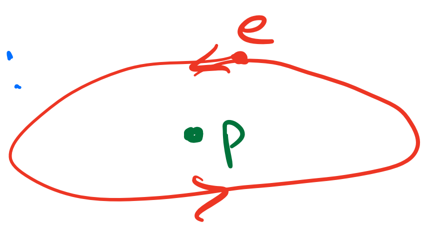
$$\boxed{W_{hf} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{q}{mR^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}_I + \frac{1}{R^3}\left[3\left(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{M}_I\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\right] + \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\delta^{(3)}\left(\mathbf{R}\right)\right\}}$$

$\vec{M}$ = MOMENTO MAGNÉTICO DO ELÉTRON

$$W_{hf}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{mR^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}_I$$

$q > 0$

1º TERMO:



O ELÉTRON COM VELOCIDADE $\vec{v}$ CRIA UM CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}_e$ NA POSIÇÃO DO NÚCLEO

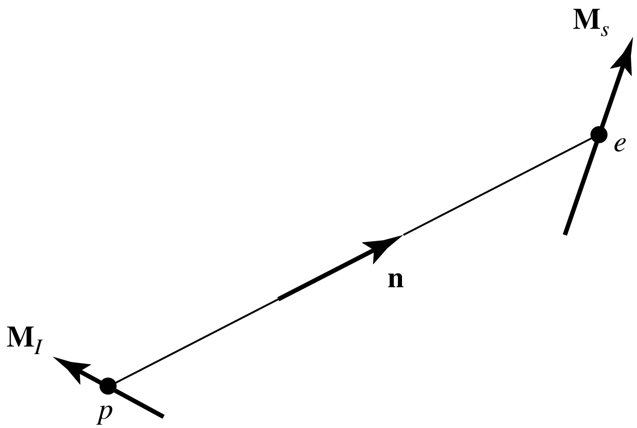
$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi}(-q)\frac{\vec{v}\times(-\vec{r})}{r^3}$$ (LEI DE BIOT-SAVART)

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{r}\times\vec{v}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{m}\frac{\vec{L}}{r^3}$$

$$W_{hf}^{(1)} = -\vec{M}_I\cdot\vec{B}_e = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{q}{mr^3}\right)\vec{L}\cdot\vec{M}_I$$

$$W_{hf}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R^3}\left[3\left(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{M}_I\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\right]$$

→ INTERAÇÃO MAGNETOSTÁTICA ENTRE DOIS DIPOLOS MAGNÉTICOS, $\vec{M}$ e $\vec{M}_I$, SEPARADOS POR UMA DISTÂNCIA ($R\hat{n}$)



(ELETRO I)

$$W_{hf}^{(3)} = -\frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\delta^{(3)}\left(\mathbf{R}\right)$$

TERMO DE CONTATO DE FERMI

O PRÓTON NÃO É UMA PARTÍCULA SEM ESTRUTURA INTERNA. PODE-SE MOSTRAR QUE A INTERAÇÃO ENTRE O PRÓTON E O ELÉTRON TEM A FORMA SIMPLES ACIMA.

ORDEM DE GRANDEZA: TODOS OS TERMOS, QUANDO COMPARADOS AO W (DE ESTRUTURA FINA) DÃO:

$$\frac{W_{hf}}{W} \sim \frac{m}{M_p} \sim 10^{-3}$$

A HIERARQUIA DAS ESCALAS DE ENERGIA É:

$$W_{hf}\,(\sim \mu eV) << W\,(\sim meV) << H_0\,(eV)$$