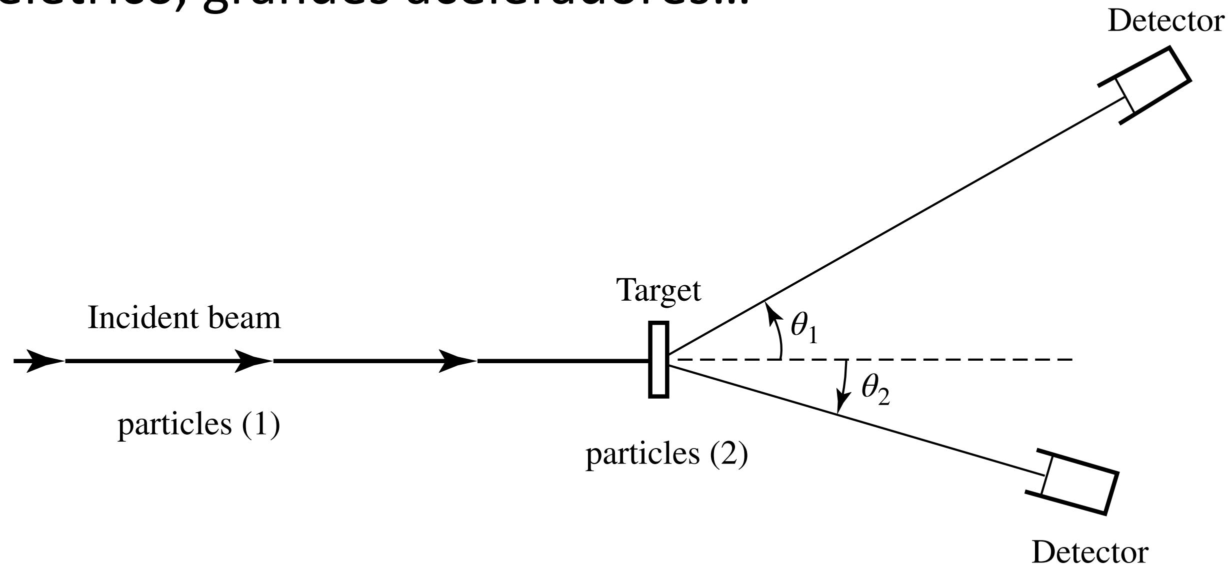
F 789 – Mecânica Quântica II

1º Semestre de 2023
20/03/2023
Aula 5

Introdução à teoria quântica de espalhamento

Experimentos de espalhamento são super comuns em física: Rutherford, efeito fotoelétrico, grandes aceleradores...

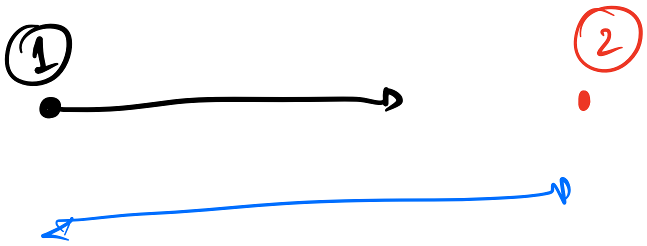


Alguns elementos essenciais: partículas incidentes (1), partículas alvo (2) (podem estar em repouco ou não), detetores posicionados longe da região de colisão.

O que discutiremos

1. Espalhamento elástico: as estruturas internas das partículas não mudam na colisão, só há transferência de momento e energia entre elas. Ficam de fora colisões inelásticas.
2. Ignoraremos os spins das partículas. Podem ser incorporados depois.
3. Densidade baixa de partículas no feixe incidente: partículas incidentes não interagem entre si.
4. Densidade baixa de partículas no alvo: probabilidade de uma partícula incidente ser espalhada mais de uma vez é muito baixa. Ignoramos a possibilidade de espalhamento múltiplo.
5. As funções de onda de partículas espalhadas por partículas alvo distintas não interferem entre si (um contra-exemplo é o a difração de Bragg).
6. Por causa de 3, 4 e 5, o problema se resume ao espalhamento que analisaremos é de uma partícula incidente por uma partícula alvo.
7. O potencial de interação entre as duas partículas só depende da sua posição relativa: $V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$

Problema de dois corpos



$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

O PROBLEMA DE DOIS CORPOS, COMO VIMOS, PODE SER DESACOPLADO NO PROBLEMA DO CENTRO DE MASSA (QUE É TRIVIAL), E NO PROBLEMA DA COORDENADA RELATIVA DE UMA PARTÍCULA DE MASSA EFETIVA $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

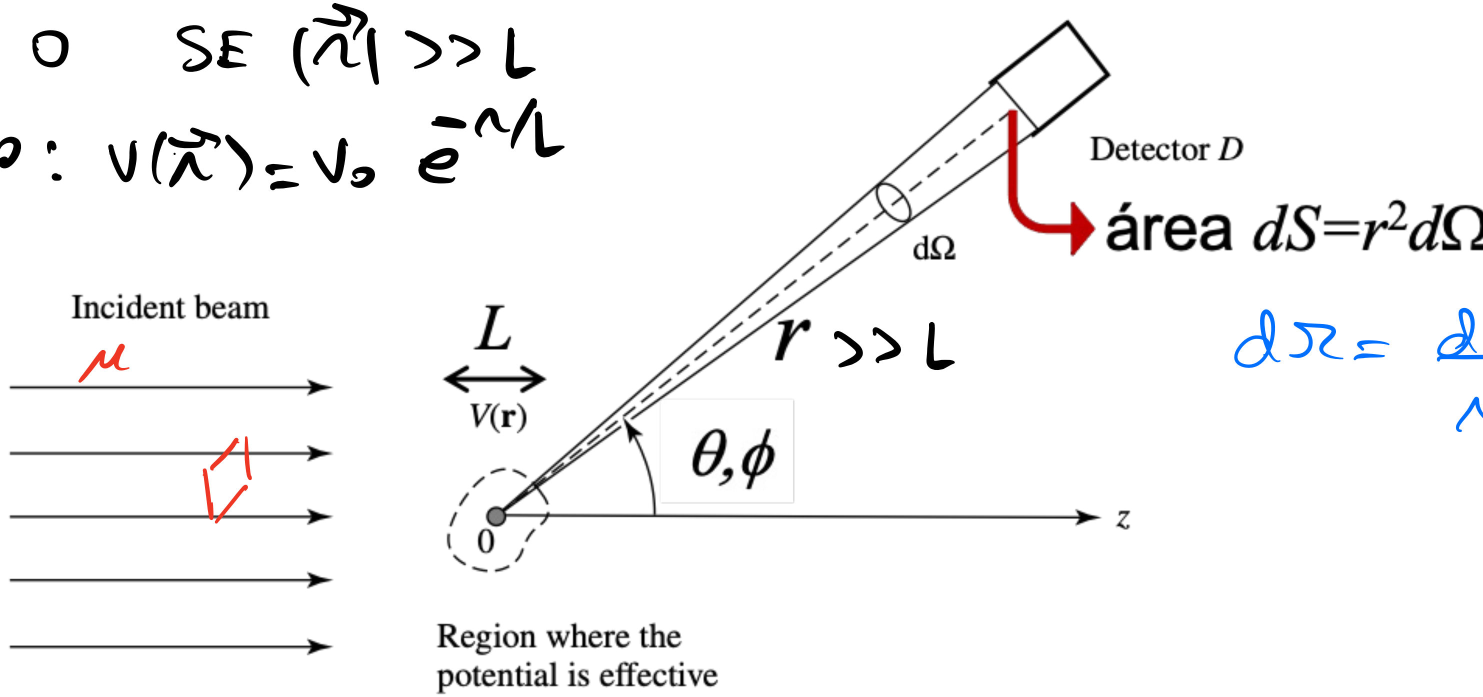
$$H_r = \frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{r})$$

$\vec{p}$ = MOMENTO RELATIVO $= \mu \dot{\vec{r}}$

Seção de choque de espalhamento

$V(\vec{r}) \simeq 0$ SE $|\vec{r}| >> L$

EXEMPLO: $V(\vec{r}) = V_0 \, e^{-r/L}$



$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

F_i = INTENSIDADE DO FEIXE INCIDENTE

= NÚMERO DE PARTÍCULAS INCIDENTES POR UNIDADE DE TEMPO POR UNIDADE DE ÁREA TRANSVERSAL AO FEIXE

$$[F_i] = \frac{1}{L^2 T}$$

dn = NÚMERO DE PARTÍCULAS QUE CHEGA NO DETECTOR POR UNIDADE DE TEMPO

$$[dn] = \frac{1}{T}$$

A SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL DE ESPALHAMENTO:

$$\sigma(\theta,\phi) \equiv \frac{dn}{F_n \, d\Omega} \Rightarrow [\sigma(\theta,\phi)] = \frac{1}{\cancel{T}} L^2 \cancel{T} = L^2$$

SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE ESPALHAMENTO:

$$\sigma = \int \sigma(\theta,\phi)\, d\Omega = \int \sigma(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

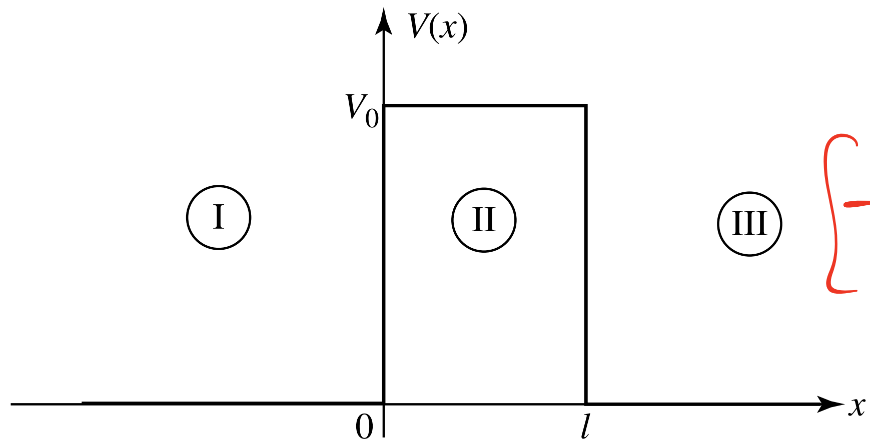
SE $\sigma(\theta,\phi) = \sigma(\theta)$

$$\sigma = 2\pi \int \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

UNIDADE COMUM $\Rightarrow$ 1 BARN $= 10^{-24}\ cm^2 = 10^{-6}\ \text{Å}^2$

Estados estacionários de espalhamento (1D)

O exemplo 1D, já estudado, nos guiará no raciocínio físico.



$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\psi(x)$$

A FUNÇÃO DE $\psi_k(x)$, SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA DE (1) É:

I : $\psi_k(x) = A_1 e^{ikx} + A_1' e^{-ikx}$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

II : $\psi_k(x) = \ldots$

III : $\psi_k(x) = A_3 e^{ikx}$

$\psi_k(x)$ NÃO É DE QUADRADO INTEGRÁVEL

FOI VISTO QUE $R = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right|^2$ E $T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$ SÃO AS PROBABILIDADES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO, RESP.

ESTADOS FÍSICOS PODEM SER CONSTRUÍDOS PELA SUPERPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES $\psi_k(x) \to \psi(x,t)$

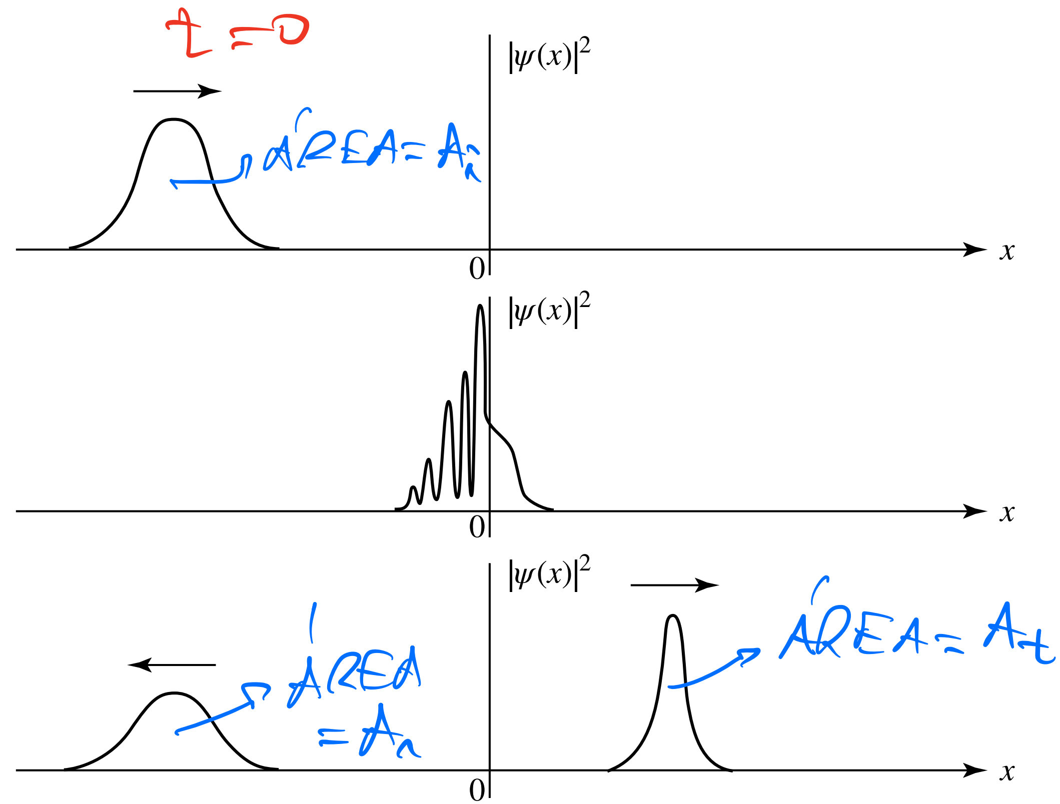
$$\psi(x,0) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, g(k)\, \psi_k(x)$$ → PACOTE LOCALIZADO À ESQUERDA DO POTENCIAL (VER FIGURA ADIANTE)

EVOLUÇÃO TEMPORAL DO PACOTE:

$$\psi(x,t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, g(k)\, \psi_k(x)\, e^{-iE_k t/\hbar} \qquad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

Os pacotes de onda

Complemento J_I do Cohen-Tannoudji



PROBABILIDADE DE TRANSMISSÃO $= \dfrac{A_t}{A_i}$

REFLEXÃO $= \dfrac{A_r}{A_i}$

$$A_t + A_r = A_i$$

MOSTRA-SE NO COMPLEMENTO:

$$\frac{A_t}{A_i} = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 \quad \text{E} \quad \frac{A_r}{A_i} = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right|^2$$

Estados estacionários de espalhamento (3D)

$$H\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}) \qquad H = H_0 + V(\vec{r}) = \frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{r})$$

HIPÓTESE: $V(\vec{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \underline{0}$ MAIS RÁPIDO QUE $\frac{1}{r}$

SUPOR $V(\vec{r}) < 0$ DE TAL FORMA $E > 0 \Rightarrow$ ESTADOS DE ESPALHAMENTO NÃO NORMALIZÁVEIS

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} > 0$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\psi(\vec{r})$$

MULTIPLICO TUDO POR $\frac{2\mu}{\hbar^2}$:

$$\left[-\nabla^2 + \overbrace{\frac{2\mu}{\hbar^2}V(\vec{r})}^{U(\vec{r})} - k^2\right]\psi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \left[\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

Condições de contorno

(i) UMA PARTE INCIDENTE

(ii) UMA PARTE TRANSMITIDA

REGIÃO $(r \gg L$

(iii) UMA PARTE ESPALHADA

(i) + (ii) $\psi_i(\vec{r}) = A\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $\quad (\vec{k} = k\hat{z})$

$\psi_t(\vec{r}) = B\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

(iii) CHUTE $\psi_s(\vec{r}) \sim \dfrac{e^{ikr}}{r}$ (ONDA ESFÉRICA)

DE FATO, PARA $r \gg L$, $U(\vec{r}) \sim 0$:

$$\left[\nabla^2 + k^2\right]\psi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r) + k^2\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(\cancel{r}\,\frac{e^{ikr}}{\cancel{r}}\right) = \frac{(ik)^2 e^{ikr}}{r} = -k^2\psi_s(\vec{r})$$ ✓

MELHOR AINDA $\boxed{\psi_s(\vec{r}) = f(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}}$

$$\left[\nabla^2+k^2\right]\psi_s(\vec{r}) = \left[\sim\frac{1}{r^2}\right]\psi_s(\vec{r}) \longrightarrow 0$$

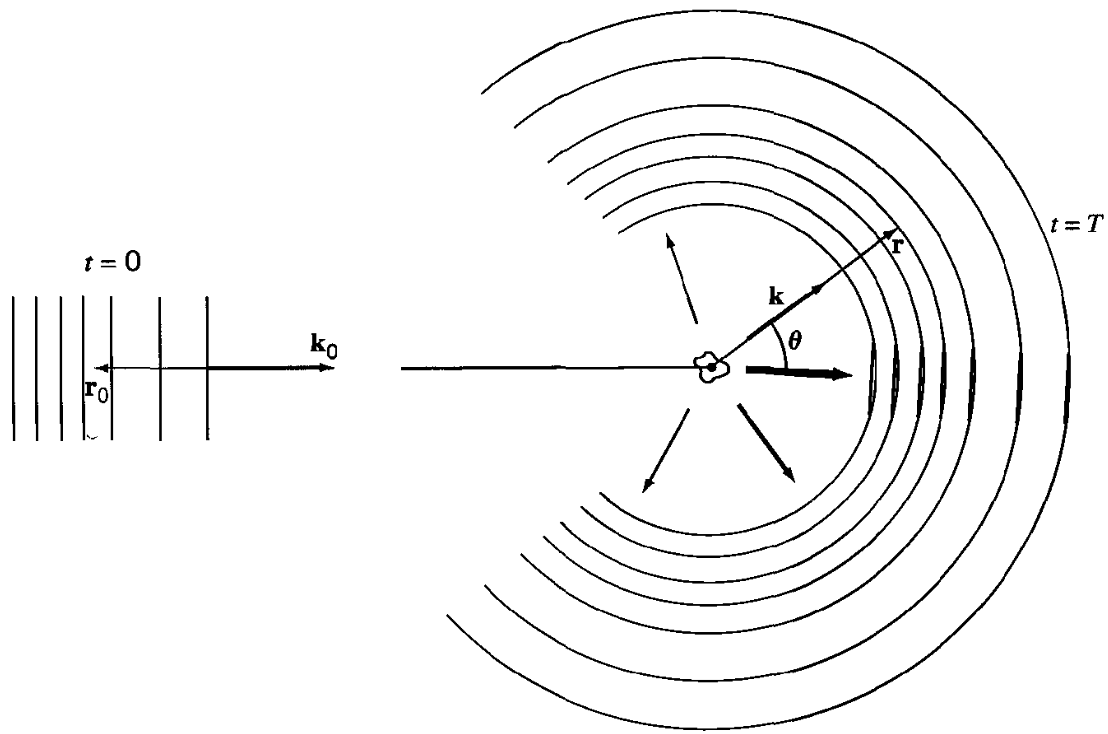
AO FINAL, PROCURAMOS SOLUÇÕES DE

$$\left[\nabla^2+k^2-U(\vec{r})\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0$$

TAIS QUE, QUANDO $r \gg L$!

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow[r\gg L]{} A\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f_k(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

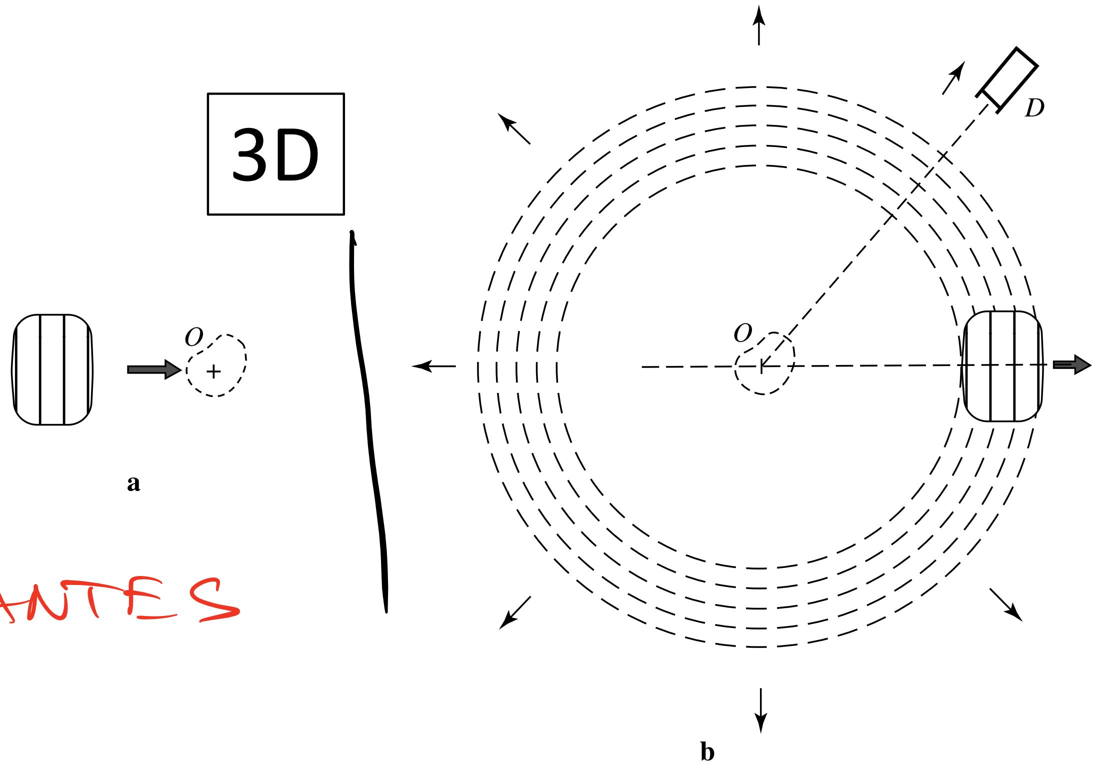
$f_k(\theta,\phi)$ = AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO



$t = 0$
$\mathbf{k}_0$
$\mathbf{r}_0$
$\mathbf{k}$
$\mathbf{r}$
θ
$t = T$

Os pacotes de onda em 3D

3D



ANTES

→ DEPOIS

compare com 1D