F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023

12/06/2023

Aula 25

Aula passada

Interação de um átomo com ondas eletromagnéticas

O Hamiltoniano: $H = \frac{\left[\mathbf{P} - q\mathbf{A}\left(\mathbf{R}, t\right)\right]^2}{2m} + V\left(R\right) - \frac{q}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}\left(\mathbf{R}, t\right)$

A onda eletromagnética:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\mathbf{R}, t\right) &= E_0 \cos\left(kY - \omega t\right)\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{B}\left(\mathbf{R}, t\right) &= \frac{E_0}{c} \cos\left(kY - \omega t\right)\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{A}\left(\mathbf{R}, t\right) &= \frac{E_0}{\omega} \sin\left(kY - \omega t\right)\hat{\mathbf{z}} \\ \omega &= ck \\ \overline{\mathbf{S}} &= \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}}$$

Em ordem linear nos campos: $H = H_0 + W_I\left(t\right) + W_{II}\left(t\right)$

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V\left(R\right)$$

$$W_I\left(t\right) = -\frac{q}{m}\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\left(\mathbf{R}, t\right)$$

$$W_{II}\left(t\right) = -\frac{q}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}\left(\mathbf{R}, t\right)$$

Aula passada

Termo dominante: Perturbação de dipolo elétrico

$$\boxed{W_I(t) \approx \frac{qE_0}{m\omega} P_z \sin\omega t \equiv W_{DE}(t)}$$

$\frac{a_0}{\lambda} << 1$

$\sim 10^{-3} - 10^{-}$

Taxa de transição entre estados $|\phi_i>$ e $|\phi_f>$ para radiação não monocromática de intensidade $I(\omega)$:

$$w_{if}^{DE} = \frac{dP_{if}^{DE}(t)}{dt} = \frac{\pi q^2}{\epsilon_0 c \hbar^2} \left| \langle \varphi_f | Z | \varphi_i \rangle \right|^2 I(|\omega_{fi}|) = \frac{\pi}{\epsilon_0 c \hbar^2} \left| \langle \varphi_f | p_z | \varphi_i \rangle \right|^2 I(|\omega_{fi}|), \quad \boxed{p_z = qZ}$$

Para outras polarizações lineares:

$$w_{if}^{DE} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c \hbar^2} \left| \langle \varphi_f | p_x | \varphi_i \rangle \right|^2 I(|\omega_{fi}|)$$

$$w_{if}^{DE} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c \hbar^2} \left| \langle \varphi_f | p_y | \varphi_i \rangle \right|^2 I(|\omega_{fi}|)$$

Os termos de dipolo magnético e quadrupolo elétrico

$$W_I(t) = -\frac{qE_0}{m\omega}P_z\sin(kY-\omega t) = \frac{iqE_0}{2m\omega}P_z\left[e^{\overset{\sim \frac{a_0}{\lambda}}{ikY}}e^{-i\omega t} - e^{-ikY}e^{i\omega t}\right]$$

$$= \frac{iqE_0}{2m\omega}P_z\left\{\left[1+ikY+\mathcal{O}\left(k^2Y^2\right)\right]e^{-i\omega t} - \left[1-ikY+\mathcal{O}\left(k^2Y^2\right)\right]e^{i\omega t}\right\}$$

$$= \frac{iqE_0}{2m\omega}P_z\left\{e^{-i\omega t}-e^{i\omega t}\right\} - \frac{qE_0}{2m\omega}kP_zY\left(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}\right)+\mathcal{O}\left(k^2Y^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{qE_0}{m\omega}P_z\sin\omega t}_{W_{DE}(t)} - \underbrace{\frac{qE_0}{m\omega}kP_zY\cos\omega t}_{\sim \frac{a_0}{\lambda}} + \mathcal{O}\left(k^2Y^2\right)$$

$$W_{II}(t) = -\frac{q}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R},t) \sim \frac{a_0}{\lambda}$$

ATÉ ORDEM $\frac{a_0}{\lambda}$:

$$W^{(1)}(t) = -\frac{qE_0}{m\omega}\underbrace{k}_{\frac{k}{\omega}=\frac{1}{c}}P_zY\cos\omega t - \frac{q}{m}\frac{E_0}{c}S_x\cos(\underbrace{kY}_{\simeq 0}-\omega t)$$

$$= -\frac{q}{m}\frac{E_0}{c}P_zY\cos\omega t - \frac{q}{m}\frac{E_0}{c}S_x\cos(\omega t)$$

$$P_z Y = \frac{1}{2}\underbrace{(P_z Y - Z P_y)}_{L_x} + \frac{1}{2}(P_z Y + Z P_y)$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$L_x = Y P_z - Z P_y$$

$$= P_z Y - Z P_y$$

$$W^{(1)DM}(t) = -\frac{q}{m}\underbrace{\frac{E_0}{c}}_{B_0}\left[\frac{L_x}{2} + S_x\right]\cos\omega t$$

$$= -\frac{q}{2m} B_0 [L_x + 2S_x] \cos\omega t$$

$$= -\vec{M}\cdot\vec{B}_0 \cos\omega t$$

$$\vec{M} = \frac{q}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

$$\vec{M} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

$\hookrightarrow$ DIPOLO MAGNÉTICO

OUTRAS POLARIZAÇÕES E DIREÇÕES DE INCIDÊNCIA GERAM TERMOS DO TIPO:

$$L_y + 2S_y \quad , \quad L_z + 2S_z$$

QUANTO A $\frac{1}{2}(P_z Y + Z P_y)$, FAZENDO, COMO ANTES:

$[Z, H_0]$ e $[Y, H_0]$ LEVA A (VER NOTAS):

$$\langle \varphi_f | \frac{1}{2}(P_z Y + Z P_y) | \varphi_i \rangle = \frac{m}{2i\hbar}(E_i - E_f)\langle \varphi_f | YZ | \varphi_i \rangle$$

ASSIM: $qYZ \doteq Q_{YZ}$

COMPONENTE DO OPERADOR QUADRUPOLO ELÉTRICO

SEMELHANTEMENTE, OUTRAS POLARIZAÇÕES E DIREÇÕES DE INCIDÊNCIA GERAM OUTRAS COMPONENTES Q_{ij} DO TENSOR DE QUADRUPOLO ELÉTRICO

REGRAS DE SELEÇÃO:

DIPOLO ELÉTRICO: $\Delta \ell = \pm 1$, $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$

$\Delta m_s = 0$

DIPOLO MAGNÉTICO: $\Delta \ell = 0$ $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$

$\Delta m_s = 0, \pm 1$

QUADRUPOLO ELÉTRICO:

$\Delta \ell = 0, \pm 2$ $\Delta m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2$ $\Delta m_s = 0$

Resumo

Dipolo elétrico:

$$w_{if}^{DE} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c \hbar^2} \left| \langle \varphi_f \right| p_{i=x,y,z} \left| \varphi_i \rangle \right|^2 I\left(|\omega_{fi}| \right)$$

Dipolo magnético:

$$w_{if}^{DM} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c^3 \hbar^2} \left| \langle \varphi_f \right| M_{i=x,y,z} \left| \varphi_i \rangle \right|^2 I\left(|\omega_{fi}| \right)$$

Quadrupolo elétrico:

$$w_{if}^{QE} = \frac{\pi \left| \omega_{fi} \right|^2}{4\epsilon_0 c^3 \hbar^2} \left| \langle \varphi_f \right| Q_{i,j} \left| \varphi_i \rangle \right|^2 I\left(|\omega_{fi}| \right); \quad i = x, y, z; j = x, y, z$$

Taxa de emissão espontânea

$$w_{if}^{DE} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c\hbar^2} \left|\langle\varphi_f| p_{i=x,y,z} |\varphi_i\rangle\right|^2 I\left(|\omega_{fi}|\right)$$

UMA SUGESTÃO DE COMO OBTER A TAXA DE EMISSÃO ESPONTÂNEA, QUE, NA VERDADE, REQUER A QUANTIZAÇÃO DOS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS, É A SEGUINTE

(i) FAÇA $|\langle\varphi_f|p_x|\varphi_i\rangle|^2 \longrightarrow \frac{1}{3}\left(|\langle\varphi_f|p_x|\varphi_i\rangle|^2 + |\langle\varphi_f|p_y|\varphi_i\rangle|^2 + |\langle\varphi_f|p_z|\varphi_i\rangle|^2\right)$

(ii) DO ELETROMAGNETISMO: $\frac{I(\omega)}{c} = \mathcal{S}(\omega)$

$\mathcal{S}(\omega)$: DENSIDADE DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA

E USO $\rho(\omega)$ COMO A DENSIDADE DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA DO VÁCUO:

$$\rho^{(0)}_{EM}(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}$$

TAXA DE EMISSÃO ESPONTÂNEA DE UM ESTADO EXCITADO PARA O FUNDAMENTAL

Resumo

Taxas de emissão espontânea de um estado n por dipolo elétrico (DE) e dipolo magnético (DM):

$$\omega_{n\to 1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}$$

$$w^{DE}_{\mathrm{esp}(n\to 1)} = \frac{\omega^3_{n\to 1}}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}\left[\left|\langle\varphi_n|\, p_x \,|\varphi_1\rangle\right|^2 + \left|\langle\varphi_n|\, p_y \,|\varphi_1\rangle\right|^2 + \left|\langle\varphi_n|\, p_z \,|\varphi_1\rangle\right|^2\right]$$

$$w^{DM}_{\mathrm{esp}(n\to 1)} = \frac{\omega^3_{n\to 1}}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^5}\left[\left|\langle\varphi_n|\, M_x \,|\varphi_1\rangle\right|^2 + \left|\langle\varphi_n|\, M_y \,|\varphi_1\rangle\right|^2 + \left|\langle\varphi_n|\, M_z \,|\varphi_1\rangle\right|^2\right]$$

$$[w] = \frac{1}{T}$$

$\frac{1}{w} = \tau =$ MEIA-VIDA DO ESTADO EXCITADO

Partículas idênticas

Partículas idênticas: o que são?

AS PARTÍCULAS ELEMENTARES SÃO CARACTERIZADAS POR: MASSA, CARGA, SPIN

DADAS ESSAS CARACTERÍSTICAS, NADA DISTINGUE AS PARTÍCULAS: TODOS OS ELÉTRONS SÃO IDÊNTICOS

Partículas idênticas em mecânica clássica

EM FÍSICA CLÁSSICA, O FATO DAS PARTÍCULAS SEREM IDÊNTICA NÃO TEM NENHUMA CONSEQÜÊNCIA MENSURÁVEL.

$$L[x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2] = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$+ \frac{e^2}{|x_1 - x_2|} = L[x_2, \dot{x}_2, x_1, \dot{x}_1]$$

EQS. DE MOVIMENTO

$$m \ddot{x}_1 = -k x_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{e^2}{|x_1 - x_2|}\right]$$

$$m \ddot{x}_2 = -k x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{e^2}{|x_1 - x_2|}\right]$$

SUPONHA DUAS SOLUÇÕES

$x_1(t) = x(t)$

$x_2(t) = x'(t)$

MAS:

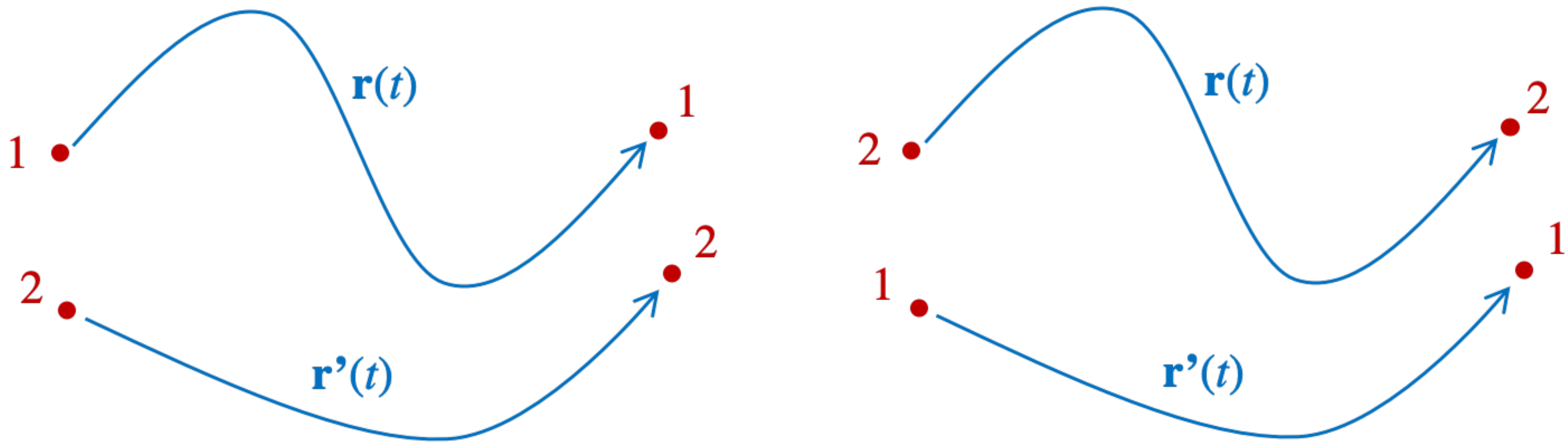
$$x_1(t) = x'(t)$$

$$x_2(t) = x(t)$$

TAMBÉM É SOLUÇÃO!

ALÉM DISSO, COMO AS TRAJETÓRIAS CLÁSSICAS SÃO BEM DEFINIDAS (EM PRINCÍPIO), UMA ROTULAGEM INICIAL DAS PARTÍCULAS PERMANECE BEM DEFINIDA PARA SEMPRE.

Apenas os rótulos distinguem as duas soluções das eqs. de movimento



QUALQUER QUANTIDADE FÍSICA (ENERGIA, MOM. LINEAR, MOM. ANGULAR) DO MOVIMENTO DA ESQUERDA SERÁ IGUAL AO DA DIREITA.

Partículas idênticas em mecânica quântica

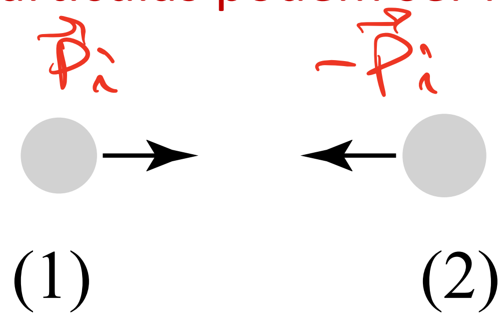
NENHUMA DAS 2 CARACTERÍSTICAS CLÁSSICAS DESCRITAS SOBREVIVE NA MEC. QUANT.

(i) AUSÊNCIA DE TRAJETÓRIAS BEM DEFINIDAS

(ii) DEGENERESCÊNCIA DE TROCA.

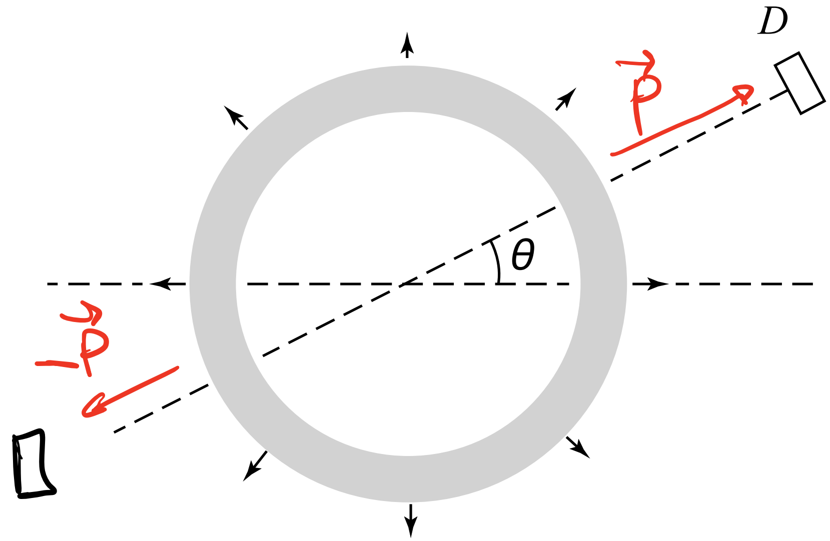
Espalhamento no ref. do centro de massa

Antes do espalhamento: pacotes localizados bem separados movendo-se um na diração do outro; partículas podem ser rotuladas

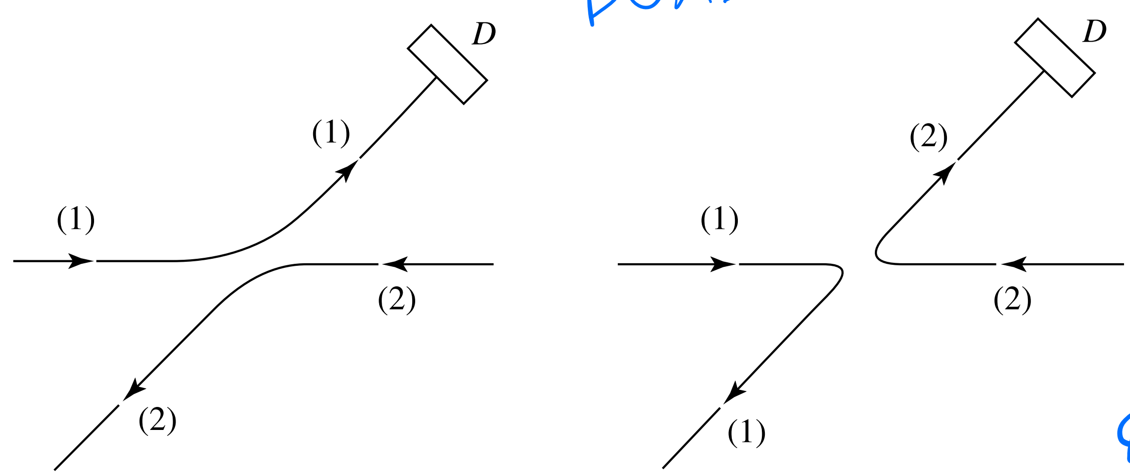


Durante a colisão: as funções de onda ocupam uma mesma região espacial; rótulos não podem mais ser usados sem ambiguidade

Após a colisão, os pacotes se expandem como ondas esféricas superpostas: detecção em θ



Qual foi a trajetória de cada partícula?



a **b**

DUAS POSSIBILIDADES CLÁSSICAS COMPATÍVEIS COM A DINÂMICA QUÂNTICA

SUPONHA QUE, APÓS A COLISÃO, O ESTADO É $|\psi\rangle$

PROPABILIDADE DE MEDIR UMA PARTÍCULA EM D:

$$dP(\vec{p}) = |\langle\psi_f(\vec{p})|\psi\rangle|^2 \, d^3p$$

$$|\psi_f(\vec{p})\rangle = |1, \vec{p}; 2, -\vec{p}\rangle$$

$$\langle\vec{r}_1, \vec{r}_2|\psi_f(\vec{p})\rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}_1}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}_2}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$|\psi_f'(\vec{p})\rangle = |1, -\vec{p}; 2, \vec{p}\rangle$$

$$\langle\vec{r}_1, \vec{r}_2|\psi_f'(\vec{p})\rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}_2}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}_1}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

É EMARANHADO

$|\uparrow\uparrow\rangle$ NÃO É

↳ $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$

PIOR AINDA, EU POSSO USAR:

$$|\psi_f''(\vec{p})\rangle = \alpha\,|\psi_f(\vec{p})\rangle + \beta\,|\psi_f'(\vec{p})\rangle$$

PARA CADA ESCOLHA, O RESULTADO É DIFERENTE!! ELE DEPENDE DE α E β