F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023

14/06/2023

Aula 26

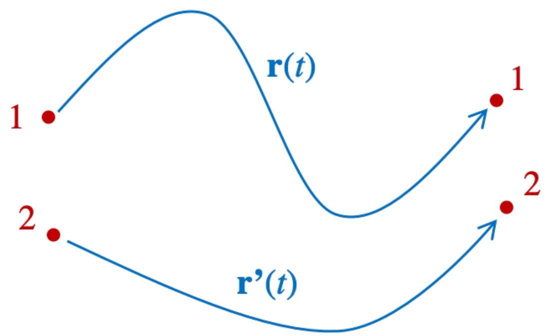
Aula passada

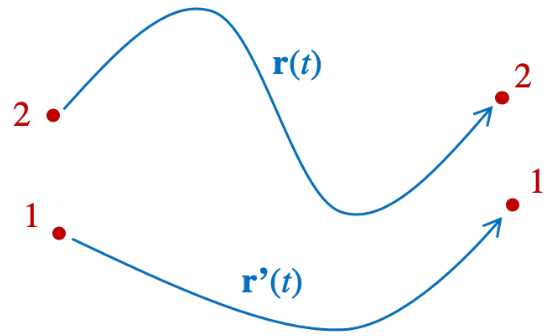
Partículas idênticas: só são identificadas por sua massa, carga, spin,...
Dois elétrons são absolutamente idênticos e indistinguíveis.

Mecânica clássica: Lagrangiana e Hamiltoniana são invariantes pela troca das variáveis dinâmicas.

$$L\left[\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1;\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2\right]=L\left[\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1\right]$$
$$H\left[\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1;\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2\right]=H\left[\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1\right]$$

Duas soluções possíveis, fisicamente indistinguíveis: $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_1(t)=\mathbf{r}(t)\,, & \mathbf{r}_2(t)=\mathbf{r}'(t) \\ \mathbf{r}_1(t)=\mathbf{r}'(t) & \mathbf{r}_2(t)=\mathbf{r}(t) \end{cases}$





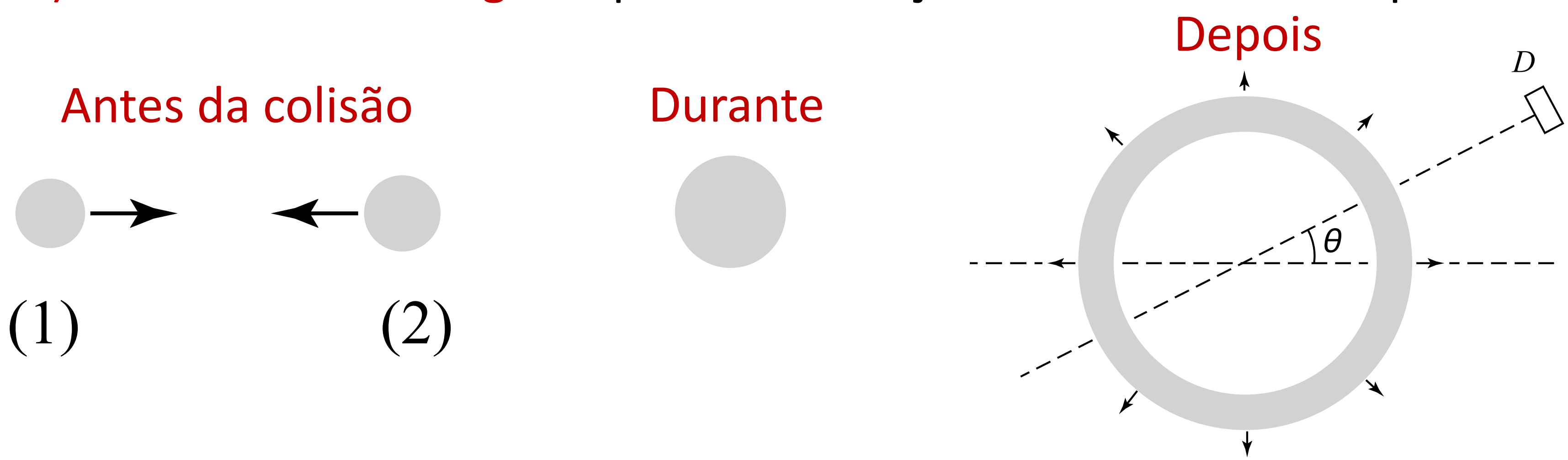
a) Ambas fornecem as mesmas previsões.
b) O rótulo dado a cada partícula permanece sempre não ambíguo.

Aula passada

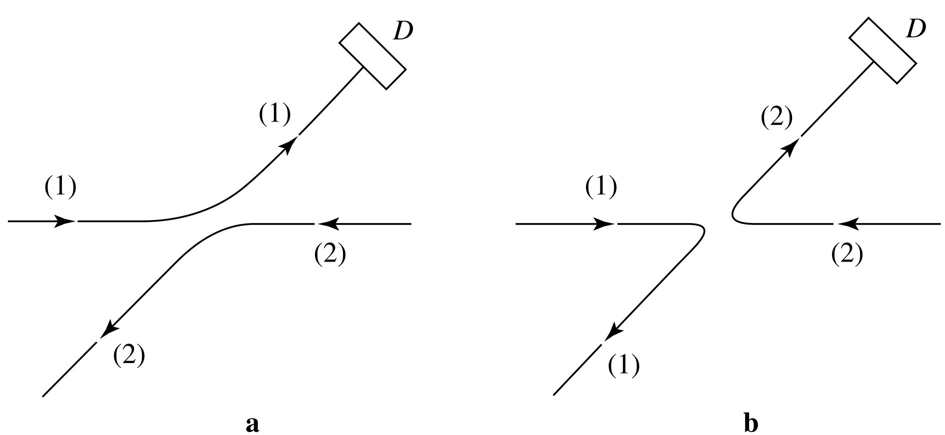
Mecânica quântica:

a) trajetórias não existem (princípio de incerteza).

b) rótulos são ambíguos quando as funções de onda se sobrepõem.

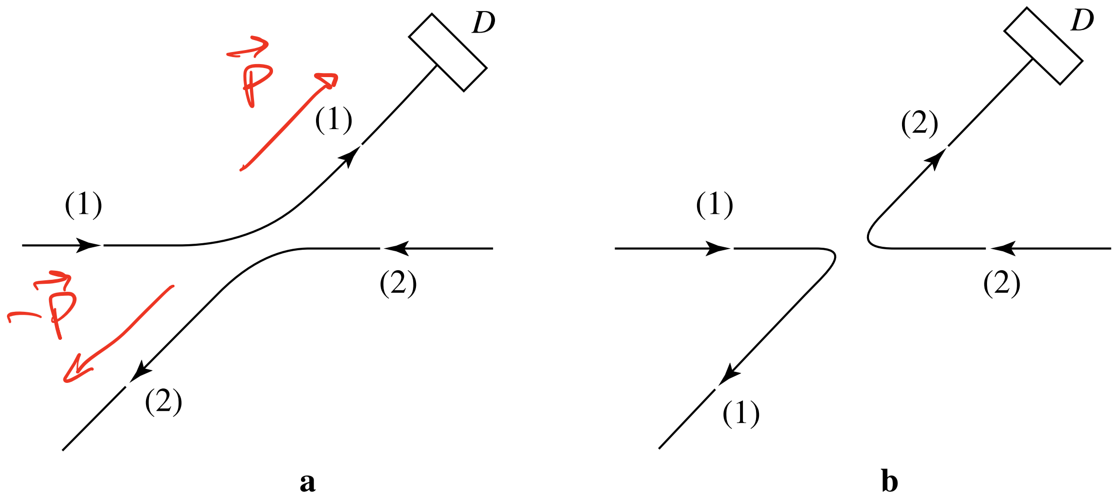


Se quisermos pensar em trajetórias, há duas possibilidades:



Aula passada

Degenerescência de troca: qual estado associar ao resultado de medir uma partícula em D?



$$|\psi_f\rangle \stackrel{?}{=} \begin{cases} |1:\mathbf{p};2:-\mathbf{p}\rangle\,, \\ |1:-\mathbf{p};2:\mathbf{p}\rangle\,, \\ \alpha\,|1:\mathbf{p};2:-\mathbf{p}\rangle+\beta\,|1:-\mathbf{p};2:\mathbf{p}\rangle \end{cases}$$

Degenerescência de troca

Degenerescência de troca: considere duas partículas idênticas de spin ½, uma com spin pra cima e a outra com spin pra baixo.

$$|\psi\rangle \stackrel{?}{=} \begin{cases} |1:+;2:-\rangle\,, \\ |1:-;2:+\rangle\,, \\ \alpha\,|1:+;2:-\rangle + \beta\,|1:-;2:+\rangle \end{cases}$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

QUAL É A PROBABILIDADE DE MEDIR S_{1x} E S_{2x} E OBTER $+\frac{\hbar}{2}$ PARA AMBAS?

$P = |\langle \varphi_f | \psi \rangle|^2$

$|\varphi_f\rangle = |++\rangle_x = \frac{1}{2}\left[|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle\right]$

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right]$ (1)

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right]$ (2)

$$\langle \varphi_f | \psi \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle ++| + \langle +-| + \langle -+| + \langle --|\right]\left[\alpha|+-\rangle + \beta|-+\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2}$$ QUE DEPENDE DE α E β!

Operadores de permutação

$N=2$ PARTÍCULAS NÃO NECESSARIAMENTE IDÊNTICAS DE SPIN s

$\mathcal{E}(1)$, $\mathcal{E}(2)$

UMA BASE COMPLETA EM CADA UM:

$|\vec{r}_1, m_1\rangle \qquad m_1 = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$

$|\vec{r}_2, m_2\rangle \qquad m_2 = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$

UMA OUTRA BASE $\{|u_i\rangle, i=1,2,3,\ldots\}$

$$\mathcal{E}(1): \langle \vec{r}_1, m_1 | u_i\rangle = u_i(\vec{r}_1, m_1) \xrightarrow{s=1/2} \begin{bmatrix} u_i(\vec{r}_1, +) \\ u_i(\vec{r}_1, -) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}(2): \langle \vec{r}_2, m_2 | u_i\rangle = u_i(\vec{r}_2, m_2) \xrightarrow{s=1/2} \begin{bmatrix} u_i(\vec{r}_2, +) \\ u_i(\vec{r}_2, -) \end{bmatrix}$$

BASE DO ESPAÇO TOTAL DAS 2 PARTÍCULAS:

$$|1:u_i\,;\,2:u_j\rangle = |2:u_j\,;\,1:u_i\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{r}_1, m_1\,;\,\vec{r}_2, m_2 | 1:u_i\,;\,2:u_j\rangle = u_i(\vec{r}_1, m_1)\, u_j(\vec{r}_2, m_2)$$

NOTE QUE:

$$|1:u_i\,;\,2:u_j\rangle \neq |1:u_j\,;\,2:u_i\rangle \quad (i \neq j)$$

UM OPERADOR LINEAR P_{21} (OPERADOR DE PERMUTAÇÃO):

$$P_{21}|1:u_i\,;\,2:u_j\rangle = |1:u_j\,;\,2:u_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}\, |1:u_i\,;\,2:u_j\rangle \quad \text{(QUALQUER ESTADO)}$$

$$P_{21}|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}\, P_{21}|1:u_i\,;\,2:u_j\rangle = \sum_{ij} c_{ij}\,|1:u_j\,;\,2:u_i\rangle$$

COMO i E j SÃO ÍNDICES MUDOS, POSSO $i \rightleftarrows j$

$$P_{21}|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ji} |1: u_i ; 2: u_j\rangle$$

SE EU ESCOLHER A BASE COMO SENDO $|\vec{r}, m\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1, m_2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \overbrace{\langle 1: \vec{r}_1, m_1 ; 2: \vec{r}_2, m_2 | \psi\rangle}^{\psi(\vec{r}_1, m_1 ; \vec{r}_2, m_2)} \times$$

$$|1: \vec{r}_1, m_1 ; 2: \vec{r}_2, m_2\rangle$$

$$P_{21} \psi(\vec{r}_1, m_1 ; \vec{r}_2, m_2) = \psi(\vec{r}_2, m_2 ; \vec{r}_1, m_1)$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_0(\vec{r}_1)\, \varphi_{10}(\vec{r}_2)$$

$$P_{21} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_0(\vec{r}_2)\, \varphi_{10}(\vec{r}_1)$$

Propriedades de P_{21}

(a) $P_{21}^2 = 1 \Rightarrow P_{21}^{-1} = P_{21}$

(b) $P_{21} = P_{21}^{\dagger}$ (HERMITIANO)

(c) DE (a) E (b): $P_{21}^{-1} = P_{21}^{\dagger} \Rightarrow P_{21}$ É UNITÁRIO

Auto-vetores de P_{21}

CONSEQUÊNCIAS:

(d) OS AUTO-VALORES DE P_{21} SÃO +1 E -1.

SE $|\lambda\rangle$ É AUTO-VETOR COM AUTO-VALOR λ:

$$P_{21}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow P_{21}^2|\lambda\rangle = \lambda P_{21}|\lambda\rangle$$

$$|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\lambda = +1 \text{ ou } -1$$

SE UM ESTADO $|\psi_s\rangle$ É AUTO-VETOR COM AUTO-VALOR $\underline{1}$, ELE É DITO UM ESTADO SIMÉTRICO

$$P_{21}|\psi_s\rangle = |\psi_s\rangle \qquad P_{21}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle$$

SE $|\psi_A\rangle$ TEM AUTO-VALOR -1 ELE É DITO ANTI-SIMÉTRICO

Simetrizador e anti-simetrizador

DEFINO: $\underbrace{S = \frac{1}{2}(1 + P_{21})}_{\text{SIMETRIZADOR}}$ E $\underbrace{A = \frac{1}{2}(1 - P_{21})}_{\text{ANTI-SIMETRIZADOR}}$

(a) $S^\dagger = S$, $A^\dagger = A$

(b) $S^2 = S$, $A^2 = A$

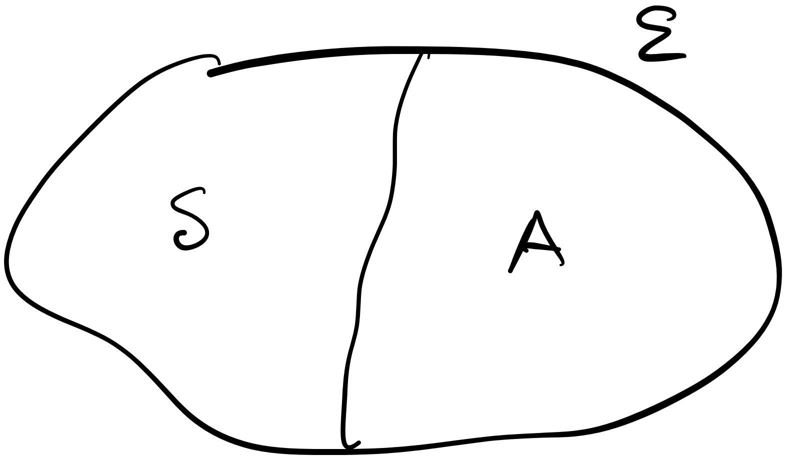
S, A SÃO PROJETORES

(c) PROJETORES ORTOGONAIS ENTRE SI: $SA = AS = 0$

POR EXEMPLO:

$$|\phi\rangle = S|\psi\rangle$$
$$|\phi'\rangle = A|\psi'\rangle \Rightarrow \langle\phi'|\phi\rangle = 0$$

(d) $A + S = 1$ A E S SÃO COMPLEMENTARES.



DADO $|\psi\rangle$ QUALQUER

$S|\psi\rangle$ É SIMÉTRICO

E $A|\psi\rangle$ É ANTI-SIMÉTRICO

$$P_{21}(S|\psi\rangle) = P_{21}\left[\frac{1}{2}(1+P_{21})\right]|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(P_{21}+1)|\psi\rangle = (S|\psi\rangle)$$

OU SEJA, $S|\psi\rangle$ É AUTO-VETOR DE P_{21}

COM AUTO-VALOR $\underline{+1}$

ANALOGAMENTE: $P_{21}(A|\psi\rangle) = -(A|\psi\rangle)$

Transformação de operadores por permutação

ATUAÇÃO EM OPERADORES: $P_{21}\hat{O}P_{21}^{+} =$

$= P_{21}\hat{O}P_{21}$

ESSA ATUAÇÃO É FISICAMENTE ÓBVIA:

EX.: $\vec{R}_1$

$P_{21}(\vec{R}_1)P_{21} = \vec{R}_2$

$P_{21}(\vec{R}_2)P_{21} = \vec{R}_1$

$P_{21}(\vec{L}_1)P_{21} = \vec{L}_2$

$P_{21}(\vec{L}_2)P_{21} = \vec{L}_1$

EXISTEM OPERADORES IMPORTANTES QUE SÃO SIMÉTRICOS PELA ATUAÇÃO DE P_{21}:

$$P_{21}\,\hat{O}\,P_{21} = \hat{O}$$

EXEMPLOS: $\vec{R}_1 + \vec{R}_2$: $P_{21}(\vec{R}_1 + \vec{R}_2)P_{21} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ É SIMÉTRICO

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ " "

$$H = \frac{\vec{P}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{P}_2^{\,2}}{2m} + V(\vec{R}_1) + V(\vec{R}_2) + \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}$$ É

SIMÉTRICO

DE: $P_{21}\hat{O}P_{21} = \hat{O}$

APLICANDO P_{21} PELA DIREITA

$$P_{21}\hat{O}\underbrace{P_{21}^2}_{1} = \hat{O}P_{21}$$

$$\Rightarrow P_{21}\hat{O} = \hat{O}P_{21} \Rightarrow [P_{21}, \hat{O}] = 0$$

UM OPERADOR SIMÉTRICO COMUTA COM P_{21}.

O postulado da simetrização

Postulado da simetrização (N=2): Um sistema de 2 partículas idênticas é descrito apenas por estados simétricos ou anti-simétricos, dependendo das partículas envolvidas. No primeiro caso, as partículas são chamadas de bósons (λ=1) e no segundo caso de férmions (λ = -1).

TEOREMA DE SPIN-ESTATÍSTICA: (PAULI)

PARTÍCULAS DE SPIN SEMI-INTEIRO (ELÉTRONS, PRÓTONS, NÊUTRONS, NEUTRINOS, QUARKS) SÃO FÉRMIONS.

PARTÍCULAS DE SPIN INTEIRO (FÓTONS, HIGGS, MÉSONS, GLÚONS, $W^{\pm}$, Z^{0}, GRÁVITONS) SÃO BÓSONS

Algumas consequências do postulado

a) A degenerescência de troca desaparece:

NO EXEMPLO DE DOIS SPINS 1/2 DISCUTIDO:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1:+;2:-\rangle + \beta\,|1:-;2:+\rangle$$

$$|\psi_A\rangle = A|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1 - P_{21})|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\alpha\,|1:+;2:-\rangle + \beta\,|1:-;2:+\rangle$$

$$-\alpha\,|1:-;2:+\rangle - \beta\,|1:+;2:-\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\alpha-\beta)\,|1:+;2:-\rangle - (\alpha-\beta)\,|1:-;2:+\rangle\Big]$$

$$|\psi_A\rangle = \frac{(\alpha-\beta)}{2}\Big[|1:+;2:-\rangle - |1:-;2:+\rangle\Big]$$

ELE NÃO ESTÁ NORMALIZADO. NORMALIZANDO:

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|1:+;\,2:-\rangle - |1:-;\,2:+\rangle\,\right]$$

ESSE É O ESTADO FÍSICO.

$$\beta = -\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha+\beta=0$$

NO NOSSO EXEMPLO: $\boxed{P=0}$

NO CASO DO ESPALHAMENTO, SUPONDO BÓSONS DE SPIN ZERO:

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|1:\vec{p};\,2:-\vec{p}\rangle + |1:-\vec{p};\,2:\vec{p}\rangle\,\right]$$

b) A construção dos estados:

a) CONSTRUA O ESTADO ROTULANDO ARBITRARIAMENTE AS PARTÍCULAS.

POR EXEMPLO: $|1:+;2:->$

b) APLIQUE S (BÓSONS) OU A (FÉRMIONS) NO ESTADO:

$A|1:+;2:->$

c) NORMALIZE.

O RESULTADO É O ESTADO FÍSICO

SE NO INÍCIO: $|1:u_1;2:u_1\rangle$

$$A|1:u_1;2:u_1\rangle = \frac{1}{2}(1-P_{21})|1:u_1;2:u_1\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\left[|1:u_1;2:u_1\rangle - |1:u_1;2:u_1\rangle\right]=0$$

$\Rightarrow$ É IMPOSSÍVEL CONSTRUIR UM ESTADO NORMALIZÁVEL COM 2 FÉRMIONS OCUPANDO O MESMO ESTADO:

"PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO DE PAULI"