Considerações gerais sobre as equações de Maxwell

As equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Note que agora temos o termo da "corrente de deslocamento" $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ introduzido por Maxwell para garantir a conservação da carga. Realmente, tomando o divergente da última equação:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 = \mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{\partial t}$$

$$= \mu_0\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

Essa equação é equivalente à conservação <u>local</u> de carga. Para ver isso, tomamos a sua integral em um volume V fixo no espaço:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,d^3x = \int_{S(V)} \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \text{corrente total (carga por unidade de tempo) que atravessa } S(V)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, d^3x = \frac{dQ}{dt} =$$ taxa de variação temporal da carga total contida em V

$$\Rightarrow \boxed{\int_{S(V)} \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \text{CONSERVAÇÃO LOCAL DA CARGA}}$$

A solução particular das eq. de Maxwell é obtida através dos potenciais Φ e $\vec{A}$. Eles são introduzidos a partir das equações <u>homogêneas</u> (que não envolvem as fontes ρ e $\vec{J}$):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left[\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

As relações acima entre $(\vec{E},\vec{B})$ e $(\Phi,\vec{A})$ garantem que as equações homogêneas de Maxwell sejam <u>identicamente</u> satisfeitas. Restam as outras duas equações não-homogêneas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\nabla^2\Phi - \frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Reescrevendo: $(c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0)$

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] = -\mu_0\vec{J}$$

As equações podem ser simplificadas se utilizarmos a arbitrariedade na definição dos potenciais. Vimos que $\vec{A}$ é arbitrário a menos de um ~~gradiente~~ gradiente:

$$\boxed{\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}'$$

A transformação acima, no entanto, pode modificar $\vec{E}$:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)$$

Podemos obter $\vec{E}' = \vec{E}$ se impusermos que Φ também se transforme:

$$\Phi \rightarrow \boxed{\Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$

A transformação dos potenciais Φ e $\vec{A}$ acima é chamada de uma <u>transformação de calibre</u> ("gauge"). Como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não se modificam dizemos que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ têm <u>invariância de calibre</u>.

A invariância de gauge pode ser explorada para impormos que:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0}$$ "Condição de Lorenz"

Assim, ficamos com equações desacopladas:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}}$$

Já veremos como resolvê-las. Primeiro, mostremos como "ajustar" Φ e $\vec{A}$ de modo a satisfazer a condição de Lorenz. Sejam $\vec{A}$ e Φ quaisquer. Nesse caso,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \chi(\vec{x},t) = \text{função escalar de } \vec{x} \text{ e } t.$$

Fazendo uma transformação de gauge genérica:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Nesse caso:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$$= \chi(\bar{x},t) + \nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

Se acharmos $\Lambda(\bar{x},t)$ tal que:

$$\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\chi(\bar{x},t) = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$$

então $\vec{A}'$ e Φ' satisfarão a condição de Lorenz. Note que a equação que Λ acima satisfaz é a mesma que $\vec{A}$ e Φ satisfazem e que resolveremos mais adiante.

Mesmo que $\vec{A}$ e Φ satisfaçam:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

ainda assim podemos transformá-los

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

e continuarmos a satisfazer a condição de Lorenz desde que:

$$\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$$

Todos os potenciais Φ e $\vec{A}$ que satisfazem a condição de Lorenz pertencem ao chamado "calibre de Lorenz".

<u>Calibre de Coulomb (ou transverso ou de radiação)</u>

Outros calibres podem ser utilizados. Um exemplo importante é o calibre de Coulomb:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Nesse caso: $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ cuja solução é:

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'$$

que é o potencial <u>instantâneo</u> devido a $\rho(\vec{x},t)$.

Além disso:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

O segundo termo do lado direito é:

$$\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0}\vec{\nabla}\int \frac{\frac{\partial \rho(\vec{x}',t)}{\partial t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \equiv +\mu_0 \vec{J}_\ell$$

onde usamos a equação de continuidade da carga e $c^2\varepsilon_0 = 1/\mu_0$. A expressão de $\vec{J}_\ell$ nos mostra que

$$\vec{\nabla}\times\vec{J}_\ell = 0$$

Na verdade, $\vec{J}_\ell$ é a parte "longitudinal" de $\vec{J}$. $\vec{J}$ pode ser escrita com a soma de uma parte longitudinal (com rotacional zero) e uma parte transversal (com divergente zero)

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_t \qquad \text{onde } \vec{\nabla}\times\vec{J}_\ell = 0 \text{ e } \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t = 0$$

Com efeito:

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \int \vec{J}(\vec{x}',t)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\vec{J}(x',t)\,d^3x'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \nabla^2\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]d^3x'$$

Mas:

$$\nabla^2 \vec{C} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{C}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C})$$

$$\Rightarrow \vec{J}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right] - \frac{1}{4\pi}\int\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right]d^3x'$$

O primeiro termo acima tem divergente nulo:

$$\boxed{\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right)}$$ "Corrente transversal"

O segundo termo é longitudinal:

$$\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

Além disso:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = \vec{J}(\vec{x}',t)\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$$

$$= -\vec{J}(\vec{x}',t)\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$$

Levando na expressão acima e integrando por partes:

$$\boxed{\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'}$$ "Corrente longitudinal"

Assim:

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{J}_\ell = \mu_0\vec{J}_t}$$

Isso mostra que apenas a corrente transversal é fonte de $\vec{A}$ no calibre de Coulomb, daí chamá-lo de calibre transversal. Note que tomando o divergente dos dois lados da equação acima obtemos zero identicamente.

Solução particular da equação de onda não homogênea

Para resolver as equações de $\vec{A}$ e Φ (note que elas são idênticas) usaremos o método da função de Green. A equação geral é:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f(\bar{x},t)$$

Consideremos:

$$\nabla^2 G(\bar{x},t;\bar{x}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\bar{x},t;\bar{x}',t')}{\partial t^2} = -\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')\,\delta(t-t')$$

É óbvio que, como o lado esquerdo da equação é invariante por translações espaciais e temporais:

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \qquad \tau = t - t'$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \nabla_R^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

que podemos escrever:

$$G(\bar{x},t;\bar{x}',t') = G(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = G(\vec{R},\tau)$$

$$\Rightarrow \nabla_R^2 G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -\delta^{(3)}(\vec{R})\,\delta(\tau)$$

(faremos $\bar{\nabla}_R \to \bar{\nabla}$ daqui por diante). Usaremos transformadas de Fourier para resolver a última equação

$$G(\vec{R},\tau) = \int d^3k\, d\omega\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\, e^{-i\omega\tau}\, G(\vec{k},\omega)$$

$$\delta^{(3)}(\vec{R})\,\delta(\tau) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\, e^{-i\omega\tau}$$

$$\Rightarrow \int d^3k\,d\omega\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\, e^{-i\omega\tau} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\vec{k},\omega) =$$

$$= -\int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\, e^{-i\omega\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{-1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}}$$

$$G(\vec{R},\tau) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\,\frac{(-1)\,e^{(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega\tau)}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega\tau)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Fazendo a integração angular

$$G(\vec{R},\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \int_0^{\infty} \frac{k^2\,dk}{k^2 - \omega^2/c^2}\,\frac{(2\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, e^{-i\omega\tau}\, e^{ikR\cos\theta}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2}\,\frac{k^2 e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2/c^2} \underbrace{\int_{-1}^{+1} d\mu\, e^{ikR\mu}}_{\frac{1}{ikR}\left(e^{ikR} - e^{-ikR}\right) = \frac{2\sin kR}{kR}}$$

$$G(\vec{R},\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi R}\, e^{-i\omega\tau} \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2}\,\frac{2k\sin kR}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi R}\, e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2}\,\frac{k\sin kR}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

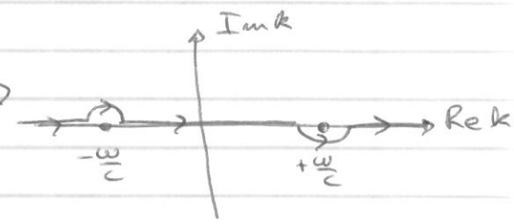
Existe uma ambiguidade na integração acima quanto à maneira de tratar as singularidades do integrando nos pólos simples em:

$$k = \pm \frac{\omega}{c}$$

Isso reflete as possíveis condições de contorno do problema, como veremos. Vamos nos concentrar em dois casos importantes:

(i) $\omega \to \omega + i\eta'$ onde $\eta' \to 0^+$

$$I_k^{(+)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{k \sin kR}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} \Rightarrow$$



Usando o lema de Jordan* (verifique a sua aplicabilidade) depois de escrevermos $\sin kR = \frac{1}{2i}(e^{ikR} - e^{-ikR})$:

$$I_{k1}^{(+)} = \frac{1}{2i} \int_{\circlearrowleft} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{k\, e^{ikR}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{4}$$

$$I_{k2}^{(+)} = \frac{1}{2i} \int_{\circlearrowright} \frac{dk}{2\pi} \frac{k\, e^{-ikR}}{\left(k - \frac{\omega}{c} - i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} + i\eta\right)} = -\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{4}$$

$$I_k^{(+)} = I_{k1}^{(+)} - I_{k2}^{(+)} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\omega}{c}R}$$

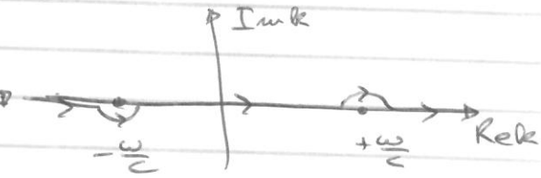
$$G^{(+)}(R,\tau) = \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} e^{i\frac{\omega}{c}R} = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right)$$

Note que: $G^{(+)}(R,\omega) = \dfrac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R}$

*: Arfken, pg. 406-408

(ii) $\omega \to \omega - i\eta'$ onde $\eta' \to 0^+$

$$I_k^{(-)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{k \sin kR}{\left(k - \frac{\omega}{c} + i\eta\right)\left(k + \frac{\omega}{c} - i\eta\right)} \Rightarrow$$



Analogamente:

$$I_{k_1}^{(-)} = \int_{\Rightarrow} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{1}{2i} \frac{k\, e^{ikR}}{(\quad)(\quad)} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{4}$$

$$I_{k_2}^{(-)} = \int_{\Rightarrow} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{1}{2i} \frac{k\, e^{-ikR}}{(\quad)(\quad)} = -\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{4}$$

$$I_k^{(-)} = I_{k_1}^{(-)} - I_{k_2}^{(-)} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{c}R}$$

$$G^{(-)}(R,\omega) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} = \left[G^{(+)}(R,\omega)\right]^*$$

$$G^{(-)}(R,\tau) = \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega\tau} e^{-i\frac{\omega}{c}R} = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\tau + \frac{R}{c}\right)$$

Em termos das variáveis originais:

$$\boxed{G^{(\pm)}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left[t' - \left(t \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)\right]}$$

As funções de Green acima são chamadas de "Retardada" (+) e "Avançada" (−). Os nomes refletem o fato de que, devido à função delta de Dirac, o efeito produzido em $\vec{x}$ no instante t é devido a uma fonte em $\vec{x}'$ no instante anterior $t' = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$ no caso retardado e no instante posterior: $t' = t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$ no caso avançado. Em ambos os casos, o efeito

se propaga com velocidade finita $\underline{c}$. Temos, portanto, soluções particulares da equação não-homogênea:

$$\psi^{(\pm)}(\bar{x},t) = \int G^{(\pm)}(\vec{x}-\vec{x}';t-t')\, f(\vec{x}',t')\, d^3x'\, dt'$$

Uma solução completa tem em geral uma solução da equação homogênea adicionada. Uma situação física comum corresponde a uma fonte $f(\bar{x}',t')$ localizada no espaço e no tempo, em torno de $t'=0$. Se no passado remoto $t \to -\infty$ existe uma onda $\psi_{in}(\bar{x},t)$ que se propaga no vácuo (solução da homogênea), então:

$$\psi(\bar{x},t) = \psi_{in}(\bar{x},t) + \int G^{(+)}(\bar{x}-\bar{x}';t-t')\, f(\bar{x}',t')\, d^3x'\, dt'$$

O uso de $G^{(+)}$ garante que, quando $t \to -\infty$, o segundo termo é nulo e a solução acima satisfaz a condição de contorno no passado remoto:

$$\psi(\vec{x},t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \psi_{in}(\vec{x},t)$$

Analogamente se:

$$\psi(\vec{x},t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \psi_{out}(\bar{x},t)$$

$$\psi(\bar{x},t) = \psi_{out}(\bar{x},t) + \int G^{(-)}(\bar{x}-\bar{x}';t-t')\, f(\bar{x}',t')\, d^3x'\, dt'$$

que corresponde a condição de contorno no futuro remoto. Essa situação é pouco comum na prática pois é difícil "controlar" a onda no futuro, mas não há nada de errado (não-físico) com ela.

Concentrando no caso mais comum (retardado) a solução particular das equações não-homogêneas para Φ e $\vec{A}$ são:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi^{(+)}(\bar{x},t) &= \int \frac{d^3x'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\bar{x}', t - |\bar{x}-\bar{x}'|/c)}{|\bar{x}-\bar{x}'|} \\ \vec{A}^{(+)}(\bar{x},t) &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} d^3x' \frac{\vec{J}(\bar{x}', t - |\bar{x}-\bar{x}'|/c)}{|\bar{x}-\bar{x}'|} \end{aligned}}$$

onde calculamos a integral temporal.

Leis de conservação

Uma vez que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ adquirem dinâmica própria, independente da matéria que os gera, é essencial verificar as leis de conservação habituais: energia, momento linear e angular.

Teorema de Poynting (Conservação de energia)

O trabalho realizado pelos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sobre a matéria (carregada) por unidade de tempo é obtido através da força de Lorentz:

$$\frac{dW_{CAMPO \to MATÉRIA}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \left[q_i \left(\vec{E}(\vec{x}_i) + \dot{\vec{x}}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right) \right] \cdot \dot{\vec{x}}_i$$

onde a soma é sobre as partículas do sistema.
O campo magnético é sempre normal ao movimento e não realiza trabalho:

$$= \sum_i q_i \, \vec{E} \cdot \vec{v}_i$$

Lembrando que $q\vec{v} \to I d\vec{\ell} \to \vec{J} \, d^3x$, podemos integrar sobre todas as cargas de um volume $\underline{V}$:

$$\frac{dW_{C \to M}}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, d^3x = \frac{dE_{mec}}{dt}$$

Na última equação, identificamos o trabalho dos campos com o aumento da energia mecânica do sistema material no volume $\underline{V}$. Utilizando as equações de Maxwell:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, d^3x = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} \, d^3x - \varepsilon_0 \int_V \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \, d^3x$$

Mas:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \bar{B}\cdot\bar{\nabla}\times\bar{E} - \bar{E}\cdot\bar{\nabla}\times\bar{B} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{B} - \bar{E}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B})$$

$$\Rightarrow \int_V (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot\bar{E}\, d^3x = -\int_V \frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{B}\, d^3x - \int_V \bar{\nabla}\cdot(\bar{E}\times\bar{B})\, d^3x$$

$$= -\int_V \frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{B}\, d^3x - \int_{S(V)} (\bar{E}\times\bar{B})\cdot\hat{n}\, dS$$

$$\Rightarrow \int_V \bar{J}\cdot\bar{E}\, d^3x = -\frac{1}{\mu_0}\int_{S(V)} (\bar{E}\times\bar{B})\cdot\hat{n}\, dS - \int_V \left[\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\right] d^3x$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\int_{S(V)} (\bar{E}\times\bar{B})\cdot\hat{n}\, dS - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] d^3x$$

Definindo $u = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$ e $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}\bar{E}\times\bar{B}$,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\bar{J}\cdot\bar{E}}$$

já que o volume $\underline{V}$ é arbitrário. Essa é uma lei de conservação parecida com a da carga:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

onde, nesse caso, há um termo de fonte ou sorvedouro $-\bar{J}\cdot\bar{E}$. Assim, interpretamos:

$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ = densidade volumétrica de energia nos campos eletromagnéticos

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$ = vetor de Poynting = taxa de vazão de energia por unidade de área por unidade de tempo.

A direção de $\vec{S}$ dá a direção da corrente de energia e o módulo é a energia por unidade de tempo que atravessa uma unidade de área normal a $\vec{S}$, como no caso da corrente $\vec{J}$.

$-\vec{J} \cdot \vec{E}$ = taxa de criação de energia nos campos por unidade de volume = taxa de perda de energia pela matéria por unidade de volume

Compare com:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, d^3x = \frac{d E_{mec}}{dt} = \int_V \frac{\partial u_{mec}}{\partial t} \, d^3x$$

onde u_{mec} é a densidade volumétrica de energia na matéria. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \frac{\partial u_{mec}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial (u + u_{mec})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0}$$

onde $u_T = u + u_{mec}$ é a soma total das densidades de energia eletromagnética e mecânica.

Note que a energia <u>total</u> é conservada.

Conservação de momento linear

A discussão é análoga. A complicação adicional vem do fato de que o momento linear é um vetor. O momento linear transferido à matéria pelos campos é a força de Lorentz:

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = \int_V [\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}]\, d^3x = \int_V \frac{\partial \vec{p}_{mec}}{\partial t}\, d^3x$$

Usando as equações de Maxwell:

$$[\rho \vec{E} + \bar{J} \times \bar{B}] = \varepsilon_0 (\bar{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \times \bar{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \times \bar{B}$$

Mas: $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \times \bar{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{E} \times \bar{B}) - \bar{E} \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{E} \times \bar{B}) + \bar{E} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E})$

$$\Rightarrow \rho \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} = \varepsilon_0 (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) \bar{E} + \frac{1}{\mu_0} (\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) \bar{B} - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \times (\bar{\nabla} \times \bar{B}) - \varepsilon_0 \bar{E} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E})$$

$$- \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\bar{E} \times \bar{B}),$$ onde usamos que $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

Assim:

$$\int_V (\rho \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B})\, d^3x = \int_V \vec{\Pi}\, d^3x - \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})\, d^3x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\vec{P}_{mec} + \vec{P})}{\partial t} - \vec{\Pi} = 0$$ onde

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 \bar{E} (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) + \frac{1}{\mu_0} \bar{B} (\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) - \varepsilon_0 \bar{E} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \times (\bar{\nabla} \times \vec{B})$$

e

$\vec{P} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$ = densidade volumétrica de momento linear

Precisamos mostrar que $\vec{\pi}$ é um divergente. Mas como $\vec{\pi}$ é um vetor, ele tem que ser o divergente de um tensor de segunda ordem:

$$\vec{\pi} \overset{?}{=} \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

Tome a componente x (1) da parte que contém o campo elétrico:

$$\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_1 = E_1\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) - E_2\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)$$

$$+E_3\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial(E_1^2)}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial(E_2^2)}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial(E_3^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(E_1E_2)}{\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial(E_1E_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2) + \frac{\partial(E_1E_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(E_1E_3)}{\partial x_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2+E_2^2+E_3^2)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial(E_1E_\alpha)}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(E^2)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_1E_\alpha - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 1}E^2\right]$$

Analogamente:

$$\pi_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\varepsilon_0 E_\beta E_\alpha - \frac{\varepsilon_0}{2}\delta_{\alpha\beta}E^2 + \frac{1}{\mu_0}B_\beta B_\alpha - \frac{1}{2\mu_0}\delta_{\alpha\beta}B^2\right]$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}T_{\beta\alpha}$$

onde

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = \varepsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0}B_\alpha B_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)}$$

"T

Assim:

$$\frac{\partial(\vec{P}+\vec{P}_{mec})_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

Note que há uma troca de sinal em relação à forma usual da corrente nas leis de conservação. Na forma integral aplicada a um volume $\underline{V}$:

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{P}_{mec})_\alpha}{dt} = \int_{S(V)} \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta \, dS$$

onde aplicamos o teorema de Gauss. $\sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta$ é a taxa de vazão <u>para dentro de V</u> (devido à troca de sinal) da componente $\underline{\alpha}$ do momento linear por unidade de área e por unidade de tempo.

Note a relação entre a corrente de energia $\vec{S}$ e a densidade de momento linear:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \bar{E} \times \bar{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

Isso acontece por que, para fótons, $E = pc$ e a corrente de energia é $E \cdot v = cE$.

Propriedades de transformação de propriedades eletromagnéticas

. Rotações: Rotações do sistema de coordenadas fazem com que as componentes cartesianas se transformem como:

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ ou } x, y, z$$

onde a convenção de soma de Einstein está sendo usada. A matriz $a_{\alpha\beta}$ é ortogonal:

$$a_{\alpha\beta} a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma} \quad \text{ou} \quad A A^T = \mathbb{1}$$

onde a matriz $\underline{\underline{A}}$ tem componentes $a_{\alpha\beta}$. A ortogonalidade de $\underline{\underline{A}}$ garante que o produto

$\sum_\alpha x_\alpha^2$ seja constante sob rotações ou invariante:

$$\sum_\alpha x_\alpha^2 = \sum_\alpha x'^2_\alpha$$

Outras quantidades que se transformam da mesma maneira são chamados vetores; por exemplo, a velocidade $\vec{v}$, o momento linear $\vec{p}$:

$$v'_\alpha = a_{\alpha\beta} v_\beta$$

O produto escalar de 2 vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é invariante:

$$A_\alpha B_\alpha = A'_\alpha B'_\alpha$$, ou seja, é um escalar.

Isso é garantido pela ortogonalidade de $a_{\alpha\beta}$ (prove isso!) Existem também quantidades que tem 2 índices que assumem valores em (1, 2, 3)

$$T_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Se elas se transformam sob rotações como:

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta}$$

são chamadas de <u>tensores de ordem 2</u>. A generalização para tensores de ordem $\underline{n}$ é imediata.

O eletromagnetismo lida com campos, ou seja, com funções das coordenadas $\vec{x}$ e do tempo t. Portanto, sob rotações, seus argumentos x, y, z ou x_1, x_2, x_3 se transformam em x'_1, x'_2, x'_3. Assim, se

$$\phi'(\vec{x}') = \phi(\vec{x})$$

a quantidade $\phi(\vec{x})$ é um invariante sob rotações ou um escalar. Já os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são vetores:

$$E'_\alpha(\vec{x}') = a_{\alpha\beta} E_\beta(\vec{x})$$

$$B'_\alpha(\vec{x}') = a_{\alpha\beta} B_\beta(\vec{x}) \quad (*) \text{ (ver adiante)}$$

Analogamente, $\vec{A}$, $\vec{J}$, $\vec{P}$, $\vec{D}$, etc. são todos vetores. Vale lembrar, que o operador $\vec{\nabla}$ também se transforma como um vetor sob rotações. Assim, se $\phi(\vec{x})$ é um escalar:

$$\nabla'_\alpha \phi(\vec{x}') = a_{\alpha\beta} \nabla_\beta \phi(\vec{x})$$

ou seja, $\vec{\nabla}\phi$ é um vetor. Analogamente: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ é um escalar sob rotações.

O chamado produto vetorial tem propriedades especiais. Se:

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C} \quad \text{então}$$

$$A_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ é o tensor anti-simétrico. Segue que:

$$A'_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu} B_\mu C_\nu$$

$$= \epsilon^{\rho\beta\gamma} \delta_{\rho\alpha} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu} B_\mu C_\nu$$

$$= \epsilon^{\rho\beta\gamma} \overbrace{a_{\alpha\sigma} a_{\rho\sigma}} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu} B_\mu C_\nu$$

$$= a_{\alpha\sigma} \epsilon^{\rho\beta\gamma} a_{\rho\sigma} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu} B_\mu C_\nu$$

É fácil mostrar que:

$$\epsilon^{\rho\beta\gamma} a_{\rho 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} = \det(a)$$

e que

$$\epsilon^{\rho\beta\gamma} a_{\rho\sigma} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu} = \epsilon^{\sigma\mu\nu} \det(a)$$

Assim:

$$A'_\alpha = a_{\alpha\sigma} \det(a) \underbrace{\epsilon^{\sigma\mu\nu} B_\mu C_\nu}_{A_\sigma}$$

$$\Rightarrow \boxed{A'_\alpha = \det(a)\, a_{\alpha\sigma} A_\sigma}$$

que é "quase" a lei de transformação do vetor

Mas o det(a) pode ser achado a menos de um sinal. Com efeito,

$$a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \Rightarrow a^T = a^{-1}$$

Mas: $\det(a^T) = \det(a)$ e $\det(a^{-1}) = \dfrac{1}{\det(a)}$

$$\Rightarrow [\det(a)]^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(a) = \pm 1}$$

Transformações com $\det(a) = +1$ são chamadas de rotações próprias, enquanto que se $\det(a) = -1$ temos uma rotação imprópria. Uma rotação própria pode ser obtida através de uma sequiência de rotações infinitesimais. Rotações impróprias correspondem a uma rotação própria seguida de uma inversão:

$$\text{Inversão: } x_i' = -x_i \Rightarrow a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusão: $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ se transforma como um vetor sob rotações próprias, mas sob rotações impróprias ganha um sinal adicional.

<u>Inversões</u>: Como sob inversões $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ as coordenadas se transformam como:

$$x_i' = -x_i$$

vetores se transformam de maneira semelhante:

$$V_i' = -V_i$$

Devido ao fato de que muitas quantidades são definidas através do produto vetorial, classificamos:

<u>Vetores polares</u>: Trocam de sinal sob inversões

$$V_i' = -V_i$$

<u>Vetores axiais</u>: <u>Não</u> trocam de sinal sob inversões

$$A_i' = A_i$$

Assim, se $\vec{B}$ e $\vec{C}$ são vetores polares, então $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ é um vetor axial. Vetores axiais também são chamados de pseudovetores.
Analogamente:

<u>Escalares</u>: $\phi \rightarrow \phi' = \phi$ sob inversão

<u>Pseudo-escalar</u>: $x \rightarrow x' = -x$ sob inversão

Tensor de ordem <u>N</u>: ganha $(-1)^N$ sob inversão
Pseudotensor de ordem <u>N</u>: ganha $(-1)^{N+1}$ sob inversão

Por exemplo, um campo vetorial é tal que $\vec{A}(-\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{x})$
Já um campo pseudovetorial $\vec{A}(-\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x})$

<u>Reversão temporal</u>: Se ao fazermos $t \to -t$, uma quantidade física <u>não</u> troca de sinal dizemos que ela é <u>par</u> sob reversão temporal. Do contrário, se ela ganha um sinal de (-1) ela é dita <u>ímpar</u>. É claro que a posição de uma partícula é <u>par</u> e sua velocidade é <u>ímpar</u> sob reversão temporal.

Classificação das quantidades eletromagnéticas

As leis do Eletromagnetismo retém a sua forma sob rotações, inversões e reversão temporal. Portanto, as quantidades envolvidas tem propriedades bem definidas quanto a essas transformações

A carga é um escalar e é natural assumir que ela é par sob inversão e reversão temporal. O mesmo se aplica a ρ.

O campo elétrico é a força elétrica dividida pela carga. Portanto é um vetor polar, par sob reversão temporal. Isso também é consistente com a lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

já que $\vec{\nabla}$ é um vetor polar (por quê?), par sob reversão temporal. Da lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

é claro que $\vec{B}$ é um vetor axial, ímpar sob reversão temporal.

Analogamente, $\vec{J}$ é um vetor polar ($\rho\vec{v}$) ímpar sob reversão temporal (por causa de $\vec{v}$). Da lei de Ampère-Maxwell, podemos deduzir também as propriedades de $\vec{J}$:

$$\mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Note que, como $\vec{\nabla}$ é um vetor polar e $\vec{B}$ um vetor axial, segue que $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ é um vetor polar.

Finalmente, as propriedades de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também podem ser deduzidas da forma invariante da lei de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

<u>Exercício</u>: Mostre que, retendo apenas derivadas espaciais e temporais primeiras e termos lineares nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, as parcelas nas quatro equações de Maxwell são únicas se impusermos que elas são invariantes na forma sob rotações, inversão e reversão temporal.

Monopólos magnéticos

Embora monopólos magnéticos nunca tenham sido observados na natureza, considerações teóricas nos levam a estudar as conseqüências de sua incorporação ao eletromagnetismo.

A inclusão de uma densidade volumétrica de carga magnética ρ_m e sua correspondente densidade volumétrica de corrente magnética $\bar{J}_m$ é simples:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0 \longrightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{B}=\rho_m$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \longrightarrow \bar{\nabla}\times\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}-\bar{J}_m$$

O sinal negativo de $\bar{J}_m$ é necessário para assegurar a conservação de carga magnética:

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{E})=0=-\frac{\partial(\bar{\nabla}\cdot\bar{B})}{\partial t}-\bar{\nabla}\cdot\bar{J}_m$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{J}_m+\frac{\partial\rho_m}{\partial t}=0$$

onde usamos a lei de Gauss magnética $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=\rho_m$. Note também que as unidades estão corretas.

$$[\bar{J}_m]=\frac{[\bar{B}]}{T} \qquad [\rho_m]=\frac{[\bar{B}]}{L}$$

$$[\bar{J}_m]=[\rho_m]\frac{L}{T} \quad \text{pois} \quad \bar{J}_m=\rho_m\vec{v}.$$

As novas quantidades são tais que ρ_m é um pseudo-escalar, ímpar sob reversão temporal e $\bar{J}_m$ é um pseudo-vetor, par sob reversão temporal

É interessante notar que as equações de Maxwell na forma acima são invariantes sob as chamadas transformações de dualidade:

$$\begin{pmatrix} \bar{E} \\ c\bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}' \\ c\bar{B}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rho/\sqrt{\varepsilon_0} \\ \rho_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'/\sqrt{\varepsilon_0} \\ \rho'_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{J}/\sqrt{\varepsilon_0} \\ \bar{J}_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{J}/\sqrt{\varepsilon_0} \\ \bar{J}_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix}$$

que são como "rotações" que misturam o "eixo" elétrico com o "eixo" magnético. A invariância das eqs. de Maxwell sob as transformações acima é deixada como exercício.

A invariância sob dualidade permite mostrar que se todas as partículas têm a mesma razão carga elétrica sobre carga magnética, então a carga magnética não é observável. Com efeito, nesse caso, podemos escolher ξ de forma a fazer $\rho'_m = \bar{J}'_m = 0$ e tudo se passa como se a carga magnética não existisse.

Condição de quantização de Dirac

A discussão de aspectos quânticos no contexto do eletromagnetismo é feita com o uso dos potenciais Φ e $\vec{A}$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}) \longrightarrow H = \frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{2m} + V(\bar{x}) + e\Phi(\bar{x})$$

Por isso é desejável continuar trabalhando com os potenciais. Isso pode parecer impossível já que

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = \rho_m \Rightarrow \bar{B} \neq \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Entretanto, há uma saída. Considere um monopólo magnético de carga magnética g na origem:

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r}$$

O potencial $\vec{A}(\bar{x})$:

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\phi}$$

tem a propriedade de que:

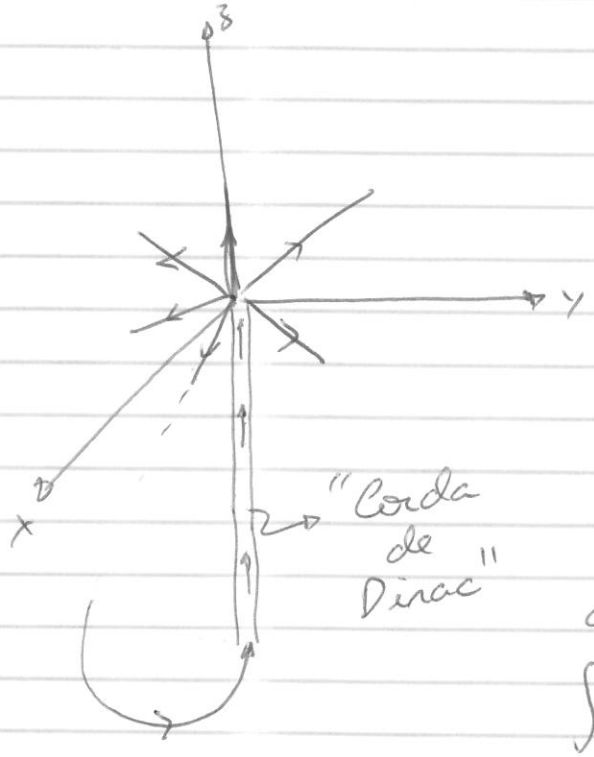
$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} = \frac{g}{4\pi r^2}\hat{r} = \bar{B}\ !$$

Entretanto $\bar{A}(\bar{x})$ é singular para $\theta \to \pi$, ou seja no semi-eixo z negativo, que reflete a im-

Fisicamente, pode-se compreender isso da seguinte forma:

$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{B}$ forma linhas de campo que se fecham em si mesmas e não podem "nascer" ou "morrer" em um ponto.

O melhor que se pode fazer nesse caso, para "simular" um campo $\bar{B}$ que "nasce" de um ponto (monopólo magnético) é fazer com que as linhas de $\bar{B}$ venham do infinito confinadas a um tubo de seção reta pequena até a origem, saiam do tubo em $\bar{x} = \bar{0}$ como se "nascessem" lá e divirjam radialmente a partir de $\bar{x} = \bar{0}$ até o infinito, onde elas vão encontrar a "outra saída" do tubo e fechar-se em si mesmas.



A descrição do campo $\bar{B}$ do monopólo através de $\vec{A}$ só é boa fora do tubo. Dentro dele há um campo intenso de direção contrária ao campo do monopólo, que garante que a integral de superfície de $\vec{B}$

$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$ em uma

superfície que contém a origem é zero, como demanda a lei de Gauss para $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$. O tubo no

Se o tubo estiver na direção do semi-eixo de z positivo, temos:

$$\bar{A}'(\bar{x}) = -\frac{g}{4\pi r}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\phi}$$

que é singular para $\theta \to 0$. Na região

$$\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$$

podemos usar qualquer um dos potenciais $\vec{A}$ ou $\vec{A}'$. Na verdade:

$$\vec{A}'(\bar{x}) = \bar{A}(\bar{x}) - \frac{2g}{4\pi r \sin\theta}\hat{\phi}$$

$$= \bar{A}(\bar{x}) + \bar{\nabla}\Lambda$$

onde:

$$\Lambda(\bar{x}) = -\frac{g\phi}{2\pi}$$

Ou seja, $\bar{A}(\bar{x})$ e $\bar{A}'(\bar{x})$ estão relacionados por uma transformação de gauge.

Na Mecânica Quântica, uma transformação de gauge:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

deve ser acompanhada de uma transformação

$$\Psi'(\bar{x},t) = \Psi(\bar{x},t)\, e^{+i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\bar{x},t)}$$

para que a equação de Schrödinger mantenha sua forma:

$$\frac{1}{2m}\left[\hbar\frac{\bar{\nabla}}{i} - e\bar{A}\right]^2\Psi + V(\bar{x})\Psi + e\Phi\Psi = \hbar i\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

como pode ser verificado se usarmos:

$$\hbar\frac{\bar{\nabla}}{i}\Psi'(\bar{x},t) = e^{+i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\left[\hbar\frac{\bar{\nabla}}{i} + e\bar{\nabla}\Lambda\right]\Psi(\bar{x},t) \quad e$$

$$\hbar i\frac{\partial\Psi'(\bar{x},t)}{\partial t} = e^{+i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\left[\hbar i\frac{\partial}{\partial t} - e\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right]\Psi(\bar{x},t)$$

Assim, no caso do monopólo magnético:

$$\Psi'(\bar{x},t) = e^{-i\frac{eg}{\hbar}\phi}\Psi(\bar{x},t)$$

para $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$. Para que a função de onda seja contínua independente do gauge:

$$\Psi'(r,\theta=\tfrac{\pi}{2},\phi,t) = \Psi'(r,\theta=\tfrac{\pi}{2},\phi+2\pi,t).$$

Se $\Psi(\bar{x},t)$ é contínua $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{eg}{\hbar} = m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$

que é a condição de quantização de Dirac.
A existência de um único monopólo na Natureza explicaria, através da condição acima, a quantização da carga elétrica.