

Expansão multipoles

A solução geral da Eq. de Poisson é:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3x'$$

O integrando acima contém a função escalar:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma]^{1/2}}$$

onde $r = |\vec{r}|$, $r' = |\vec{r}'|$ e γ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}' :

$$\cos\gamma = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{rr'}$$

Suponha primeiro que $r' < r$. Então:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{[1 + s^2 - 2s \cos\gamma]^{1/2}} \quad \text{onde } s = \frac{r'}{r}$$

Podemos expandir a expressão acima numa série de Taylor em s :

$$\frac{1}{[1 + s^2 - 2s \cos\gamma]^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{se } s \leq 1$$

A expressão acima pode ser provada a partir de outras propriedades dos polinômios de Legendre $P_n(x)$. Alternativamente, a expansão acima pode ser tomada como a definição dos $P_n(x)$. Nesse caso, o lado esquerdo é conhecido como a função geratriz dos $P_n(x)$ (ver Seções 3.2 e 3.3 do Jackson).

$$\text{Assim: } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\gamma) \quad \text{se } r' < r$$

Analogamente, se $r < r'$, pela simetria entre r e r'

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r^2}{r'^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{se } r < r'$$

De maneira geral, escrevemos:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_s^2}{r_s^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \gamma)$$

onde $r_s = \min(r, r')$ e $r_s = \max(r, r')$

Além disso, se (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas de \vec{x} e (r', θ', ϕ') são as de \vec{x}' , segue que:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

como pode ser verificado diretamente calculando-se $\vec{x} \cdot \vec{x}'$ usando coordenadas esféricas. Assim:

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = F(\theta, \phi, \theta', \phi')$$

ou seja, $P_{\ell}(\cos \gamma)$ é função de $\theta, \phi, \theta', \phi'$. Portanto, podemos expandir essa função em harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta', \phi')$, $Y_l^m(\theta, \phi)$. Pode-se provar que essa expansão apenas envolve $l'=l$, $\ell'=l$ e $m'=m$.

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

(ver Seção 3.6 de Jackson). Essa expansão é conhecida como o Teorema de Adição de Harmônicos Esféricos.

Levando-a na expressão anterior:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_s^l}{r_s^{l+1}} Y_m^*(\theta', \phi') Y_m(\theta, \phi)$$

A grande utilidade da expressão acima veio do fato de que ela fatoriza as coordenadas de \vec{x} (r, θ, ϕ) das coordenadas de \vec{x}' (r', θ', ϕ').

Levando-a na solução da Eq. de Poisson:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_m^*(\theta', \phi') \frac{r_s^l}{r_s^{l+1}} g(\vec{x}') d^3x' \right] Y_m(\theta, \phi)$$

Se r estiver fora da distribuição de carga ($r < r'$ e $r > r'$):

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_m^*(\theta', \phi') r'^l g(\vec{x}') d^3x' \right] \underbrace{\frac{Y_m(\theta, \phi)}{r^{l+1}}}_{q_{lm}}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} q_{lm} \frac{Y_m(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

Os coeficientes q_{lm} são chamados "momentos de multipolo" e a expressão acima é uma expansão multipoar. Ela organiza $\Phi(\vec{x})$ para r fora da região onde há carga em potências crescentes de $(\frac{1}{r})$. Portanto, quando r é muito grande, apenas os termos com l pequenos sobrevivem.

Podemos usar as expressões do primeiros harmônicos esféricos para obtermos os gem correspondentes:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int g(\vec{x}') d^3x' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

$$q_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}} \int (x' - iy') g(\vec{x}') d^3x' = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}} (P_x - i P_y)$$

$$q_{10} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \int z' g(\vec{x}') d^3x' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} P_z$$

$$q_{22} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\pi}} \int (x' - iy')^2 g(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\pi}} (Q_{11} - 2i Q_{12} - Q_{22})$$

$$q_{21} = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8\pi}} \int z' (x' - iy') g(\vec{x}') d^3x' = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8\pi}} (Q_{13} - i Q_{23})$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}} \int (3z'^2 - r^2) g(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}} Q_{33}$$

Para m negativo usamos $Y_m^+(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{-m}(\theta, \phi)$ para mostrar:

$$q_{l-m} = (-1)^m q_m^+$$

Acima, Q é a carga total da distribuição, P_x, P_y, P_z são as componentes cartesianas do momento de dipolo \vec{p} :

$$\vec{p} = \int \vec{x}' g(\vec{x}') d^3x'$$

Os Q_{ij} são os componentes do tensor momento de quadrupolo, que tem trace zero.

$$Q_{ij} = \int (3x_i^! x_j^! - 3r^{!2} \delta_{ij}) \delta(\vec{x}^!) d^3 x^!$$

Assim, os $(2l+1)$ momentos de multipolo de ordem l , são combinações lineares de suas contrapartidas cartesianas. A expansão multipolar em coordenadas cartesianas é:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

Os coeficientes Q_{lm} , assim como os $T_{lm}(\theta, \phi)$, se transformam como um tensor esférico de ordem $= l$.

É importante citar, por completeza, a fórmula para o campo elétrico de um dipolo, que pode ser obtida através do gradiente do termo correspondente em $\Phi(\vec{r})$:

$$\vec{E}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{3\hat{m}(\vec{p} \cdot \hat{m}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

$$\text{onde o dipolo está na posição } \vec{r}_0 \text{ e } \hat{m} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Aém disso, é preciso acrescentar um termo proporcional a uma delta de Dirac, a fim de garantir que a integral volumétrica de $\vec{E}(\vec{r})$ seja bem definida:

$$\vec{E}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{m}(\vec{p} \cdot \hat{m}) - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \right]$$

(ver discussão na Secção 4.1 do Jackson).

No uso da expressão acima, convenção-se que a integral de 1º termo num volume que contém o dipolo (que é mal definida devido à divergência em $\vec{r} = \vec{r}_0$) é NULA

Energia de uma distribuição de cargas num campo externo

Suponha que haja uma distribuição de cargas $\delta(\vec{r})$ em uma região em que há campos elétricos estáticos descritos por $\Phi_{ext}(\vec{r})$. Esses campos são devidos a outras cargas que não $\delta(\vec{r})$. Como vimos:

$$W = \int \delta(\vec{r}) \Phi_{ext}(\vec{r}) d^3x$$

Vamos expandir $\Phi_{ext}(\vec{r})$ em série de Taylor em torno de um ponto "no meio" da distribuição $\delta(\vec{r})$, que tomaremos como origem do sistema de coordenadas

$$\Phi_{ext}(\vec{r}) = \Phi(\vec{0}) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_{ext}(\vec{0})}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

Usando $\vec{E}_{ext} = -\vec{\nabla} \Phi_{ext}$:

$$\Phi_{ext}(\vec{r}) = \Phi_{ext}(\vec{0}) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{0}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_{ext,i}(0)}{\partial x_i} + \dots$$

A combinação $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{ext} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0$, pela

lei de Gauss. Portanto, se subtraímos o termo:

$$\frac{r^2}{6} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{ext}(0)$$

$$\Phi_{ext}(\vec{r}) = \Phi_{ext}(\vec{0}) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{0}) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{ext,i}(0)}{\partial x_i}$$

Levando na expressão para a energia:

$$W = q \Phi_{ext}(\vec{0}) - \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{0}) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial E_{ext,i}(0)}{\partial x_i}$$

que depende dos momentos de monopolo, dipolo e quadrupolo de $\vec{S}(\vec{r})$, até a ordem em que expandimos. Assim temos que a carga se acopla com o potencial, o dipolo com o campo elétrico e o quadrupolo com as derivadas de \vec{E} , para dar a energia.

O termo de quadrupolo é especialmente importante para os núcleos atômicos, pois esses possuem, muitas vezes, momentos de quadrupolo permanentes (devido à sua forma não esférica). Eles se acoplam aos gradientes de campo elétrico criados pela eletrons e núcleos da rede cristalina. Medidas de ressonância com radiações incidentes na faixa de rádio-freqüência permitem estudar os acoplamentos. Isto nos dá informações sobre a estrutura nuclear e sobre a estrutura eletrônica do material.

Finalmente, a energia de interação entre 2 dipolos ideais é facilmente obtida usando a expressão para o campo criado por um dipolo:

$$W_{12} = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - 3(\hat{n} \cdot \vec{P}_1)(\hat{n} \cdot \vec{P}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

Magnetostática:

O caso de campos magnéticos estáticos é descrito pelas seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

A segunda equação implica imediatamente que por consistência, ao termos o divergente da segunda equação:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Essa é a condição determinante das correntes estacionárias. Com apito, da eq. de continuidade da carga, em uma situação em que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \xrightarrow{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\right)}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (Corrente estacionária)

Fisicamente, isso diz que não há acúmulo de carga em nenhum lugar e a corrente percorre linhas fechadas de circuito ($\vec{\nabla} \times \vec{J} \neq 0$).

Da primeira equação, segue que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{já que } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Aqui também $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, embora a prova que ~~$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$~~ seja um pouco mais longa (ver Prob. 5.30 do Griffiths)

Levando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ na lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{J} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

A expressão $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ não determina \vec{A} univocamente. Realmente, se adicionarmos a \vec{A} o gradiente de qualquer função escalar, o campo \vec{B} permanece inalterado:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Psi) \quad \text{já que } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Psi = 0$$

Ou seja, \vec{B} é invariante sob a transformação:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi \quad ("Transformação de gauge")$$

Note que a liberdade de adicionar $\vec{\nabla} \Psi$ a \vec{A} representa uma arbitrariedade muito maior do que no caso da eletrostática, onde podíamos $\Phi \rightarrow \Phi + \text{const.}$

Essa liberdade nos permite especificar o divergente de \vec{A} , já que o $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ já está especificado! Pelo teorema de Helmholtz, a especificação do div e rot de um campo no espaço todo determina o campo unicamente, desde que todos caiam a zero suficientemente rapidamente quando $r \rightarrow \infty$.

Assim, vamos assumir que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{Gauge de Coulomb}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

que são 3 equações de Poisson, uma para cada componente Cartesiana de \vec{A} e \vec{J} . Portanto, a solução é:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

A indução magnética pode ser achada também:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \times \vec{J}(\vec{x}') d^3x' \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$

que é a lei de Biot-Savart. Se a corrente percorre um circuito com apessura desprezível, podemos escrever:

$$\vec{J}(\vec{x}') d^3x' \rightarrow I(\vec{x}') d\vec{e}'$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I(\vec{x}') d\vec{e}' \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

A força sobre um elemento de corrente é dada pela expressão de Lorentz, através de $d\vec{F} = \vec{J} d^3x = I d\vec{e}$

$$d\vec{F} = \vec{J} d^3x \times \vec{B} = I d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) d^3x = \int I(\vec{x}) d\vec{e} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Dados 2 circuitos de corrente uniforme I_1 e I_2 , a força que 1 sobre o outro devido ao campo de 2 é:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int I_1 d\vec{e}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}_1)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int d\vec{e}_1 \times \left[d\vec{e}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \right] / |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3$$

Chamando $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{x}_{12}$:

$$d\vec{e}_1 \times [d\vec{e}_2 \times \vec{x}_{12}] = (d\vec{e}_1 \cdot \vec{x}_{12}) d\vec{e}_2 - (d\vec{e}_1 \cdot d\vec{e}_2) \vec{x}_{12}$$

O primeiro termo gera a integral de caminho

$$\int d\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{x}_{12}}{x_{12}^3} = - \int d\vec{e}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \left[\frac{1}{x_{12}} \right]$$

Se o circuito é fechado, a circulação do gradiente é nula. Se o circuito se estender até o infinito, $\vec{x}_{12} \rightarrow 0$ nos extremos do circuito e também

obtemos zero. Assim:

$$\boxed{\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{e}_1 \cdot d\vec{e}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}$$

que é tal que $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, obedecendo à 3^a lei de Newton.

10 Primeiros termos da expansão multípolar para campos magnéticos estáticos

Vamos calcular $\vec{A}(\vec{x})$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

para uma distribuição localizada de correntes.
Expandindo:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \xrightarrow{|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|} \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + O\left(\frac{r'^2}{r^4}\right)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{x}') d^3x' + \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \int \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') d^3x' \right]$$

De:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{x}_i \vec{j}) = \vec{x}_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j_i \quad (i=1,2,3)$$

$$\Rightarrow \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{x}_i \vec{j}) d^3x' = \int \vec{x}_i \vec{j} \cdot \hat{n}' dS' = 0$$

$S \rightarrow \infty$

se $\vec{j}(\vec{x}')$ é localizada. Assim:

$$\int \vec{j}_i(\vec{x}') d^3x' = - \int \vec{x}_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x' = 0 \text{ já que } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} =$$

O primeiro termo, de monopolo magnético, é nulo porque não há contribuição de monopolo.

O segundo termo pode ser manipulado.

$$\int \vec{\nabla}^!(x_i^! x_j^! \vec{J}) d^3 x' = 0 = \int (x_i^! J_j + x_j^! J_i) d^3 x'$$

onde usamos novamente que $\vec{\nabla}^! \cdot \vec{J} = 0$ e que \vec{J} é localizada. Assim

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \int \vec{x}^! J_i d^3 x' &= \sum_j x_j \int x_j^! J_i d^3 x' \\ &= \frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x_j^! J_i - x_i^! J_j) d^3 x' \end{aligned}$$

Considere agora: (usando a convenção de que índices repetidos são somados)

$$\begin{aligned} [\vec{x} \times (\vec{x}^! \times \vec{J})]_i &= \epsilon^{ijk} x_j (\vec{x}^! \times \vec{J})_k \\ &= \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmk} x_j x_l^! J_m \end{aligned}$$

Usando que: $\epsilon^{ijk} \epsilon^{mlk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

$$\begin{aligned} [\vec{x} \times (\vec{x}^! \times \vec{J})]_i &= x_j x_i^! J_j - x_j x_j^! J_i \\ &= -x_j (x_j^! J_i - x_i^! J_j) \end{aligned}$$

Segue que:

$$\vec{x} \cdot \int \vec{x}^! J_i d^3 x' = -\frac{1}{2} \left[\vec{x} \times \int \vec{x}^! \times \vec{J}(\vec{x}^!) d^3 x' \right]_i$$

Se definirmos:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x}^! \times \vec{J}(\vec{x}^!) d^3 x'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^3}$$

onde se obtém:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{m}(\hat{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}}{r^3} \right] \text{ onde } \hat{m} = \frac{\vec{r}}{r}$$

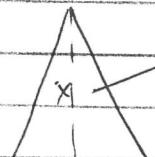
Note a semelhança com o campo elétrico de um dipolo. Assim como no caso do dipolo, é importante "corrigir" a expressão para garantir a não-ambiguidade ao se integrar \vec{B} em um volume que contém o dipolo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{m}(\hat{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right]$$

O momento magnético \vec{m} de um circuito fechado PLANO de corrente I é:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{X} \times d\vec{e}$$

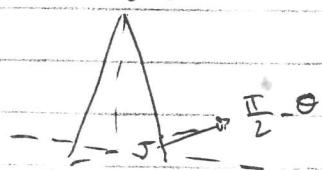
\vec{m} é perpendicular ao plano do circuito (segundo a regra da mão direita). Além disso:



$$dS = \frac{1}{2} |\vec{X} \times d\vec{e}| = \frac{1}{2} \times d\vec{e} \sin \theta$$

de

$$\Rightarrow |\vec{m}| = I \text{ Área do circuito} \equiv IA$$



$$\Rightarrow \vec{m} = IA \hat{u}$$

De maneira análoga ao caso eletrostática a energia de um dipolo magnético na presença de uma indução \vec{B} é:

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Não há termo em \vec{A} porque não há monopólos magnéticos.

Lei de Indução de Faraday

A expressão matemática da Lei de indução de Faraday é dada por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ela foi, historicamente, a primeira manifestação dinâmica do Electromagnetismo. Sua forma integral é importante. Integrando os dois lados sobre a superfície $S(c)$ (aberta), cuja borda orientada é C :

$$\int_{S(c)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, dS = - \int_{S(c)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \left[\int_{S(c)} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS \right] = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

onde Φ_B é o Fluxo magnético que "atrafessa" $S(c)$. A circulação do lado esquerdo, quando calculada no interior de um circuito, é conhecida como força eletromotriz:

$$E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

É interessante notar que a expressão integral também é válida para circuitos móveis (mas fixos no espaço), mas a origem física é outra (ver discussão de Griffiths, Cap. 7).

O sinal (-) acima (lei de Lenz) nos diz que a corrente induzida por E cria um campo B cujo fluxo tende a cancelar a variação de Φ_B .

Energia magnética

A energia armazenada em uma configuração estacionária de correntes pode ser calculada através do trabalho realizado para criá-la. Esse trabalho é realizado contra a força eletromotriz induzida pela variação de Φ_B , à medida que $\vec{J}(x)$ varia desde zero até seu valor final.

A força em uma carga q é dada pela lei de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B})$$

A força externa, oposta a essa, realiza trabalho a uma taxa:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{\omega} = -q(\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}) \cdot \vec{\omega} = -q\vec{E} \cdot \vec{\omega}$$

Lembrando que: $dq\vec{\omega} \cong I(x)dx \cong \vec{J}(x)dx$

$$\frac{dW}{dt} = - \int \vec{E} \cdot \vec{J} dx$$

Pela lei de Ampère:

$$\int \vec{E} \cdot \vec{J} dx = \frac{1}{\mu_0} \int \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dx$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int [\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})] dx$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \int \int (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} ds$$

Como a integração é sobre todo o espaço a integral de superfície é zero:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d^3x = \frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) d^3x$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3x \right]$$

$$\Rightarrow W = \boxed{\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3x}$$

que é análoga a $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int F^2 d^3x$ da eletrostática.

Podemos também escrever:

$$\int B^2 d^3x = \int \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d^3x = \int \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d^3x$$

$$= \mu_0 \int \vec{A} \cdot \vec{J} d^3x$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} d^3x}$$

que é análoga a $W = \frac{1}{2} \int g \Phi d^3x$.

Finalmente, de $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

$$\boxed{W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}') d^3x d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

que é análoga a $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{g(\vec{x}) g(\vec{x}') d^3x d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$.

Essa última expressão pode ser usada para definir indutância. Se houver N circuitos C_1, C_2, \dots, C_N , cada um com corrente I_1, I_2, \dots, I_N , respectivamente podemos escrever a energia total:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} M_{ij} I_i I_j$$

onde:

$$M_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_j} d^3x_j \frac{\bar{J}(\bar{x}_i) \cdot \bar{J}(\bar{x}_j)}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} = M_{ji}$$

("Indutância mútua") e

$$L_i = \frac{1}{I_i^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_i} d^3x'_i \frac{\bar{J}(\bar{x}_i) \cdot \bar{J}(\bar{x}'_i)}{|\bar{x}_i - \bar{x}'_i|}$$

("Auto-indutância")

No caso em que se podem desprezar as dimensões da seção reta do fio, podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{I_i I_j} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} d\bar{x}_i \int_{C_j} d\bar{x}_j \frac{I_i I_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} d\bar{x}_i \int_{C_j} d\bar{x}_j \frac{1}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} \end{aligned}$$

ℓ

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} d\bar{x}_i \int_{C_i} d\bar{x}'_i \frac{1}{|\bar{x}_i - \bar{x}'_i|}$$

Nesse último caso, deve-se tomar cuidado com a divergência quando $\bar{x}_i = \bar{x}'_i$.

Lembrando que o potencial vetorial devido ao circuito j na posição do circuito i é:

$$\vec{A}_j(\bar{x}_i) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \int_{C_j} \frac{d\bar{e}_j}{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}$$

segue que:

$$M_{ij} = \frac{1}{I_j} \int_{C_i} \vec{A}_j(\bar{x}_i) \cdot d\bar{e}_i = \frac{1}{I_j} \int_{S(C_i)} \vec{B}_{ij} \cdot \hat{n}_i dS_i$$

$$\Rightarrow M_{ij} = \frac{1}{I_j} \Phi_{Bij}$$

onde Φ_{Bij} é o fluxo magnético através do circuito i devido ao circuito j . Analogamente:

$$L_i = \frac{1}{I_i} \Phi_{Bii}$$