A

Função Delta de Dirac em coordenadas curvilíneas
(Problemas 1.2 e 1.3)

Seja um sistema de coordenadas curvilíneas (u, v, w) tais que os elementos de comprimento são:

$$\frac{du}{U}, \quad \frac{dv}{V} \quad e \quad \frac{dw}{W}$$

Como exemplos, tomamos coordenadas cilíndricas e esféricas onde:

$$(\rho, \phi, z) \Rightarrow d\rho, \ \rho\, d\phi, \ dz \Rightarrow U = W = 1, \ V = \frac{1}{\rho}$$

$$(r, \theta, \phi) \Rightarrow dr, \ r\, d\theta, \ r \sin\theta\, d\phi \Rightarrow U = 1, \ V = \frac{1}{r}, \ W = \frac{1}{r \sin\theta}$$

Segue que um elemento de comprimento qualquer é dado por:

$$dl^2 = \left(\frac{du}{U}\right)^2 + \left(\frac{dv}{V}\right)^2 + \left(\frac{dw}{W}\right)^2$$

que são, nos sistemas acima

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad e$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

A função Delta em 3D pode ser escrita através da representação:

$$D(\alpha, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \alpha^3} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right] \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \delta^{(3)}(\vec{x})$$

B

Assim:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = C \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]\right]$$

onde $C = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\alpha^3}$. Quando $\alpha \to 0$, apenas a vizinhança imediata de $(x,y,z)-(x',y',z')$ é relevante. Assim:

$$\Delta\vec{x}^2 = (\vec{x}-\vec{x}')^2 \cong \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$
$$= \frac{(u-u')^2}{U^2} + \frac{(v-v')^2}{V^2} + \frac{(w-w')^2}{W^2}$$

onde $U, V\ W$ são calculadas em (u,v,w) ou (u',v',w').
Assim, para a variável $\underline{u}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\frac{(u-u')^2}{U^2}\right] = \frac{U}{\sqrt{2\pi}\,\alpha'} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha'^2}(u-u')^2\right]$$

onde $\alpha' = \alpha U$

$$\xrightarrow[\alpha' \to 0]{} U\,\delta(u-u')$$

Analogamente para v e w e ficamos com:

$$\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}') = UVW\,\delta(u-u')\,\delta(v-v')\,\delta(w-w')$$

Particularizando:

$$(\rho,\phi,z) \Rightarrow \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}') = \frac{1}{\rho}\,\delta(\rho-\rho')\,\delta(\phi-\phi')\,\delta(z-z')$$

$$(r,\theta,\phi) \Rightarrow \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}') = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')$$
$$= \frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\phi-\phi')$$

C

(a) Carga Q distribuída uniformemente numa casca esférica de raio R, em coordenadas esféricas

O elemento de carga é $\sigma\, dS' = \frac{Q}{4\pi R^2} R^2 d\Omega'$

$$\Rightarrow \rho(\bar{x}) = \int \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')\, \sigma\, dS'$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 \sin\theta}\, \delta(r-R)\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')\, \frac{Q}{4\pi R^2} R^2 \sin\theta'\, d\theta' d\phi'$$

$$\boxed{\rho(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)}$$

Note que $\int \rho(\bar{x})\, d^3x = \frac{Q}{4\pi R^2}\int_0^{\infty} \delta(r-R)\, 4\pi r^2 dr = Q.$

(b) Carga $\underline{\lambda}$ por unidade de comprimento uniformemente distribuída numa superfície cilíndrica de raio $\underline{b}$, em coordenadas cilíndricas

$$dq = \sigma\, dS' = \frac{\lambda}{2\pi b}\, b\, d\phi' dz' = \frac{\lambda}{2\pi} d\phi' dz'$$

$$\Rightarrow \rho(\bar{x}) = \int \frac{1}{\rho}\, \delta(\rho-b)\,\delta(\phi-\phi')\,\delta(z-z')\, \frac{\lambda}{2\pi}\, d\phi' dz'$$

$$\boxed{\rho(\bar{x}) = \frac{\lambda}{2\pi b}\,\delta(\rho-b)}$$

$$\int \rho(\bar{x})\, d^3x = \frac{\lambda}{2\pi b}\int_0^{\infty} \delta(\rho-b)\, \rho\, d\rho\ 2\pi L = \lambda L$$

(c) Carga Q uniformemente distribuída num disco plano circular de raio $\underline{R}$ e espessura desprezível, em coordenadas cilíndricas:

$$dq = \frac{Q}{\pi R^2} \rho' d\rho' d\phi'$$

$$\rho(\bar{x}) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z)}{\rho} \frac{Q}{\pi R^2} \rho' d\rho' d\phi'$$

$$= \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z) \int_0^R \delta(\rho-\rho')\, d\rho' = \boxed{\frac{Q}{\pi R^2} \Theta(R-\rho)\delta(z)}$$

$$\int \rho(\bar{x}) d^3x = \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^\infty \rho\, d\rho\, dz (2\pi)\, \Theta(R-\rho)\delta(z)$$

$$= \frac{2Q}{R^2} \frac{R^2}{2} = Q.$$

(d) O mesmo de (c), em coordenadas esféricas.

$$dq = \frac{Q}{\pi R^2} r' dr' d\phi'$$

$$\rho(\bar{x}) = \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\pi/2)\delta(\phi-\phi')}{r^2 \sin\theta}$$

$$\boxed{\rho(\bar{x}) = \frac{Q}{\pi R^2} \delta(\theta-\pi/2) \frac{\Theta(R-r)}{r}}$$

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, (2\pi) \frac{\delta(\theta-\pi/2)\Theta(R-r)}{r}$$

$$= \frac{2Q}{R^2} \int_0^R r\, dr = Q$$