



## GUIAS DE ONDA E CAVIDADES RESSONANTES

A propagação de ondas eletromagnéticas em regiões confinadas tem natureza diferente da propagação no espaço livre. De fato, apesar de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazerm a mesma equação de onda, a presença de superfícies confinantes impõe condições de contorno sobre os campos, modificando significativamente seu comportamento.

Essas considerações têm grande importância tecnológica, pois tubos metálicos (guias de onda) constituem a maneira mais prática de transmitir energia eletromagnética na região de micro-ondas e calos dieletricos (fibras ópticas) na região do infravermelho e do visível. Finalmente, cavidades ("caixas") metálicas (cavidades ressonantes) são úteis para o confinamento (para utilização ou na interação com a matéria) de ondas eletromagnéticas de frequência bem definida.

Vamos estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em tubos condutores primários. Por simplicidade, e com boa aproximação, vamos supor condutores perfeitos nas paredes do tubo. Os efeitos da condutividade finita podem ser tratados posteriormente como pequenas perturbações da situação ideal e locam a perdas dissipativas.

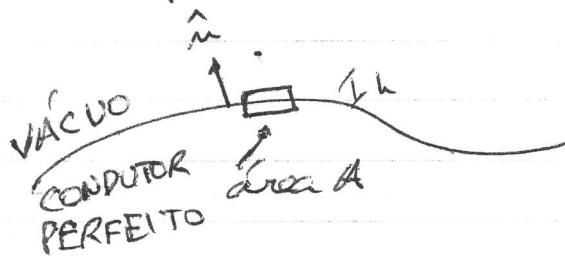
## Condições de contorno (ver Seção I.5 de Jackson)

Vamos primeiramente considerar quais são as condições de contorno que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem na interface entre o vácuo e um condutor perfeito.

Considere primeiramente a equação:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Se aplicarmos a sua forma integral a uma superfície fechada na interface de maior com forma de um cilindro reto de altura  $h$  e área da base  $A$  tal que cada base está em um meio e é paralela à interface:



teremos:

$$-\int_{S_a} \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_b} \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_{lateral}} \vec{B} \cdot \hat{n}_{lateral} dS = 0$$

onde tomamos  $\hat{n}$  apontando do condutor para o vácuo (dai o sinal negativo do primeiro termo) e  $\hat{n}_{lateral}$  é normal à parede lateral

(11)

e  $S_c = \text{superfície da base no condutor}$

$S_v = " " " " " \text{ vácuo}$

$S_{\text{lateral}} = " " \text{ lateral}$

Vamos tomar o limite em que o cilindro é muito maior que as variações típicas de  $B$  nos meios. Assim:

$$\int_{S_c} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \approx \vec{B}_c \cdot \hat{n} A$$

$$\int_{S_v} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \approx \vec{B}_v \cdot \hat{n} A$$

$$\text{e } \int_{S_{\text{lateral}}} \vec{B} \cdot \hat{n}_{\text{lateral}} dS \approx \vec{B}_{\text{lat}} \cdot \hat{n} h P$$

onde  $\vec{B}_c$ ,  $\vec{B}_v$  e  $\vec{B}_{\text{lat}}$  são os campos no condutor, vácuo e lateral na região do cilindro e  $P$  é o perímetro da base. Como

$$P \approx \sqrt{A},$$

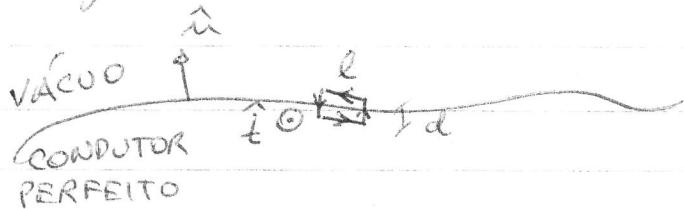
se tomarmos o limite em que  $h \ll \sqrt{A}$ , a contribuição da superfície lateral pode ser desprezada em relação às contribuições das bases  $\Rightarrow \boxed{\vec{B}_c \cdot \hat{n} = \vec{B}_v \cdot \hat{n}}$ .

(11)

Considerando agora a lei de indução de Faraday em sua forma integral:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \left[ \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \right]$$

podemos aplicá-la a um circuito como na figura



de lados paralelos à interface (de comprimento  $d$ ) e perpendulares a ela (de comprimento  $l$ ). Tomando  $l$  e  $d$  como muito menores do que distância típica de  $E$  e  $B$  e  $d \ll l$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx E_v \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) l - E_c \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) l$$

onde desprezamos as contribuições dos lados de comprimento  $d$  em relação aos lados de comprimento  $l$  e usamos  $\hat{t}$  = unitário normal à superfície plana do circuito (e paralelo à interface, portanto).

Além disso

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \approx B \cdot \hat{t} (l d)$$

que também pode ser desprezado no limite  $d \rightarrow 0$  com  $l$  mantido constante.

(11)

Assim, o lado direito se anula e:

$$\vec{E}_v \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) = \vec{E}_c \cdot (\hat{t} \times \hat{n})$$

$$\Rightarrow \hat{t} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_v) = \hat{t} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_c)$$

Como circuito pode ser orientado de tal forma que  $\hat{t}$  aponte em qualquer direção paralela à interface, segue que:

$$\hat{n} \times \vec{E}_v = \hat{n} \times \vec{E}_c$$

Concluímos que a componente normal de  $\vec{B}$  e a componente tangencial de  $\vec{E}$  são contínuas na interface.

O estudo de campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em condutores perfeitos mostra que dentro deles:

$$\vec{E}_c = 0 \text{ e } \vec{B}_c = 0$$

Fisicamente, as cargas e os correntes se ajustam com velocidade infinita de forma a garantir que  $\vec{E}_c = 0$  (conforme caso estático) e  $\vec{B}_c = 0$ . Portanto, segue que

$\hat{n} \times \vec{E}_v = 0$  e  $\hat{n} \cdot \vec{B}_v = 0$  na interface, ou seja, os campos são tais que  $\vec{E}$  só tem componente normal e  $\vec{B}$  só tem componente tangencial na interface condutor perfeito.

Finalmente, para completeza, devemos considerar as equações com fontes. Da Lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$$

Onde  $Q(V)$  é a carga total no volume  $V$ , cuja superfície é  $S$ . Se aplicarmos a Lei de Gauss ao cilindro na interface entre os meios utilizados antes teremos:

$$(\vec{E}_V \cdot \hat{n} - \vec{E}_c \cdot \hat{n}) A = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$$

Uma característica dos condutores, já vista no caso eletrostático, é a presença possível de uma densidade de carga superficial na sua superfície. Se a espessura dessa camada de carga for menor que a altura do cilindro  $h$ , ela pode ser considerada como tendo espessura zero e teremos:

$$(\vec{E}_V \cdot \hat{n} - \vec{E}_c \cdot \hat{n}) = \frac{\Sigma}{\epsilon_0}$$

Onde chamamos de  $\Sigma$  a densidade superficial de carga. Como  $\vec{E}_c = 0$ :

$$\vec{E}_V \cdot \hat{n} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0}$$

Na verdade, não se sabe exatamente o valor de  $\Sigma$  e a expressão acima deve ser vista da seguinte forma:  $\Sigma$  é tal que o campo elétrico no condutor é nulo, ou seja, as cargas se rearranjam rapidamente (velocidade infinita num condutor perfeito) de forma a que  $\Sigma$  tal que  $E_c = 0$ . Esse valor de  $\Sigma$ , por sua vez, determina o campo elétrico normal imediatamente fora do condutor.

Analogamente, aplicando a Lei de Ampère-Maxwell ao circuito retangular usado antes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(s) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

onde  $I(s)$  é a corrente que atravessa a superfície  $S$ , cujo contorno orientado é  $C$  e  $\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds$

é o fluxo do campo elétrico através de  $S$ .

No limite descrito antes em que o circuito se torna muito pequeno:

$$(\vec{B}_v - \vec{B}_c) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) l = \mu_0 I(s)$$

Em condutores perfeitos, haverá também em geral uma densidade superficial de corrente  $\vec{K}$  na superfície. Se a espessura dessa corrente for muito menor que  $l$ , ela pode ser considerada

como tendo espessura nula e :

$$(\vec{B}_v - \vec{B}_c) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) = \mu_0 K \cdot \hat{t}$$

ou

$$\hat{n} \times (\vec{B}_v - \vec{B}_c) = \mu_0 K$$

Como  $\vec{B}_c = 0$ , segue que

$$\hat{n} \times \vec{B}_v = \mu_0 K$$

que deve ser interpretada de maneira semelhante ao caso do campo elétrico: as correntes superficiais se ajustarão com velocidade infinita num condutor perfeito de forma a garantir que  $\vec{B}_c = 0$ . A corrente  $K$ , por sua vez, determina a componente tangencial de  $\vec{B}$  na região imediatamente fora do condutor.

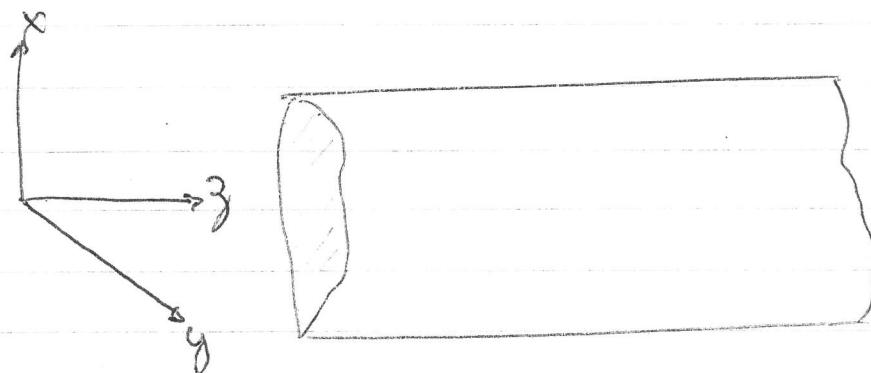
Resumindo, para condutores perfeitos:

$$\vec{B}_v \cdot \hat{n} = 0 \quad \hat{n} \times \vec{E}_v = 0$$

$$\vec{E}_v \cdot \hat{n} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0} \quad \hat{n} \times \vec{B}_v = \mu_0 K$$

## Guia de ondas cônico

Vamos considerar tubos feitos de condutores perfeitos, de seção reta qualquer e constante ao longo do tubo, com eixo na direção  $z$ :



Dentro do cilindro, como vimos para ondas harmônicas (estação complexa usual)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

As equações de Maxwell no interior do cilindro (número escuroado) serão:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

onde, como de hábito:  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

Guias de ondas infinitas suportam ondas caminhantes ~~paralelas~~ nos sentidos de  $z$  positivo e negativo e:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(x, y) e^{\pm ikz}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(x, y) e^{\pm ikz}$$

onde o sinal superior (inferior) se refere à propagação no sentido de  $z$  positivo (negativo).

Tomando  $(\vec{\nabla} \times)$  das relações de  $\vec{E} \times \vec{B}$  e usando as equações das direcionais, obtemos a equação de onda para  $\vec{E} \times \vec{B}$ :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}_t^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{E}(x, y) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}_t^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{B}(x, y) = 0$$

onde usamos:

$$\vec{\nabla}_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z$$

$$\vec{\nabla}_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}_t^2 + \vec{\nabla}_z^2$$

Vamos agora separar as componentes longitudinais e transversais das equações de Maxwell. Para isso escrevemos:

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_z$$

onde  $\vec{E}_t = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$  e  $\vec{E}_z = E_z \hat{z}$  e analogamente para  $\vec{B}$ . Usando que, para um campo vetorial genérico  $\vec{V}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = (\vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z) \times (\vec{V}_t + \vec{V}_z)$$

$$= \vec{\nabla}_t \times \vec{V}_t + \vec{\nabla}_t \times \vec{V}_z + \vec{\nabla}_z \times \vec{V}_t$$

já que  $\vec{\nabla}_z \times \vec{V}_z = \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \times V_z \hat{z} = 0$  e lembrando que

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{V}_t \times \hat{z} \text{ (longitudinal)}$$

e

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{V}_z + \vec{\nabla}_z \times \vec{V}_t \perp \hat{z} \text{ (transversal)}$$

temos:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = i\omega \vec{B}_3 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_3 + \vec{\nabla}_3 \times \vec{E}_t = i\omega \vec{B}_t \quad (2)$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_3 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_3 + \vec{\nabla}_3 \times \vec{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_t \quad (4)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\nabla_3 E_3 \quad (5)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -\nabla_3 B_3 \quad (6)$$

Vamos mostrar agora que os componentes transversais de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser obtidos das componentes longitudinais. De (2) e (4)

$$i\omega \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_3 + \vec{\nabla}_3 \times \left[ \frac{\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_3 + \vec{\nabla}_3 \times \vec{B}_t}{-i\omega/c^2} \right]$$

Mas:

$$\vec{\nabla}_3 \times (\vec{\nabla}_3 \times \vec{B}_t) = \vec{\nabla}_3 \underbrace{(\vec{\nabla}_3 \cdot \vec{B}_t)}_{=0} - \vec{\nabla}_3^2 \vec{B}_t = - \frac{\partial^2 \vec{B}_t}{\partial z^2}$$

e

$$\vec{\nabla}_3 \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_3) = \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) - \underbrace{\vec{\nabla}_3 \cdot \vec{\nabla}_t}_{=0} \vec{B}_3 = \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial B_3}{\partial z} \right)$$

Mas:  $\frac{\partial}{\partial z} \neq i k \ L \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -k^2$

$$\vec{\nabla}_3 \times (\vec{\nabla}_3 \times \vec{B}_t) = k^2 \vec{B}_t$$

$$\vec{\nabla}_3 \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_3) = \pm i k \vec{\nabla}_t \vec{B}_3$$

Assim:

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B}_t = i \left[ \pm k \vec{\nabla}_t \vec{B}_3 - \frac{\omega}{c^2} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_3 \right]$$

Definindo  $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$  e como  $\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_3 = - \vec{z} \times \vec{\nabla}_t \vec{E}_3$

$$\gamma^2 \vec{B}_t = i \left[ \pm k \vec{\nabla}_t \vec{B}_3 + \frac{\omega}{c^2} \vec{z} \times \vec{\nabla}_t \vec{E}_3 \right] \quad (7)$$

Equivalentemente, de (2) e (4):

$$-i\frac{\omega}{c}\vec{E}_t = \vec{V}_t \times \vec{B}_3 + \vec{V}_3 \times \left[ \frac{\vec{V}_t \times \vec{E}_3 + \vec{V}_3 \times \vec{E}_t}{i\omega} \right]$$

Descompondo:

$$\vec{V}_3 \times (\vec{V}_t \times \vec{E}_3) = \pm ik \vec{V}_t \vec{E}_3 \text{ e}$$

$$\vec{V}_3 \times (\vec{V}_3 \times \vec{E}_t) = k^2 \vec{E}_t$$

e:

$$\gamma^2 \vec{E}_t = i \left[ \pm k \vec{V}_t \vec{E}_3 - \omega \hat{z} \times \vec{V}_t \vec{B}_3 \right] \quad (8)$$

$\vec{E}_t$  e  $\vec{B}_t$  podem ser deduzidos de  $E_3$  e  $B_3$  a partir de (7) e (8) desde que  $\gamma \neq 0$ .

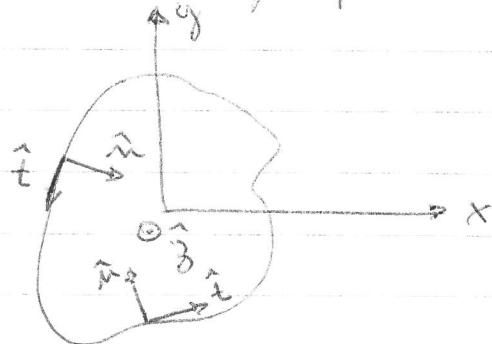
$E_3$  e  $B_3$  por sua vez podem ser calculados da equação de onda.

$$(\vec{V}_t^2 + \gamma^2) E_3 = 0$$

$$(\vec{V}_t^2 + \gamma^2) B_3 = 0$$

sujeita às condições de contorno apropriadas. Vamos analisar quais são essas condições de contorno. Seja  $\hat{n}$  a normal ao condutor (voltada para dentro do guia de ondas).

É claro que  $\hat{n} \perp \hat{z}$  e  $\hat{t} = \hat{n} \times \hat{z}$  é  
paralelo à superfície do condutor e  $\perp \hat{z}$ :



As condições de contorno são:

$$E_{\parallel}|_s = 0 \Rightarrow E_z|_s = 0 \quad \text{e} \quad \hat{t} \cdot \vec{E}|_s = 0 \\ \text{ou} (\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{E}|_s = 0$$

$$B_{\perp}|_s = 0 \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{B}|_s = 0$$

onde  $|_s$  significa que a quantidade é calculada na parede do condutor. A condição sobre  $E_z$  é clara:

$$\boxed{E_z|_s = 0}$$

Vamos agora determinar a condição de contorno sobre  $B_z$ . Tomando o produto vetorial de  $\hat{z}$  com a equação (4):

$$i \frac{\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{E}_t = \hat{z} \times (\vec{V}_t \times \vec{B}_z) + \hat{z} \times (\vec{V}_z \times \vec{B}_t)$$

$$i \frac{\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{E}_t = \vec{V}_t B_z - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z} = \vec{V}_t B_z + i k \vec{B}_t \quad (9)$$

Tomando o produto escalar de  $\hat{n}$  com (9):

$$-\frac{i\omega}{c^2} \hat{n} \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t) = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_3 + ik \hat{n} \cdot \vec{B}_t$$

Mas:

$$\hat{n} \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t) = (\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{E}_t \text{ que é nulo em } S.$$

e

$\hat{n} \cdot \vec{B}_t$  também é nulo em  $S$ . Portanto,

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_3 \Big|_S = \frac{\partial B_3}{\partial n} \Big|_S = 0$$

que é a condição de contorno procurada.

Resumindo, basta resolver a equação bi-dimensional:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_3 = 0 \text{ e } E_3 \Big|_S = 0$$

ou

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_3 = 0 \text{ e } \frac{\partial B_3}{\partial n} \Big|_S = 0$$

Posteriormente, podemos calcular  $\vec{B}_t$  e  $\vec{E}_t$  através de (7') e (8). Essas são equações de auto-valores. Os auto-valores  $\gamma_k$  e os auto-vetores  $B_{k3}$  ou  $E_{k3}$  formam um conjunto completo de soluções para os campos.

Como as condições de contorno são diferentes, os auto-valores serão diferentes e os casos de  $E_z$  e  $B_z$  não tratados separadamente (não modos diferentes). Antes de considerá-los devemos analisar um caso especial importante, que é aquele correspondente a  $E_z = 0$  e  $B_z = 0$  simultaneamente, chamado de modo TEM ("Transverse electric and magnetic")

Modo TEM:  $E_z = 0, B_z = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De (1): } \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = 0 \\ \text{De (5): } \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Isto define um} \\ \text{problema eletrostático} \\ \text{em 2 dimensões} \end{array}$$

Como a superfície do cilindro é uma equipotencial, o potencial é constante dentro do cilindro e  $E_t = 0$ . De (2),  $B_t = 0$  e não há modo TEM possível em um cilindro só. Entretanto, se houver 2 ou mais superfícies cilíndricas (como num cabo coaxial, que tem 2 cilindros concéntricos ou numa linha de transmissão de cabos paralelos, que tem 2 cilindros paralelos), o modo TEM passa a ser possível. Nesse caso:

$$\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t \Phi_t \Rightarrow \vec{\nabla}_t^2 \Phi_t = 0$$

Tomando  $-\vec{V}t$  da equação de Laplace:

$$\vec{V}^2 \vec{E}_t = 0$$

Segue da equação de onda que:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = ck} \quad (\text{modo TEM})$$

O modo TEM propaga-se como velocidade de ondas não confinadas.

Além disso, de (4):

$$-i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_t = \vec{\nabla}_{\vec{z}} \times \vec{B}_t = \pm ik \hat{z} \times \vec{B}_t = \pm i\omega \frac{\hat{z}}{c} \times \vec{B}_t$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t = \mp c \hat{z} \times \vec{B}_t$$

Tomando  $\hat{z} \times$  dos 2 lados da equação:

$$\hat{z} \times \vec{E}_t = \mp c (-\vec{B}_t) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_t = \pm \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}_t}$$

(modo TEM)

Modo TM:  $B_3 = 0$  ("Transverse magnetic")

$$\boxed{(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_3 = 0 \text{ sob } E_3|_s = 0}$$

De (8):

$$\boxed{\gamma^2 \vec{E}_t = \pm ik \vec{\nabla}_t E_3}$$

De (9):

$$-i\frac{\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{E}_t = \mp ik \vec{B}_t \Rightarrow \boxed{\vec{B}_t = \pm \frac{\omega}{c^2 k} \hat{z} \times \vec{E}_t}$$

Modo TE:  $E_3 = 0$  ("Transverse electric")

$$\boxed{(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_3 = 0 \text{ sob } \frac{\partial B_3}{\partial n}|_s = 0}$$

De (7)

$$\boxed{\gamma^2 \vec{B}_t = \pm ik \vec{\nabla}_t B_3}$$

$$\text{De (2): } i\omega \vec{B}_t = \vec{\nabla}_3 \times \vec{E}_t = \pm ik \hat{z} \times \vec{E}_t$$

Tomando  $\hat{z} \times$  dos 2 lados:

$$\hat{z} \times \vec{B}_t = \pm \frac{k}{\omega} (-\vec{E}_t) \Rightarrow \boxed{\vec{E}_t = \mp \frac{\omega}{k} \hat{z} \times \vec{B}_t}$$

Os vários auto-valores  $\gamma_\lambda$  são reais.  
Segue que:

$$k_\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_\lambda^2 \Rightarrow k_\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2 - c^2 \gamma_\lambda^2}{c^2}}$$

$$k_\lambda = \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}$$

onde definimos

$$\omega_\lambda = c \gamma_\lambda \quad (\text{Frequência de corte})$$

Se  $\omega > \omega_\lambda \Rightarrow k_\lambda \in \mathbb{R}$  e o modo é propagante. Se  $\omega < \omega_\lambda \Rightarrow k_\lambda \in \mathbb{C}$  e o modo é decaente. Cada  $\gamma_\lambda$  define um ramo de modos propagantes (ver figura 8.4).  
Em uma dada frequência de trabalho há um número finito de modos propagantes. É conveniente dimensionar o guia de ondas de tal forma que só haja um modo propagante. Se  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  é

o número de onda no espaço livre:  $k_\lambda < k_0 \Rightarrow \lambda_\lambda > \lambda_0$ . A velocidade de fase da onda é

$$v_p = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{c \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} > c \quad \text{e} \quad v_p \rightarrow \infty \text{ se } \omega \rightarrow \omega_\lambda$$

Já a velocidade de grupo que é a velocidade com que sinais transmitem informação é:

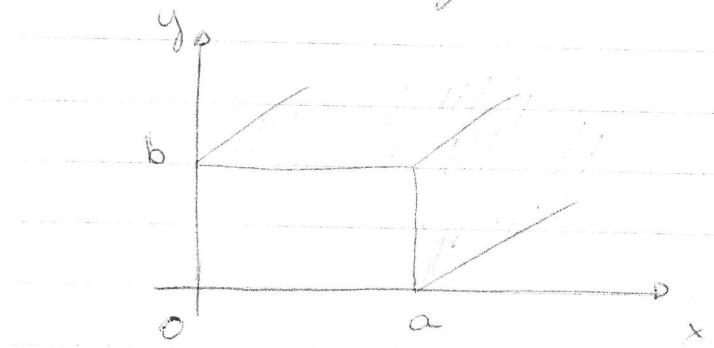
$$\nu_g = \frac{dw}{dk_x} = \frac{d}{dk_x} [c \sqrt{k_x^2 + \gamma_x^2}] = \frac{ck_x}{\sqrt{k_x^2 + \gamma_x^2}}$$

$$\Rightarrow \nu_g = \frac{c^2}{\omega} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_x^2}}{c} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_x^2}}{\omega} c < c$$

$\nu_g \rightarrow 0$  as  $\omega \rightarrow \omega_x$

Note que  $c = \sqrt{\nu_p \nu_p}$ .

## Modos de uma guia de onda retangular



### Modos TM

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_3 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) E_3 = 0$$

$$E_3 \Big|_{\begin{array}{l} x=0, a \\ y=0, b \end{array}} = 0$$

Usando o método de separação de variáveis

$$E_3 = X(x) Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \gamma^2 = 0$$

$$X'' = -\alpha^2 X \Rightarrow X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

$$Y'' = -(\beta^2 + \gamma^2) Y \Rightarrow Y(y) = C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)$$

$$E_3 \Big|_{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}} = 0 \Rightarrow \cancel{E_3(x,y)} = E_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$E_3 \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0 \Rightarrow \alpha a = m\pi \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

$$\beta b = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Então:  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \pi}$$

~~Obs:~~  $\omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$  Frequência de corte TM

$$(m, n) = 1, 2, 3, 4, \dots$$

O corte mais baixo ocorre para  $m = 1, n = 1$ :

$$\omega_{1,1} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

$$E_3 = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

$$E_x = \pm i \frac{k_{m,n}}{\gamma_{m,n}} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

$$E_y = \pm i \frac{k_{m,n}}{\gamma_{m,n}} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

$$\vec{B}_t = \pm \frac{\omega}{c k_{m,n}} \hat{z} \times \vec{E}_t$$

## Modos TE:

$$(\nabla^2 + \gamma^2) B_3 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) B_3 = 0$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_3}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0$$

Procedendo de maneira análoga:

$$B_3 = B_0 \cos(\alpha x) \cos(\beta y)$$

$$B_3 = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, 3, \dots \} \text{ mas } (m+n) > 0, \text{ do} \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \} \text{ contrário, } m=0=n \text{ nos} \\ &\quad \text{dá uma solução trivial} \end{aligned}$$

$$\text{Assim como antes: } \omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Agora, a menor frequência de corte (para  $a > b$ )

$$\omega_{1,0} = \frac{\pi c}{a}$$

Note que este é o modo com menor frequência de corte entre todos os modos. Os campos desse modo são: ( $\delta_{1,0} = \pi/a$ )

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{ik}{\gamma^2} \left(-\frac{\pi}{a}\right) B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ &= -i\left(\frac{ka}{\pi}\right) B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

$$E_y = -\frac{\omega_{1,0}}{k} B_x = -\frac{\pi c}{ka} B_x$$

$$= ic B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

## Análise de potência em guias de onda

A corrente de energia é dada pelo vetor de Poynting que, em notação complexa, é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^*$$

com a hipótese de que sua parte real é que deve ser tomada como medida da média temporal da corrente de energia. Separando os componentes:

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \times (\vec{B}_t^* + \vec{B}_z^*)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t \times \vec{B}_t^* + \vec{E}_t \times \vec{B}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{B}_t^*)$$

já que  $\vec{E}_z \times \vec{B}_z^* = 0$ . Podemos escrever:

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_t \times \vec{B}_t^*$$

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t \times \vec{B}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{B}_t^*)$$

Fisicamente,  $\vec{S}_z$  representa o fluxo de energia propagante, ao longo do eixo do guia, enquanto

$\vec{S}_t$  representa um fluxo para dentro das paredes condutoras de guia. Na aproximação em que o guia é feito de um material condutor perfeito,  $\vec{S}_t$  deve dar zero (após tomada a parte real) pois não há perda de energia por dissipação. Só  $\vec{S}_z$  sobreviverá e dará um fluxo que não decai com a distância. Perdas óhmicas alteram essas conclusões (ver mais adiante).

Consideremos modos TM e TE separadamente.

### Modos TM

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_t \times \left[ \pm \frac{\omega}{c^2 k} \hat{z} \times \vec{E}_t^* \right] = \pm \frac{\omega}{2\mu_0 c^2 k} |\vec{E}_t|^2 \hat{z}$$

$$\vec{S}_z = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 c^2 \gamma^4} |\vec{\nabla}_t E_z|^2 \hat{z}$$

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_z \times \vec{B}_t^* \quad (\text{pois } \vec{B}_z = 0)$$

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\pm \omega}{c^2 k} \vec{E}_z \times (\hat{z} \times \vec{E}_t^*) = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 c^2 k} E_z \vec{E}_t^*$$

$$\vec{S}_t = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 c^2 k} \frac{\mp ik}{\gamma^2} E_z \vec{\nabla}_t E_z^* = \frac{i \omega}{2\mu_0 c^2 \gamma^2} E_z \vec{\nabla}_t E_z^*$$

Note que, como antecipado,  $\vec{S}_t$  é puramente imaginário (se  $E_z$  é real, o que geralmente se queria sempre é o caso).

Podemos manipular a expressão de  $S_z$  de forma a torná-la mais conveniente. A potência que atravessa uma seção reta de guia é:

$$P = \int_{\text{SEÇÃO RETA}} S_z \, da = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 C^2 \gamma^4} \int_{\text{S.R.}} |\vec{\nabla}_t E_z|^2 \, da$$

Podemos fazer uso da 1ª identidade de Green (Eq. 1.34 de Jackson) já deduzida, aqui aplicada a uma situação bi-dimensional

$$\int_{\text{S.R.}} \vec{\nabla}_t E_z^* \cdot \vec{\nabla}_t E_z \, da = - \int_{\text{S.R.}} E_z^* \nabla_t^2 E_z \, da - \oint_C E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} \, dl$$

Onde o sinal de integral de linha foi invertido porque na nossa convenção aqui não aponta para dentro da seção reta (na Eq. 1.34 a convenção era a oposta). A curva  $C$  é ao longo do perimetro da seção reta. Das condições de contorno  $E_z|_s = 0$  e a integral de linha se anula. Além disso:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 E_z = -\gamma^2 E_z.$$

Assim:

$$\int_{S.R.} |\vec{\nabla}_t E_3|^2 da = \gamma^2 \int_{S.R.} |E_3|^2 da$$

2

$$P = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 c^2 \gamma^2} \int_{S.R.} |E_3|^2 da$$

Usando  $K = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_x^2}}{c}$  e  $\omega_x = c \gamma_x$  podemos explicitar a dependência com a frequência:

$$P = \pm \frac{\omega \sqrt{\omega^2 - \omega_x^2}}{2\mu_0 c \omega_x^2} \int_{S.R.} |E_3|^2 da$$

### Modos TE

$$\vec{S}_3 = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_t \times \vec{B}_t^* = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 K} (\hat{z} \times \vec{B}_t) \times \vec{B}_t^*$$

$$\vec{S}_3 = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 K} |\vec{B}_t|^2 \hat{z} = \frac{\pm \omega k}{2\mu_0 \gamma^4} |\vec{\nabla}_t B_3|^2 \hat{z}$$

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_t \times \vec{B}_3^* = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 K} (\hat{z} \times \vec{B}_t) \times \vec{B}_3^* = \frac{\pm \omega}{2\mu_0 K} B_3^* \vec{B}_t$$

$$\vec{S}_t = \frac{-i\omega}{2\mu_0 \gamma^2} B_3^* \vec{\nabla}_t B_3, \text{ imaginário puro como esperávamos.}$$

$$P = \int_{S.R.} S_z da = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 \gamma^4} \int_{S.R.} |\vec{\nabla}_t B_z|^2 da$$

$$\int_{S.R.} \vec{\nabla}_t B_z^* \cdot \vec{\nabla}_t B_z da = - \int_{S.R.} B_z^* \vec{\nabla}_t^2 B_z da - \oint_C B_z^* \frac{\partial B_z}{\partial n} dl$$

Como  $\frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_{S.R.} = 0$  e  $\vec{\nabla}_t^2 B_z = -\gamma^2 B_z$ ,

$$P = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 \gamma^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da$$

$$P = \pm \frac{c \omega \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}}{2\mu_0 \omega_n^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da$$

Podemos também calcular a densidade de energia eletromagnética e sua integral sobre a seção reta, que é a energia por unidade de comprimento de guia.

Em notações complexas:

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} (|\vec{E}_t|^2 + |\vec{B}_t|^2 + |E_z|^2 + |B_z|^2)$$

Especializando para cada tipo de modo:

Moder TM:

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} (|\vec{E}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 + |E_8|^2)$$

$$\begin{aligned} c^2 |\vec{B}_t|^2 &= \frac{\omega^2}{c^2 k^2} (\hat{z} \times \vec{E}_t^*) \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2 k^2} [\hat{z} \cdot (\vec{E}_t \times (\hat{z} \times \vec{E}_t^*))] \\ &= \frac{\omega^2}{c^2 k^2} |\vec{E}_t|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) |\vec{E}_t|^2 + |E_8|^2 \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) \frac{k^2}{\gamma^4} |\vec{E}_t E_8|^2 + |E_8|^2 \right] \end{aligned}$$

$$U = \int_{S.R.} u da = \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) \frac{k^2}{\gamma^4} \int_{S.R.} |\vec{E}_t E_8|^2 da + \int_{S.R.} |E_8|^2 da \right]$$

ou:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) \frac{k^2}{\gamma^2} + 1 \right] \int_{S.R.} |E_8|^2 da \\ \underbrace{[ ]}_{\gamma^2} &= \frac{c^2 k^2 + \omega^2 + c^2 \gamma^2}{c^2 \gamma^2} = 2 \frac{\omega^2}{c^2 \gamma^2} \text{ já que } c^2 \gamma^2 = \omega^2 - c^2 k^2 \end{aligned}$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2c^2} \frac{\omega^2}{\gamma^2} \int_{S.R.} |E_8|^2 da = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \int_{S.R.} |E_8|^2 da$$

Modos TE:

$$u = \frac{1}{4\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} (\vec{E}_t)^2 + (\vec{B}_t)^2 + |B_z|^2 \right)$$

$$\frac{1}{c^2} |\vec{E}_t|^2 = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} (\hat{z} \times \vec{B}_t^*) \cdot (\hat{z} \times \vec{B}_t) = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} |\vec{B}_t|^2$$

$$u = \frac{1}{4\mu_0} \left[ \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) |\vec{B}_t|^2 + |B_z|^2 \right]$$

$$u = \frac{1}{4\mu_0} \left[ \left( \frac{c^2 k^2 + \omega^2}{c^2 \gamma^4} \right) |\vec{\nabla}_t B_z|^2 + |B_z|^2 \right]$$

$$U = \int_{S.R.} u da = \frac{1}{4\mu_0} \left[ \frac{c^2 k^2 + \omega^2}{c^2 \gamma^2} + 1 \right] \int_{S.R.} |B_z|^2 da$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \frac{\omega^2}{\gamma^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da$$

Note que, para ambos os modos:

$$\frac{|P|}{U} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_r^2}}{\omega} c = \omega_g$$

## Atenuação em guias de ondas reais

Se o guia é construído com um condutor imperfeito haverá dissipação ômica e atenuação da propagação das ondas eletromagnéticas. Podemos escrever:

$$P(z) = P_0 e^{-2\beta_\lambda z} \text{ tal que}$$

$$\beta_\lambda = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}$$

Note que a dependência exponencial acima é compatível com uma parte imaginária para o vetor de onda  $\mathbf{k}_\lambda \rightarrow \mathbf{k}_\lambda + i\beta_\lambda + \Delta\mathbf{k}_\lambda$

$$e^{i\mathbf{k}_\lambda z} \rightarrow e^{i(\mathbf{k}_\lambda + \Delta\mathbf{k}_\lambda)z} e^{-\beta_\lambda z}$$

onde introduzimos também uma modificação da parte real de  $\mathbf{k}_\lambda$  ( $\Delta\mathbf{k}_\lambda$ ) causada, em geral, pela dissipação.

Uma maneira econômica de calcular a CONSTANTE DE ATENUAÇÃO  $\beta_\lambda$  emprega a conservação de energia. Basta calcularmos a potência dissipada na parede por unidade de comprimento do guia: ela será igual a menos a perda na propagação ( $-\frac{dP}{dz}$ ).

A potência dissipada por perdas húmidas na parede pode ser obtida no limite em que a condutividade da mesma é grande mas não infinita. Nesse caso, supõe-se que a solução exata representa uma pequena desvio da solução aproximada ( $\delta = \infty$ ), que já obtivemos, e pode ser calculada na primeira ordem (é uma forma de teoria de perturbação, como na mecânica quântica).

Assim, supomos que a solução aproximada nos deu os valores de  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  na superfície do condutor, na verdade,  $B_{\parallel}$  e  $E_{\perp}$ . Nesse caso, o campo magnético na parede do condutor, DENTRO DELE, é tal que:

$$\vec{H}_{VII} = \frac{\vec{B}_{VII}}{\mu_0} = \vec{H}_{c\parallel} = \frac{\vec{B}_{c\parallel}}{\mu_c}$$

que pode ser obtida da equação de Maxwell na matéria:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Lembrando que, como vimos juntamente analisar o comportamento dos campos na camada fina do "skin depth", NÃO PODEMOS ASSUMIR QUE EXISTA UMA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE  $J_s$ .

Note também que vamos supor que a permeabilidade magnética do condutor é  $\mu_c$ .

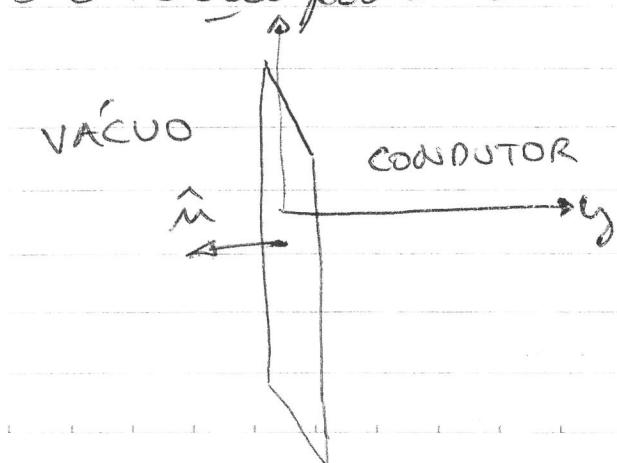
Dentro do condutor, as equações de Maxwell das rotacionais, para uma dependência harmônica temporal são:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = -\frac{\partial \vec{B}_c}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}_c = i\omega \vec{B}_c = i\omega \mu_c \vec{H}_c$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_c = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H}_c = \sigma \vec{E}_c - i\omega \epsilon_c \vec{E}_c$$

onde usamos a expressão da lei de Ohm,  $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}_c$  e assumimos que a permissividade elétrica do condutor é  $\epsilon_c$ .

Vamos agora usar a aproximação de que as variações espaciais na direção normal à superfície do condutor são muito maiores que nas outras direções, ou seja, o "skin depth" é muito menor que os comprimentos de onda característicos. Vamos tornar a variável  $y$  como sendo a direção para dentro do condutor:



$$\vec{\nabla} \approx \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} = -\hat{n} \frac{\partial}{\partial y}$$

Assim:

$$\bar{H}_c = \frac{i}{\omega \mu_c} \hat{n} \times \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial y}$$

$$\bar{E}_c = -\frac{1}{\sigma} \hat{n} \times \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial y}$$

onde  $\bar{\sigma} = \sigma - i \epsilon_c \omega$ . Segue que:

$$\hat{n} \cdot \bar{H}_c = 0 \quad \text{e} \quad \hat{n} \cdot \bar{E}_c = 0$$

e, como  $\hat{n}$  é constante,

$$\hat{n} \cdot \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{n} \cdot \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial y} = 0$$

Assim, fazendo  $\hat{n} \times$  a primeira equação:

$$\hat{n} \times \bar{H}_c = -i \frac{\partial \bar{E}_c}{\omega \mu_c \partial y}$$

Diferenciando em relação a  $y$  a segunda equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{n} \times \bar{H}_c) = -\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial y} = -i \mu_c \omega \bar{\sigma} (\hat{n} \times \bar{H}_c)$$

Note agora que:

$$\mu_e \omega \bar{\sigma} = \mu_e \omega \sigma - i \mu_e \epsilon_e \omega^2$$

$$\equiv \frac{2}{\delta^2} - i \mu_e \epsilon_e \omega^2$$

$\delta = \left( \frac{2}{\mu_e \omega \sigma} \right)^{1/2}$  é o "skin depth". Ele é da ordem

de  $\delta \sim \frac{6,5 \text{ cm}}{\sqrt{\nu(\text{Hz})}}$  para o cobre, por exemplo.

Para  $\nu$  na faixa de micro-ondas ( $\sim 10^9 \text{ Hz}$ )

$$\delta \sim 10^{-4} \text{ cm.}$$

Por outro lado,  $\mu_e \epsilon_e \omega^2 \sim \frac{\omega^2}{c^2} \sim \text{cm}^{-2}$  para

micro-ondas. Portanto, podemos seguramente aproximar:

$$\mu_e \omega \bar{\sigma} \approx \mu_e \omega \sigma = \frac{2}{\delta^2},$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{m} \times \vec{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2} (\hat{m} \times \vec{H}_c) = 0$$

cujá solução é:

$$\vec{H}_c(y) = \vec{H}_{c11} e^{-y/\delta} e^{iy/\delta}$$

O campo elétrico é obtido ~~é~~ de:

$$\vec{E}_c \approx -\frac{1}{\sigma} \hat{n} \times \frac{\partial \vec{H}_c}{\partial y}$$

$$\vec{E}_c(y) = \frac{1}{\sigma s} (1-i) \hat{n} \times \vec{H}_{c||} e^{-y/s} e^{iy/s}$$

Como a componente tangencial do campo elétrico (dada acima) é contínua através da interface condutor x vácuo, assim como a de  $\vec{H}$  já discutida, segue que na superfície do condutor e imediatamente fora dele há campos  $\vec{E}_{VII}$  e  $\vec{H}_{VII}$  dados por:

$$\vec{E}_{VII} = \frac{1}{\sigma s} (1-i) \hat{n} \times \vec{H}_{c||}$$

$$\vec{H}_{VII} = \vec{H}_{c||} \Rightarrow \frac{\vec{B}_{VII}}{\mu_0} = \vec{H}_{c||}$$

que podem ser combinadas para dar:

$$\vec{E}_{VII} = \frac{1}{\mu_0 \sigma s} (1-i) \hat{n} \times \vec{B}_{VII}$$

Isso tem como consequência o aparecimento de uma componente do vetor de Poynting que aponta para dentro do condutor, correspondente a uma potência por unidade de área que é dissipada dentro dele.

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_{\text{loss}} &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} [\vec{E}_{VII} \times \vec{B}_{VII}^*] \\
 &= \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma s} \operatorname{Re} [(1-i)(\hat{\mu} \times \vec{B}_{VII}) \times \vec{B}_{VII}^*] \\
 &= \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma s} \operatorname{Re} [(1-i)(-1) |\vec{B}_{VII}|^2 \hat{\mu}] \\
 &= -\frac{|\vec{B}_{VII}|^2}{2\mu_0^2 \sigma s} \hat{\mu} = -\frac{1}{4\mu_0^2} \sqrt{\frac{2\mu_0 \omega}{\sigma}} |\vec{B}_{VII}|^2 \hat{\mu}.
 \end{aligned}$$

que, como antecipado, aponta para dentro do condutor. Assim:

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{da} = -\vec{S}_{\text{loss}} \cdot \hat{\mu} = \frac{|\vec{B}_{VII}|^2}{4\mu_0^2} \sqrt{\frac{2\mu_0 \omega}{\sigma}}$$

Uma maneira alternativa de chegar ao mesmo resultado é calcular diretamente as perdas ôhmicas. Como já vimos, a taxa de dissipação de energia eletromagnética por unidade de volume é:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\text{loss}}(y) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{J}_c(y) \cdot \vec{E}_c^*(y)] \\
 &= \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re} [|\vec{E}_c(y)|^2] \\
 &= \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_c(y)|^2
 \end{aligned}$$

onde usamos a lei de Ohm  $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_c$ .

Mas:

$$\begin{aligned} u_{loss}(y) &= \frac{\sigma}{2} \frac{2}{\mu_0^2 \sigma^2 S^2} |\hat{n} \times \vec{B}_{VII}|^2 e^{-2y/S} \\ &= \frac{e^{-2y/S}}{\mu_0^2 S^2 \sigma} |\vec{B}_{VII}|^2 \end{aligned}$$

A potência dissipada por unidade de área é:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{loss}}{da} &= \int_0^\infty u_{loss}(y) dy = \frac{|\vec{B}_{VII}|^2}{\mu_0^2 S^2} \frac{S}{2} \\ &= \frac{|\vec{B}_{VII}|^2}{2 \mu_0^2 S^2} \end{aligned}$$

que é o mesmo resultado anterior.

Note que, se integrarmos  $\vec{J}_c(y)$  em  $y$  obtemos a corrente superficial efetiva:

$$\vec{K}_{eff} = \int_0^\infty \vec{J}_c(y) dy = \frac{(1-i)}{S} (\hat{n} \times \vec{H}_{VII}) \int_0^\infty e^{-y/S} e^{iy/S} dy$$

$$\Rightarrow \vec{K}_{eff} = \hat{n} \times \vec{H}_{VII} = \frac{1}{\mu_0} \hat{n} \times \vec{B}_{VII}$$

que corresponde precisamente à condição de contorno para  $\vec{B}_{II}$  na presença de um condutor perfeito.

Podemos agora calcular a atenuação no guia de ondas:

$$-\frac{dP}{dz} = \int_C \frac{dP_{ext}}{da} dz$$

onde  $C$  é uma curva ao longo da borda da seção reta do guia. Portanto:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\mu_0 \sigma S} \int_C |\vec{B}_{VII}|^2 dz$$

Modos TM: Nesse caso:

$$\vec{B}_{VII} = (\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}_t = \pm \frac{\omega}{c k} (\hat{n} \times \hat{z}) \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t)$$

$$\text{Mas: } (\hat{n} \times \hat{z}) \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t) = \vec{E}_t \cdot [(\hat{n} \times \hat{z}) \times \hat{z}] = -\hat{n} \cdot \vec{E}_t$$

$$\text{Logo: } \vec{B}_{VII} = \mp \frac{\omega}{c k} \hat{n} \cdot \vec{E}_t = -i \frac{\omega}{c^2 \gamma} \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t E_z$$

Finalmente:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\mu_0 \sigma S} \left( \frac{\omega}{\omega_x} \right)^2 \int_C \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 dz$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 \sigma S \delta_\lambda} \left( \frac{\omega}{\omega_x} \right)^{5/2} \frac{1}{\omega_x^2} \int_C \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 dz$$

onde  $\delta_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega_x}}$  é o "skin depth" na frequência de corte  $\omega_x$ .

Como:

$$|P| = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{\omega(\omega^2 - \omega_\lambda^2)^{1/2}}{\omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |E_3|^2 da$$

$$\beta_\lambda = \frac{c}{2\mu_0 \sigma \delta_\lambda} \frac{\omega \left( \frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^{1/2}}{\omega_\lambda^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} \frac{\int \left| \frac{\partial E_3}{\partial n} \right|^2 dl}{\int |E_3|^2 da}$$

(n × ẑ)

Modos TE: Nesse caso,  $\vec{B}_{||} = [(\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}_t]^{\sqrt{}} + \vec{B}_3$

$$|\vec{B}_{||}|^2 = |(\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2$$

$$\text{Mas: } |(\hat{n} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}_t|^2 = |\hat{z} \cdot (\hat{n} \times \vec{B}_t)|^2 = |\hat{n} \times \vec{B}_t|^2$$

porque  $(\hat{n} \times \vec{B}_t) \parallel \hat{z}$ . Assim:

$$|\vec{B}_{||}|^2 = |\hat{n} \times \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2 = \frac{k^2}{\gamma^4} (|\hat{n} \times \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2)$$

Assim:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \int_c \left[ \frac{k^2}{\gamma^4} (|\hat{n} \times \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2) \right] dl$$

$$\frac{k^2}{\gamma^4} = \frac{\omega^2 - \omega_\lambda^2}{c^2 \gamma^4} = \frac{c^2 (\omega^2 - \omega_\lambda^2)}{\omega_\lambda^4} = \frac{c^2}{\omega_\lambda^2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} - 1 \right)$$

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \int_c \left[ \frac{c^2}{\omega_\lambda^2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} - 1 \right) (|\hat{n} \times \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2) \right] dl$$

Como:

$$|P| = \frac{C}{2\mu_0} \frac{\omega \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega_\lambda^2} \int_{S.R.} |B_z|^2 da$$

$$\beta_\lambda = \frac{1}{2\mu_0 C \sigma \delta_\lambda} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} - 1\right)^{1/2}} \frac{\oint_e [ ] da}{\int_{S.R.} |B_z|^2 da}$$

Onde os adicetes da integral de linha são:

$$[ ] \equiv \frac{c^2}{\omega_\lambda^2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} - 1 \right) |\vec{m} \times \vec{\nabla}_t B_z|^2 + |B_z|^2$$

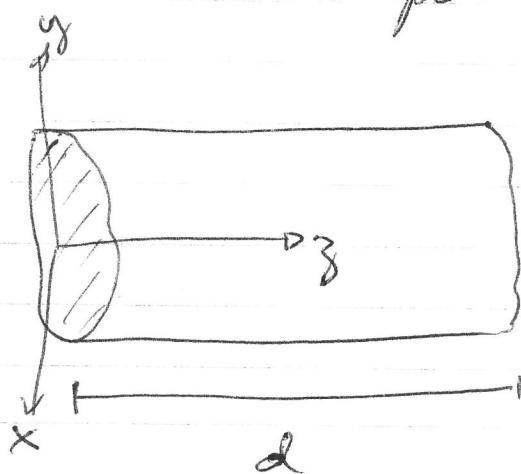
Dependências típicas para frequência de  $\beta$ , podem ser vistas na Fig. 8.6 de Jackson.

## Cavidades resonantes:

Cavidades resonantes são regiões confinadas espacialmente por paredes condutoras em todos as direções. As oscilações eletromagnéticas nessas regiões definem um problema de valor de contorno em 3 dimensões, cuja solução só existe para alguns valores discretos de frequências.

Note a analogia com a determinação de estados ligados de um potencial em Mecânica Quântica. Esse problema tem grande importância histórica também na determinação do espectro de corpo negro.

Um caso particular importante de cavidades resonantes é o guia de ondas cilíndrico cujas extremidades são fechadas por paredes condutoras planas em  $z=0$  e  $z=d$ .



Nesse caso, temos que combinar as soluções propagantes  $e^{ikz}$  e  $e^{-ikz}$  de forma a obter ondas estacionárias:

$$A \sin k_z + B \cos k_z$$

Considerando, inicialmente, paredes de condutores perfeitos, as condições de contorno nas novas paredes são:

$$E_{||} \Big|_s = E_t \Big|_{z=0,d} = 0 \quad B_1 \Big|_s = B_z \Big|_{z=0,d} = 0$$

Modo TM: Nesse caso:

$$\vec{E}_t = \pm \frac{ik}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t E_z$$

É evidente que essa equação vem de:

$$\vec{E}_t = \frac{1}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

já que, no caso propagante,  $\pm ik \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}$ .

Se:

$$E_z \propto A \sin k_z + B \cos k_z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \propto k(A \cos k_z - B \sin k_z)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow A = 0 ; \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0 \Rightarrow k = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

Assim:

$$E_z = E_z(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_t = -\left(\frac{p\pi}{\gamma^2 d}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{\nabla}_t E_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}_t = \frac{i\omega}{\gamma c^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

onde usamos (7). A função  $E_z(x, y)$  acima é a mesma que rege o guia de ondas, ou seja, satisfaz:

$$(\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2) E_z = 0 \quad \text{s.t. } E_z|_{\text{paredes laterais}} = 0$$

Vale ~~notar~~ notar que a outra condição de contorno:

$$B_z|_{z=0,d} = 0$$

já é automaticamente satisfeita já que  $B_z = 0$  para modos TM.

Modo TE: Nesse caso, aplicando diretamente:

$$B_z \Big|_{z=0, d} = 0$$

$$\Rightarrow B_z = B_z(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

Note a ausência de  $p=0$ . Segue que:

$$\vec{B}_t = \frac{1}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{p\pi}{\gamma^2 d} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{\nabla}_t B_z(x, y).$$

De (8):

$$\vec{E}_t = -\frac{i\omega}{\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \hat{z} \times \vec{\nabla}_t B_z(x, y).$$

Acima,  $B_z(x, y)$  é obtida como no guia de ondas:

$$(\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2) B_z(x, y) = 0 \quad \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial n} \Big|_s = 0$$

(nas paredes laterais).

É evidente também que a outra condição de contorno é automaticamente satisfeita.

$$\vec{E}_t \Big|_{z=0, d} = 0.$$

Como  $\Omega = \frac{p\pi}{d}$  em ambos os casos,  
as frequências permitidas (auto-frequências)  
são:

$$\gamma_{\lambda}^2 = \frac{\omega_{\lambda p}^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

$$\omega_{\lambda p} = c \left[ \gamma_{\lambda}^2 + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Por exemplo, para o caso de que de  
ondas retangulares já tratado:

$$\omega_{m,n,p} = \pi c \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{p}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Os valores de  $m, n, p$  dependem do modo

$$\left. \begin{array}{l} TM: m=1, 2, 3, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \\ p=0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Modo mais Baixo:}$$

$$\omega_{1,1,0} = \pi c \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{1/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} IE: m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \\ \text{com } m+n > 0 \\ p=1, 2, 3, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Modos mais Baixos:}$$

$\omega_{0,1,1} = \omega_{1,0,1} = \text{Se } a > b:$

$$\omega_{1,0,1} = \pi c \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} \right)^{1/2}$$

## Crividade resonante de seção reta circular

Nesse caso, precisamos do quia de onda de seção reta circular. Para isso, escrevemos a equação de Helmholtz em coordenadas polares  $(s, \phi)$

$$(\nabla_s^2 + r^2) \Phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + r^2 \Phi = 0$$

Separando variáveis:

$$\Phi(s, \phi) = R(s) \Phi(\phi)$$

teremos, na parte angular:

$$\Phi'' = -\mu^2 \Phi \Rightarrow \Phi(\phi) = e^{\pm i \mu \phi} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

(a constante é negativa para que a ~~solu-~~ solução seja oscilatória) e

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dR}{ds} + \left( s^2 - \frac{\mu^2}{s^2} \right) R = 0$$

Trocando variáveis:  $x = s^2 \Rightarrow R(s) = \tilde{R}(x)$

$$\frac{d}{ds} = s \frac{d}{dx} \quad \frac{d^2}{ds^2} = s^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\bar{R}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\bar{R}}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \bar{R} = 0$$

que é a equação de Bessel de ordem  $m$ .  
 Suas soluções não divergentes quando  $x \rightarrow 0$   
 são as funções de Bessel de ordem  $m$  do  
 primeiro tipo:

$$\bar{R}(x) = J_m(x)$$

cejas propriedades não listadas na seção 3.7 de Jackson. Portanto:

$$\Psi(s, \phi) = A J_m(\gamma s) e^{\pm i m \phi} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Para os modos TM:  $\Psi(s, \phi) = E_s(s, \phi)$  e devemos impor:

$$E_s|_{s=R} = 0$$

onde  $R$  é a raiz da seção reta:

$$J_m(\gamma R) = 0$$

$\Rightarrow \gamma R = x_{m\mu} = m\text{-ésima raiz da função de Bessel } J_m(x)$

(ver algumas raízes depois de 3.92-Jackson).

Assim:

$$E_z(s, \phi) = E_z^0 J_m(Y_{m,n}(s)) e^{\pm i\omega t}$$

2

$$Y_{m,n} = \frac{X_{m,n}}{R} \Rightarrow k_{m,n} = \frac{1}{c} \left[ \omega^2 - \frac{c^2 X_{m,n}^2}{R^2} \right]^{1/2}$$

onde as frequências da cavidade não:

$$\omega_{m,n,p} = c \left[ \frac{X_{m,n}}{R^2} + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

O modo mais baixo é:

$$\omega_{01,0} = \frac{c}{R} X_{01} = 2.405 \frac{c}{R}$$

$$E_z = E_z^0 J_0(2.405 s/R) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_t = 0$$

$$\vec{B}_t = \frac{i \omega_{01,0}}{Y_{01,0} c} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{i R}{c X_{01}} \hat{z} \times \left[ \hat{s} \frac{\partial E_z(s)}{\partial s} \right] e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}_t = \frac{i}{c} \hat{\phi} J_0^1(2.4058/R) e^{i\omega t}$$

$$\vec{B}_t = -\frac{i}{c} \hat{\phi} J_1(2.4058/R) e^{-i\omega t}$$

Onde usamos que  $J_0^1(x) = -J_1(x)$  (de 3.88 e 3.84).

Para os modos TE,

$$B_\theta(\vartheta, \phi) = B_\theta^\circ J_m(\vartheta \beta) e^{\pm i m \phi} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

e daremos impor:

$$\left. \frac{d J_m(\vartheta \beta)}{d \vartheta} \right|_{\vartheta=R} = 0$$

$$\Rightarrow \chi_{mn} R = \chi_{mn} = n\text{-ésima raiz de } J_m^1(x)=0.$$

(ver lista na seção 8.7 do Jackson).

$$\Rightarrow k_{mn} = \left[ \omega^2 - \frac{\chi_{mn}^2}{R^2} \right]^{1/2}$$

$$\omega_{mn,p} = c \left[ \frac{\chi_{mn}^2}{R^2} + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\begin{cases} m=0, 1, 2, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \\ p=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Da lista de raízes temos que o modo de frequência de corte mais baixa é tal que  $m = 1, n = 1, p = 1$ :

$$\omega_{1,1,1} = c \left[ \frac{(1.841)^2}{R^2} + \left( \frac{\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

que é ajustável através de  $d$ , que pode ser variado se uma das paredes for um pistão móvel. Nesse caso:

$$B_3 = B_3^0 J_1(1.841 s/R) \cos \phi \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}_t = \frac{\pi}{\gamma_{111}^2 d} \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t} B_3^0 \left[ \hat{s} \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] (J_1(1.841 s/R) \times \downarrow \cos \phi)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{i\omega_{111}}{\gamma_{111}^2} \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) e^{-i\omega t} B_3^0 \hat{z} \times \left[ \hat{s} \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] ( )$$

## Atenuações em cavidades ressonantes

Se uma cavidade feita de condutores perfeitos éposta a vibrar em uma de suas auto-frequências, a oscilação continuará indefinidamente. Perdas ômicas nas paredes levarão a um decaimento da oscilação. Assim como no caso dos guias de ondas, esse decaimento aparecerá como uma parte imaginária na frequência do modo:

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega - i\frac{\Gamma}{2}$$

Note que a parte real da frequência também é modificada. Assim, os campos serão

$$B(t), E(t) \sim e^{-i(\omega_0 + \Delta\omega)t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$$

de tal forma que a energia total  $U(t)$

$$U(t) \propto |E(t)|^2 \propto e^{-\Gamma t}$$

ou:

$$\Gamma = \frac{-\frac{dU}{dt}}{U} = \frac{\text{Taxa de perda de energia}}{\text{Energia total armazenada}}$$

Tipicamente define-se  $\Omega = \frac{\omega_0}{\Gamma}$  ("Q da cavidade", "Fator de qualidade")

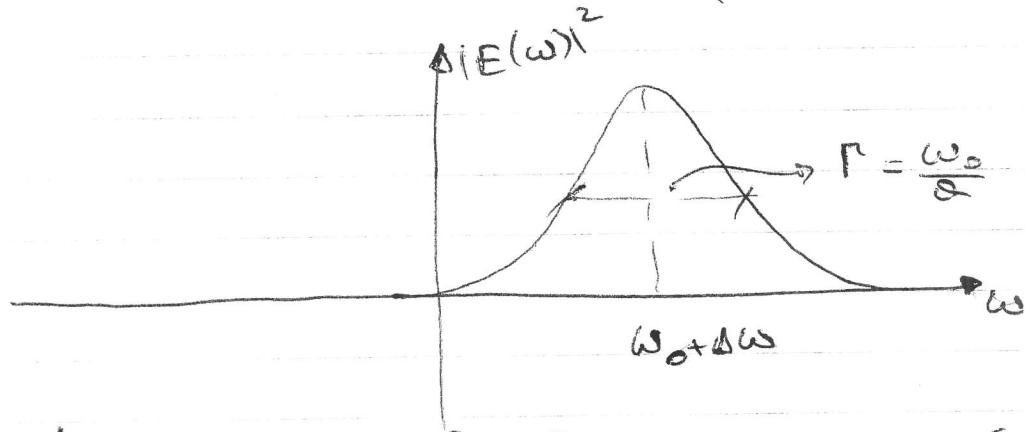
Note que se:

$$E(t) \propto e^{-i(\omega_0 + \Delta\omega)t} e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} E(t) e^{i\omega t}$$

$$\propto \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) + i\frac{\Gamma}{2}}$$

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \approx \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\frac{\omega_0}{2Q})^2}$$



Assim, a oscilação corresponderá a uma "linha" localizada em  $\omega_0 + \Delta\omega$  de largura a meia altura  $\Gamma$ . Quando as perdas são a zero ( $\Gamma \rightarrow \infty$ ),  $\Gamma \rightarrow 0$  e a "linha" se transforma numa delta de Dirac.

Note a semelhança da discussão acima com o decaimento de um nível atômico.

A análise da atenuação em guias pode ser adaptada ao cálculo da atenuação de modo em condutas ressonantes.

Para isso, precisamos da energia total armazenada primeiro. Da discussão dos guias de onda, sabemos que:

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} (|\vec{E}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 + |\psi|^2)$$

Onde:  $\psi = E_z (\text{TM})$  ou  $c B_z (\text{TE})$

Qualquer que seja o modo, a dependência  $e^{j\frac{p\pi}{d}z}$  tem que ser substituída por

$$\sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \text{ ou } \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) (\text{TM})$$

Portanto, a dependência em  $z$  fica:

$$\sin^2\left(\frac{p\pi}{d}z\right) (\text{TE}) \text{ ou } \cos^2\left(\frac{p\pi}{d}z\right) (\text{TM})$$

No caso (TM)  $p=0$ , não há dependência com  $z$ , como no caso do guia de ondas.

A integração em  $z$  dá:

$$\int_0^d dz \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \\ \cos^2 \end{matrix} \right\} \left( \frac{p\pi}{d} z \right)^2 = \frac{d}{2} \text{ se } p \neq 0$$

$$\int_0^d dz = d \text{ se } p=0 (\text{TM})$$

A integração transversal é a mesma que no caso do guia de ondas. Assim, usando o resultado do guia de ondas e:

$$\frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} = \frac{c^2 \delta_\lambda^2 + c^2 k_\lambda^2}{c^2 \delta_\lambda^2} = 1 + \frac{k_\lambda^2}{\delta_\lambda^2} = 1 + \left(\frac{p\pi}{Y_\lambda d}\right)^2$$

$$U = \frac{d}{4} \left\{ \frac{\epsilon_0}{1/\mu_0} \right\} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{Y_\lambda d} \right)^2 \right] \int_{S.R.} \left\{ \frac{|E_z(x,y)|^2}{|B_z(x,y)|^2} \right\} da \quad (p \neq 0)$$

onde a expressão da parte superior (ínterior) refere-se ao modo TM (TE). Se  $p=0$  (TM):

$$U = \frac{d}{2} \epsilon_0 \int_{S.R.} |E_z(x,y)|^2 da \quad (TM, p=0)$$

A taxa de perda de energia também é semelhante só que agora há perdas nas reais perdas em  $z=0, d$ . Assim:

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma} \left[ \int_c^d dz \int_0^z |\vec{B}_{VII}|^2 + 2 \int_0^d |\vec{B}_{VII}|^2 da \right]$$

S.R.  
( $z=0$  and)

Modo TM:

O 1º termo é tal que:

$$(\vec{B}_{VII}) = (\hat{x} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}_t = \frac{i\omega}{\omega_x^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) (\hat{x} \times \hat{z}) \cdot \hat{z} \times \vec{\nabla}_t$$

Mas:

$$(\hat{x} \times \hat{z}) \cdot (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t) = -\hat{x} \cdot \vec{\nabla}_t$$

2

$$\vec{B}_{VII} = -\frac{i\omega}{\omega_x^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \int_c^d dz \int_0^z |\vec{B}_{VII}|^2 = \frac{\omega^2}{\omega_x^4} \frac{d}{2} \int_0^d \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|^2 dz \quad (p \neq 0)$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega_x^4} d \int_0^d \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|^2 dz \quad (p=0)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_x^4} = \frac{1}{c^2 \delta_x^2} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\delta_x d} \right)^2 \right]$$

Alcândisse, o 2º termo:

$$\int_{\substack{S.R. \\ z=0,d}} |\vec{B}_{v\parallel}|^2 da = \int_{\substack{S.R. \\ z=0,d}} |\vec{B}_t|^2 \Big|_{z=0,d} da = \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^4} \int_{S.R.} |\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z|^2 da$$

já que  $\vec{B}_t|_{z=0,d} = \pm i \frac{\omega}{\omega_\lambda^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z$

Mas:  $|\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z|^2 = (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z^*) \cdot (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z) = |\vec{\nabla}_t E_z|^2$

Assim:

$$\begin{aligned} \int_{\substack{S.R. \\ z=0,d}} |\vec{B}_{v\parallel}|^2 da &= \frac{1}{c^2 \delta_\lambda^2} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\delta_\lambda d} \right)^2 \right] \int_{S.R.} |\vec{\nabla}_t E_z|^2 da \\ &= \frac{\delta_\lambda^2}{c^2 \delta_\lambda^2} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\delta_\lambda d} \right)^2 \right] \int_{S.R.} |E_z|^2 da \end{aligned}$$

onde usamos  $\int_{S.R.} |\vec{\nabla}_t E_z|^2 da = \delta_\lambda^2 \int_{S.R.} |E_z|^2 da$

Juntando tudo:

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dt} &= \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta_\lambda} \frac{1}{c^2 \delta_\lambda^2} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\delta_\lambda d} \right)^2 \right] \left\{ \frac{d}{2} (1 + \delta_{p,0}) \int \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 dl + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_\lambda^2 \int_{S.R.} |E_z|^2 da \right\} \end{aligned}$$

Modo TE : Nesse caso:

$$|\vec{B}_{VH}|^2 = |\hat{u} \times \vec{B}_t|^2 + |B_3|^2$$

$$= \frac{P^2 \pi^2}{\delta_\lambda^2 d^2} \cos^2\left(\frac{P\pi z}{d}\right) |\hat{u} \times \vec{B}_t|^2 + \sin^2\left(\frac{P\pi z}{d}\right) |B_3|^2$$

$$\Rightarrow \oint_C dz \int_0^d |\vec{B}_{VH}|^2 = \frac{d}{2} \oint_C \left[ |B_3|^2 + \left(\frac{P\pi}{\delta_\lambda^2 d}\right)^2 |\hat{u} \times \vec{B}_t|^2 \right] dz$$

$$\underset{\substack{\text{S.R.} \\ (z=0)}}{2 \int} |\vec{B}_{VH}|^2 dz = 2 \left(\frac{P\pi}{\delta_\lambda^2 d}\right)^2 \underset{\substack{\text{S.R.}}}{} \int |\hat{u} \times \vec{B}_t|^2 dz$$

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2 \mu_0 \sigma \delta_\lambda} \left\{ \frac{d}{2} \oint \left[ |B_3|^2 + \left(\frac{P\pi}{\delta_\lambda^2 d}\right)^2 |\hat{u} \times \vec{B}_t|^2 \right] dz + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{P\pi}{\delta_\lambda^2 d}\right)^2 \underset{\substack{\text{S.R.}}}{} \int |\vec{B}_t|^2 dz \right\}$$