F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023
22/05/2023
Aula 20

Aulas passadas

Hamiltoniano do átomo de hidrogênio analisado no cap. 6:

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(R) \qquad V(R) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{e^2}{R}$$

Velocidades típicas: $\frac{v}{c} \sim \alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \approx 10^{-2}$

Correções relativísticas da ordem de $\alpha^2 H_0 \sim 10^{-4} H_0$: Hamiltoniano de estrutura fina.

$$W_f = W_{mv} + W_{SO} + W_D$$

$$W_{mv} = -\frac{\mathbf{P}^4}{8m^3c^2}$$ (correção à energia cinética)

$$W_{SO} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{R}\frac{dV(R)}{dR}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{e^2}{2m^2c^2}\frac{1}{R^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$ (interação spin-órbita)

$$W_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V(R) = \frac{\pi e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\delta^{(3)}(\mathbf{R})$$ (interação de contato de Darwin)

Aula passada

A estrutura fina do nível n=2: l=0,1, s=1/2 ⇒ j=1/2 ou 3/2

$2s_{1/2}$ (l=0,s=1/2,j=1/2)

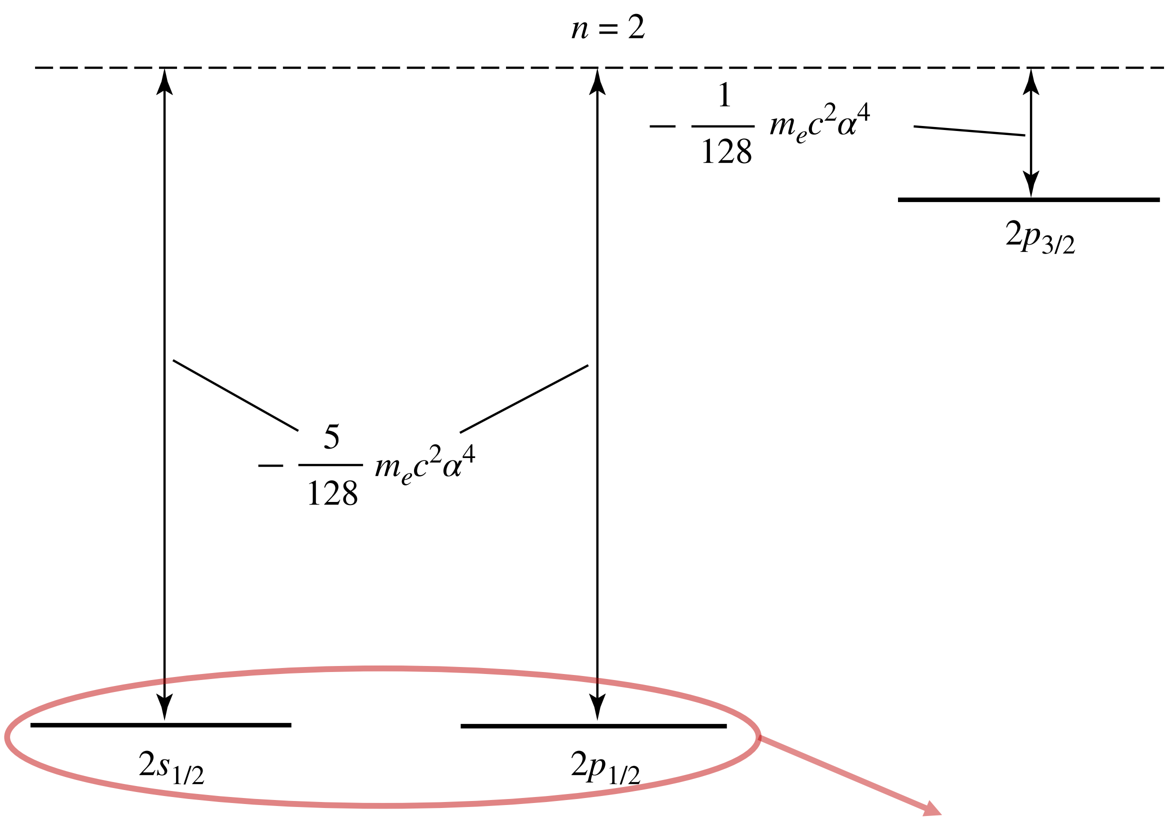
$2p_{1/2}$ (l=1,s=1/2,j=1/2)

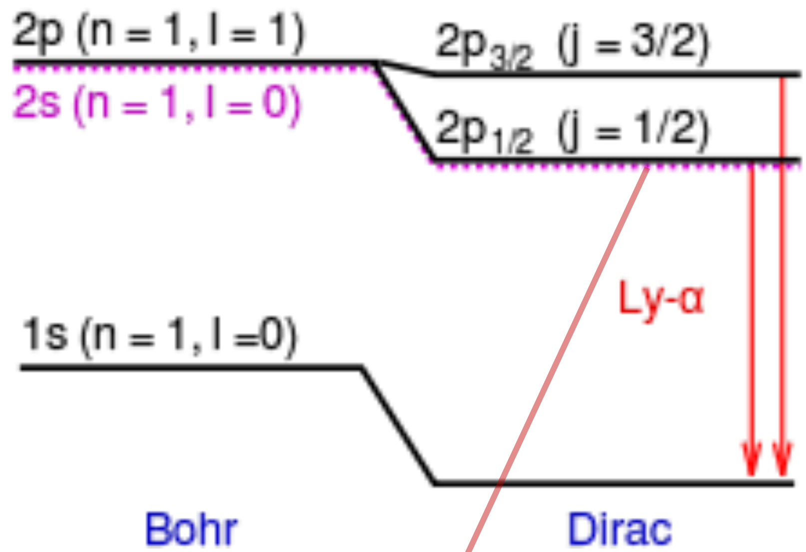
$$W_f^{(2)} = mc^2\alpha^4 \left(\begin{array}{cc|cc|cccc} -\frac{5}{128} & 0 & & & & & & \\ 0 & -\frac{5}{128} & & & & & & \\ \hline & & -\frac{5}{128} & 0 & & & & \\ & & 0 & -\frac{5}{128} & & & & \\ \hline & & & & -\frac{1}{128} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -\frac{1}{128} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{128} \end{array}\right)$$

$2p_{3/2}$(l=1,s=1/2,j=3/2)

Aula passada

A estrutura fina do nível $n=2$





Essa degenerescência persiste em todas as ordens:
energias só dependem de n e j (eq. de Dirac)

Aulas passadas

Efeitos do spin do próton **I**:

$$\mathbf{M}_I = g_p \frac{\mu_n}{\hbar}\mathbf{I}$$

$$g_p \approx 5.585$$

$$\mu_n = \frac{q\hbar}{2M_p}$$

$$\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$$

$$M_p \approx 1800\ m$$

Hamiltoniano hiperfino:

$$W_{hf}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{mR^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}_I$$

(campo magnético criado pelo movimento orbital do elétron atuando no momento magnético do próton)

$$W_{hf}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R^3}\left[3\left(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{M}_I\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\right]$$

(interação dipolo magnético-dipolo magnético)

$$W_{hf}^{(3)} = -\frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\delta^{(3)}\left(\mathbf{R}\right)$$

(interação dipolo magnético do elétron com o campo magnético dentro do próton)

$$\boxed{W_{hf} \sim \frac{m}{M_p}W_f \approx 10^{-3}W_f}$$

A estrutura hiperfina do nível $1s$

ESTADOS: $|n=1, \ell=0, m=0, m_S=\pm\frac{1}{2}, m_I=\pm 1/2\rangle$

DEGENERESCÊNCIA: $g_{1s}=4$

SIMPLIFICANDO A NOTAÇÃO: $|m_S, m_I\rangle \rightarrow 4\times 4$

PRECISO ACHAR $\langle m_S', m_I' | W_{hf} | m_S, m_I\rangle$

A estrutura fina do $1s$

$$W_{mv} = -\frac{\mathbf{P}^4}{8m^3c^2}$$

$$W_{SO} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{R}\frac{dV(R)}{dR}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{e^2}{2m^2c^2}\frac{1}{R^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

$$W_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V(R) = \frac{\pi e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\delta^{(3)}(\mathbf{R})$$

W_{mv} SÓ ATUA NA PARTE ORBITAL DO ELÉTRON

$\Rightarrow \propto \mathbb{1}_{4\times 4}$

W_D TAMBÉM SÓ ATUA NA PARTE ORBITAL

$\propto \mathbb{1}_{4\times 4}$

NO FINAL:

$\langle W_f \rangle = -\frac{mc^2\alpha^4}{8}\mathbb{1}_{4\times 4}$

SÓ UM DESLOCAMENTO GLOBAL DE ENERGIA

W_{SO} : $L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z$ E

$\langle n=1, l=0, m=0 | L_i | n=1, l=0, m=0 \rangle = 0$

Atuação do Hamiltoniano hiperfino no $1s$

$$W_{hf}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{mR^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}_I \propto \frac{1}{R^3}\vec{L}\cdot\vec{I}$$

$$W_{hf}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R^3}\left[3\left(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{M}_I\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\right]$$

- $\langle n=1, \ell=0, m=0 | \frac{1}{R^3}\vec{L}\cdot\vec{I} | n=1, \ell=0, m=0\rangle = 0$ ✓

- $\hat{n}$ = UNITÁRIO QUE VAI DO PRÓTON AO ELÉTRON

$$\frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} = \cos\theta\sin\phi\,\hat{x} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{z}$$

$$\langle W_{hf}^{(2)}\rangle \propto \int_0^\infty \frac{r^2\,dr}{r^3}\int d\Omega\, \underbrace{\varphi^*_{1,0,0}(\vec{r})}_{\underbrace{Y^*_{00}(\Omega)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}}\,\underbrace{\varphi_{100}(\vec{r})}_{\underbrace{Y_{0,0}(\Omega)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}}\left[3\left(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{M}_I\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\right]$$

A INTEGRAL ANGULAR

SE ANULA

$$W^{(3)}_{hf} = -\frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}_I\,\delta^{(3)}(\mathbf{R}) = \left(-\frac{2\mu_0}{3}\right)\left(-\frac{q}{m}\right)\left(\frac{g_p q}{2M_p}\right)\vec{S}\cdot\vec{I}\;\delta^{(3)}(\vec{R})$$

A PARTE ORBITAL É:

$$\langle n=1, l=0, m=0|\,\delta^{(3)}(\vec{R})\,|n=1, l=0, m=0\rangle$$

$$= \int d^3r\, |R_{10}(r)|^2 \underbrace{|Y_{0,0}(\Omega)|^2}_{\frac{1}{4\pi}}\, \delta^{(3)}(\vec{R}) = \frac{|R_{10}(0)|^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\frac{4}{a_0^3}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\mu^3 e^6}{\hbar^6} \qquad \mu = \frac{m M_p}{m+M_p} = \frac{m}{1+\frac{m}{M_p}}$$

JUNTANDO TUDO:

$$\langle W^{(3)}_{hf}\rangle = A\,\langle m_S', m_I'|\,\vec{S}\cdot\vec{I}\,|m_S, m_I\rangle$$

$$A = \frac{4}{3} g_p \left(\frac{m}{M_p}\right) mc^2\alpha^4 \left(\frac{1}{1+m/M_p}\right)^3 \frac{1}{\hbar^2}$$

AGORA, PRECISAMOS DE:

$$\langle m_S', m_I' | \vec{S} \cdot \vec{I} | m_S, m_I \rangle$$

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I} \Rightarrow \vec{F}^2 = (\vec{S} + \vec{I})^2 = \vec{S}^2 + \vec{I}^2 + 2\vec{S} \cdot \vec{I}$$

$$\Rightarrow \vec{S} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2}\left[\vec{F}^2 - \vec{S}^2 - \vec{I}^2\right]$$

MELHOR TRABALHAR NA BASE SOMADA:

$$|S = 1/2, I = 1/2, m_S = \pm\tfrac{1}{2}, m_I = \pm\tfrac{1}{2}\rangle \longrightarrow |S = 1/2, I = 1/2; F, m_F\rangle$$

ONDE F PODE ASSUMIR:

$F = 0$; $m_F = 0$

$F = 1$; $m_F = -1, 0, +1$

NA BASE SOMADA:

$$\langle F', m_F' | \vec{S}\cdot\vec{I} | F, m_F \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[F(F+1) - S(S+1) - I(I+1)\right] \times$$

$$\times \underbrace{\langle F', m_F' | F, m_F \rangle}_{\delta_{F,F'}\,\delta_{m_F,m_F'} \,=\, 1\!\!1_{4\times 4}}$$

$\downarrow$

NA BASE SOMADA

SE F=0:

$$\frac{\hbar^2}{2}\left[0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = -\frac{3}{4}\hbar^2 \Rightarrow \langle W_{hf} \rangle_{F=0} = -\frac{3}{4} A\hbar^2$$

SE F=1:

$$\frac{\hbar^2}{2}\left[2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \langle W_{hf} \rangle_{F=1} = \frac{1}{4} A\hbar^2$$

W_{hf} no nível $1s$

ESTADO FUNDAMENTAL

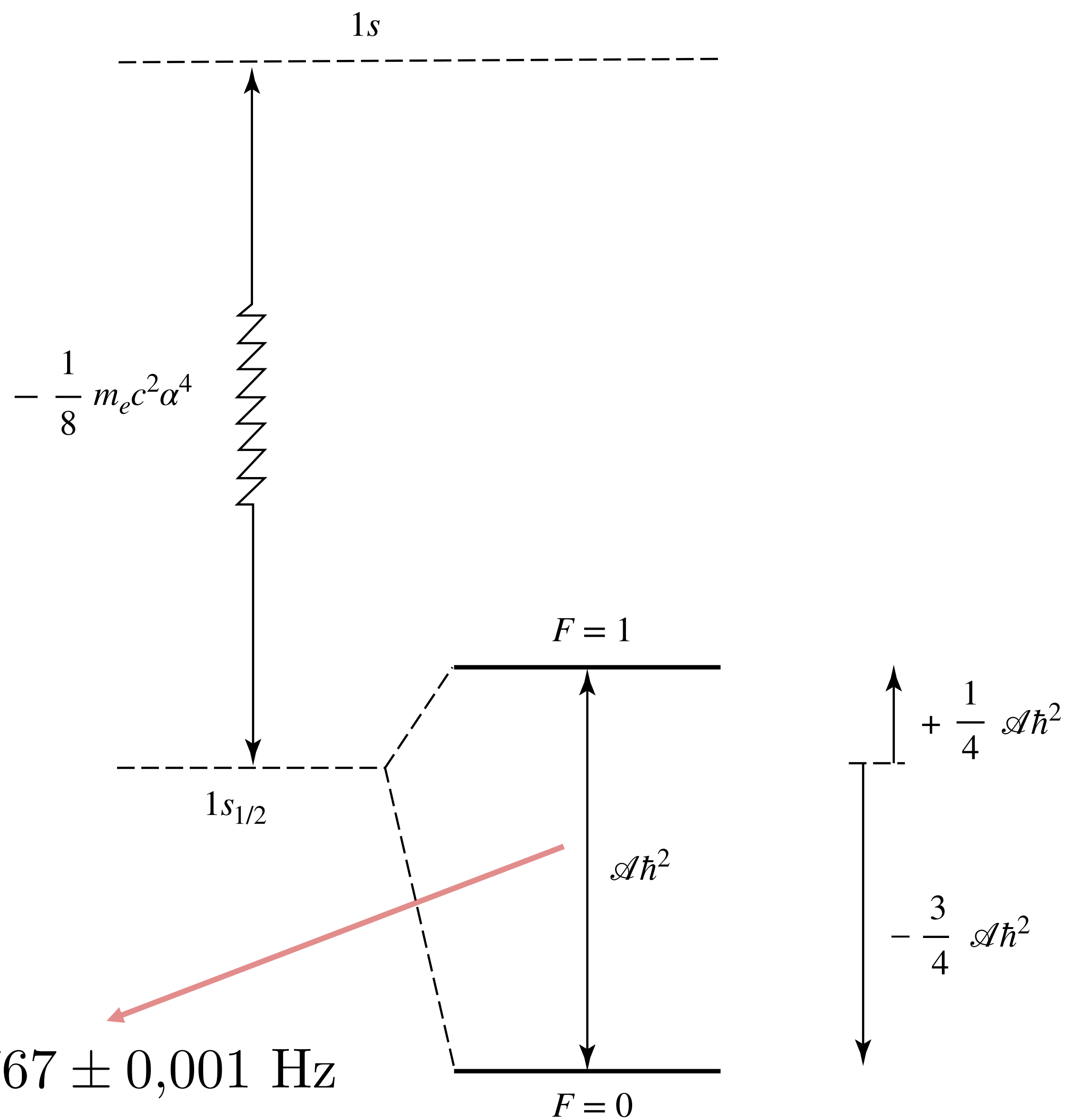
$F=0$

$F=1$

$$W_{hf}^{(1s)} = A\hbar^2 \left(\begin{array}{c|ccc} -\frac{3}{4} & & & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

↳ ESTADO EXCITADO

A estrutura hiperfina no nível n=1

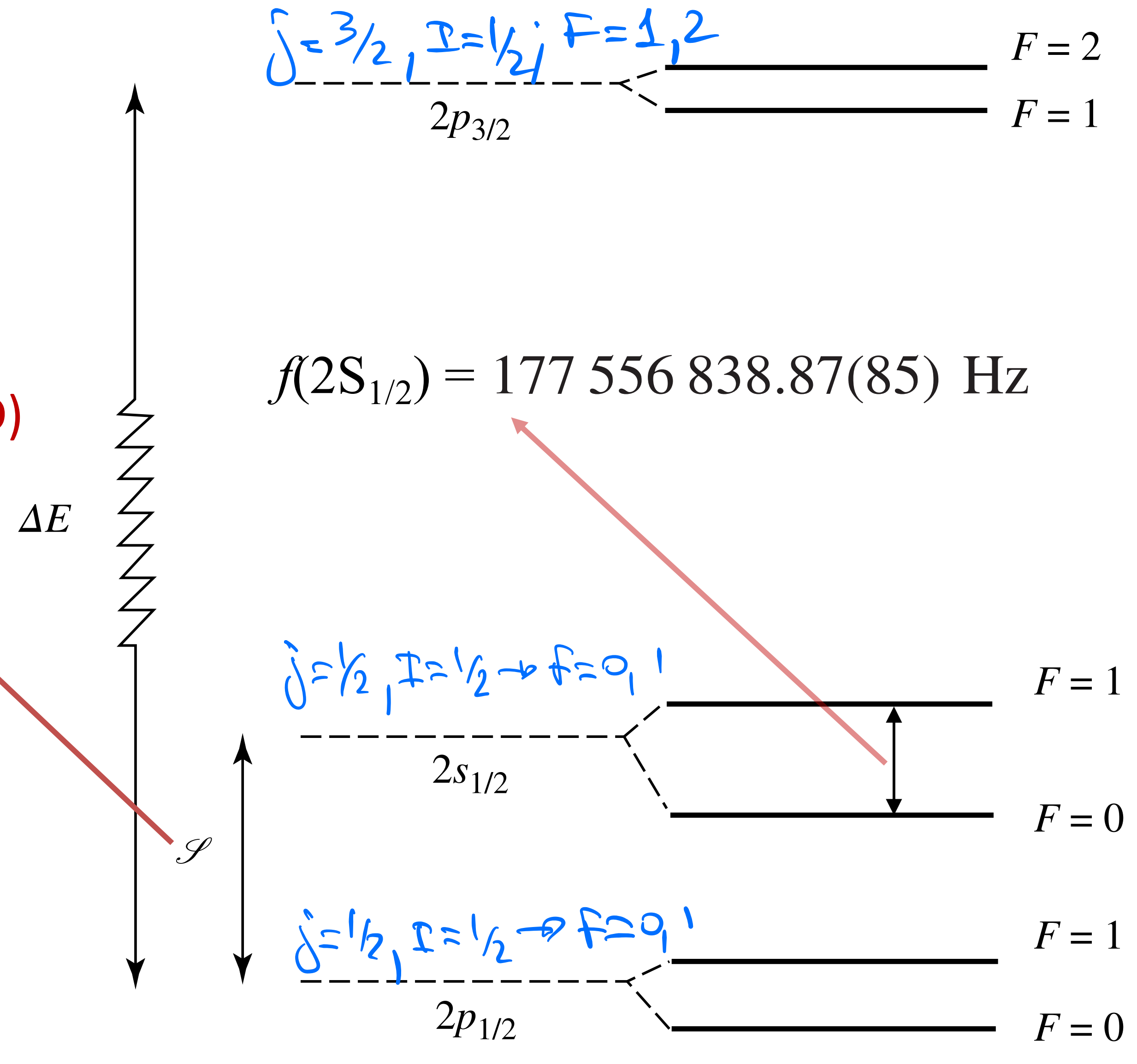


$$f(1S_{1/2}) = \frac{\mathcal{A}\hbar}{2\pi} = 1\,420\,405\,751,767 \pm 0{,}001\ \text{Hz}$$

A estrutura hiperfina no nível n=2

Deslocamento Lamb
(Eletrodinâmica quântica, QED)

$f(2S_{1/2}) = 177\ 556\ 838.87(85)$ Hz



Artigo da semana passada

PHYSICAL REVIEW LETTERS **130,** 203001 (2023)

n Physics

Ramsey Spectroscopy of the $2S_{1/2}$ Hyperfine Interval in Atomic Hydrogen

R. G. Bullis, C. Rasor, W. L. Tavis, S. A. Johnson, M. R. Weiss, and D. C. Yost
Department of Physics, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 80523, USA

(Received 9 February 2023; accepted 4 April 2023; published 18 May 2023)

The $2S_{1/2}$ hyperfine interval in atomic hydrogen was measured using Ramsey spectroscopy with a thermal beam cooled to cryogenic temperatures. The measured value is 177 556 838.87(85) Hz, which represents the most precise determination of this interval to date. The $1S_{1/2}$ hyperfine interval $f(1S_{1/2})$ and the $2S_{1/2}$ hyperfine interval $f(2S_{1/2})$ can be combined to give the quantity $D_{21} = 8f(2S_{1/2}) - f(1S_{1/2})$, which mostly eliminates uncertainty due to nuclear structure effects and is well described by bound-state quantum electrodynamics. Using the value of $f(2S_{1/2})$ from this work gives a value of $D_{21}^{\text{expt}} = 48\,959.2(6.8)$ Hz, which is in agreement with the theoretical value of $D_{21}^{\text{Theory}} = 48\,954.1(2.3)$ Hz.

D_{21}: essa combinação elimina a maior parte da incerteza sobre a estrutura do núcleo e assim permite um teste preciso da Eletrodinâmica Quântica. A teoria acima dá D_{21}=0.

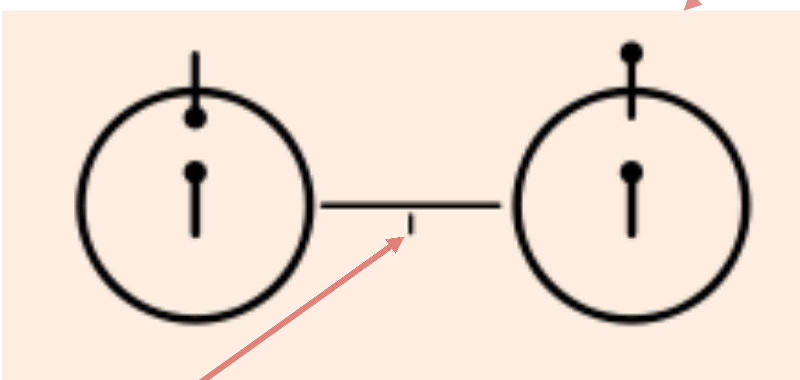
A linha de 21 cm do hidrogênio

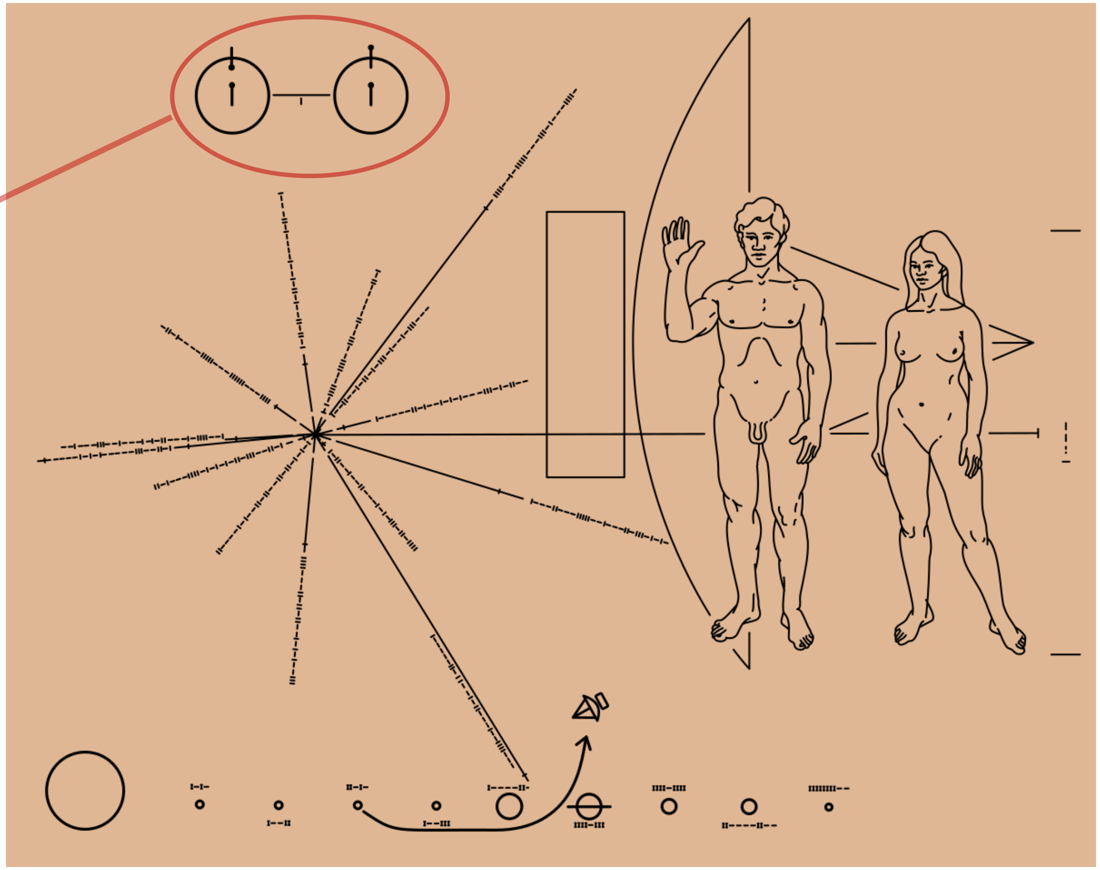
$$\frac{\mathcal{A}\hbar}{2\pi} = 1\,420\,405\,751,767 \pm 0{,}001 \text{ Hz}$$

- Comprimento de onda: $\lambda = 21$ cm
- Detecção em masers de hidrogênio: A PRECISÃO DA MEDIDA DESSA FREQUÊNCIA É CONSEGUIDA NESSES MASERS.
- Detecção em astronomia: HIDROGÊNIO É O ELEMENTO MAIS ABUNDANTE. A RADIAÇÃO DE H NO VISÍVEL É ABSORVIDA POR POEIRA CÓSMICA. A LINHA DE 21CM É POUCO ABSORVIDA.
- Meia-vida longa do estado F=1: ~ 11 MILHÕES DE ANOS.

As placas da Pioneer

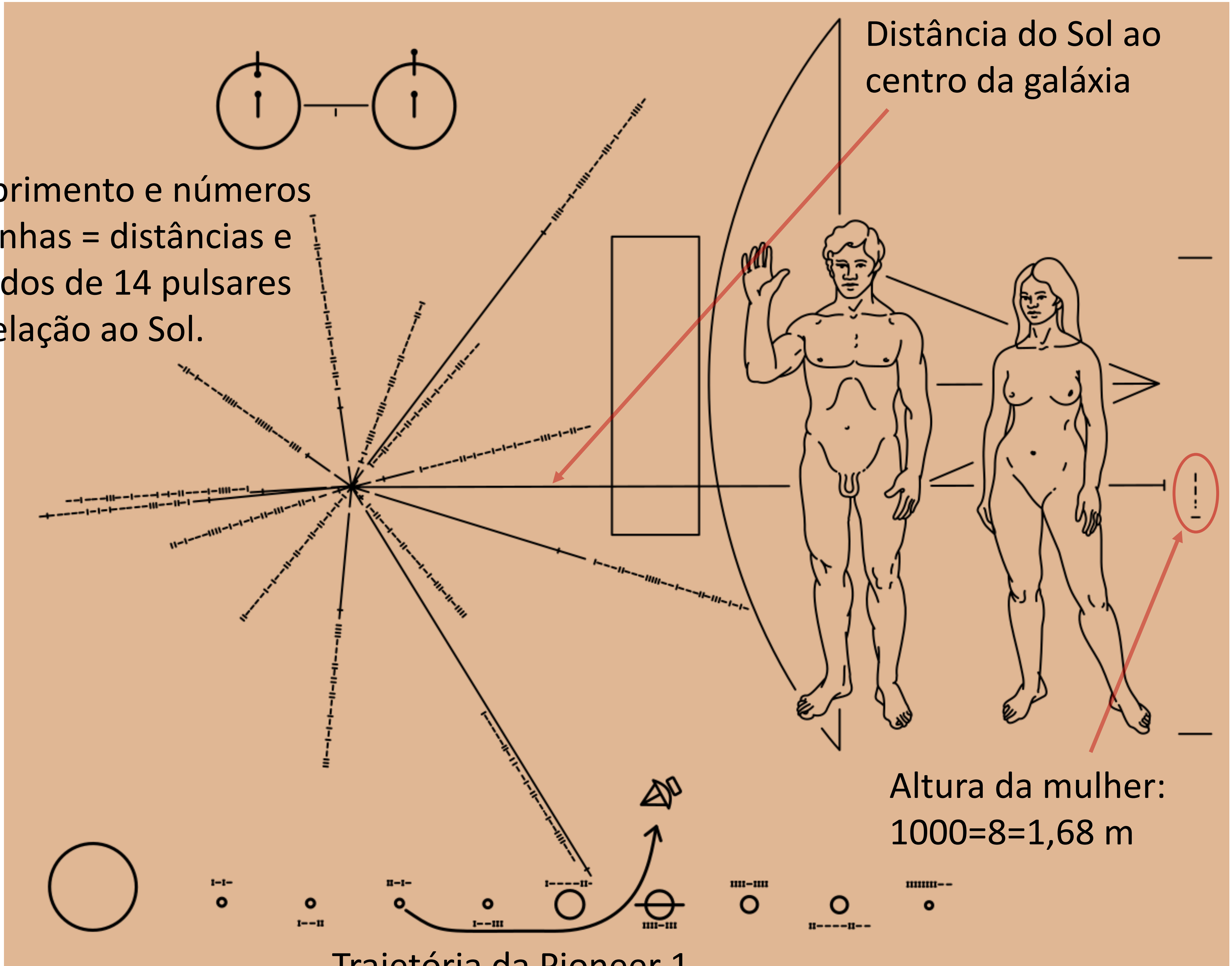
Pioneer 10 e 11 foram lançadas em 1972 e 1973, respectivamente. Elas carregam placas que, espera-se, possam ser lidas por uma forma inteligente de vida extra-terrestre. Um dos elementos é a transição hiperfina do átomo de H. O comprimento de onda de 21 cm é usado como unidade de comprimento e o período como unidade tempo. A mulher mede 8 unidades.





I : representa 1 (sistema binário)

- : representa 0 (sistema binário)


Distância do Sol ao centro da galáxia
Comprimento e números nas linhas = distâncias e períodos de 14 pulsares em relação ao Sol.
Altura da mulher: 1000=8=1,68 m
Trajetória da Pioneer 1