FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

1º Semestre de 2025

22/04/2025

Aula 15

Aula passada

Hamiltoniano: $H = H_0 + H_1$

Versão de interação

Estados: $|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t}|\Psi_S(t)\rangle$

Operadores: $O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}$

Se H_0 é quadrático, os operadores têm dinâmica simples:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{q}} \Rightarrow c_{\mathbf{q}I}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{q}} t} c_{\mathbf{q}}$$

$$\mathcal{O}_I(t) = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} O(\mathbf{k},\mathbf{q})\, c_{\mathbf{k}I}^\dagger(t)\, c_{\mathbf{q}I}(t)$$

Aula passada

Os estados têm dinâmica complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \tilde{U}(t,t_0)\,|\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\partial_t \tilde{U}(t,t_0) = H_{1I}(t)\,\tilde{U}(t,t_0)$$

O operador evolução temporal permite uma expansão perturbativa em H_1

$$\tilde{U}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots dt_n T\left[H_{1I}(t_1)\ldots H_{1I}(t_n)\right]$$

Teorema de Gell-Mann e Low

(Fetter & Walecka, Seção 6)

$$H = H_0 + e^{-\eta|t|} H_1 \quad \left(\eta \to 0^+\right)$$

Seja um autoestado de H_0: $\quad H_0 \left|\Phi_0\right\rangle = E_0 \left|\Phi_0\right\rangle$

Se o seguinte limite existe $\displaystyle \lim_{\eta \to 0^+} \frac{\tilde{U}_\eta\left(0, \pm\infty\right)\left|\Phi_0\right\rangle}{\left\langle\Phi_0\right| \tilde{U}_\eta\left(0, \pm\infty\right)\left|\Phi_0\right\rangle}$

então ele é $\boxed{\dfrac{\left|\Psi_0\right\rangle}{\left\langle\Phi_0|\Psi_0\right\rangle}}$ onde $\boxed{H\left(\dfrac{\left|\Psi_0\right\rangle}{\left\langle\Phi_0|\Psi_0\right\rangle}\right) = E\left(\dfrac{\left|\Psi_0\right\rangle}{\left\langle\Phi_0|\Psi_0\right\rangle}\right)}$

1. Nas aplicações tomaremos $|\Phi_0>$ como o estado fundamental não interagente e suporemos que $|\Psi_0>$ é o estado fundamental interagente.
2. Isso nem sempre é verdade, pode ser um estado excitado! Por exemplo, se $|\Phi_0>$ e $|\Psi_0>$ têm simetrias diferentes.
3. Também há problemas se o estado não é $|\Psi_0>$ perturbativamente acessível a partir de $|\Phi_0>$.
4. Também há ambiguidades se o estado $|\Phi_0>$ é degenerado.

Identidade útil

$$O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t} \Rightarrow O_S = e^{-iH_0 t} O_I(t) e^{iH_0 t}$$

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt} = e^{iHt} e^{-iH_0 t} O_I(t) e^{iH_0 t} e^{-iHt}$$

Mas: $\tilde{U}(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}$

$$\boxed{O_H(t) = \tilde{U}(0, t) O_I(t) \tilde{U}(t, 0)}$$

A função de Green em termos de U

$$i G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{r}_1 t_1; \vec{r}_2 t_2) = \frac{\langle \Phi_0 | T\left[\psi^H_{\alpha_1}(\vec{r}_1, t_1)\, \psi^{H\dagger}_{\alpha_2}(\vec{r}_2 t_2)\right] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle}$$

$\Rightarrow (\alpha_1, \vec{r}_1, t_1) \to 1$

$(\alpha_2, \vec{r}_2, t_2) \to 2$

$$\Rightarrow i G(1,2) = \frac{\langle \Phi_0 | T[\psi_{1H}, \psi^\dagger_{2H}] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle} = (*)$$

G-M-L:

$$\frac{\tilde{U}_n(0, \pm\infty) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \tilde{U}_n(0, \pm\infty) | \Phi_0 \rangle} = \frac{| \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle}$$

ASSUMINDO $t_1 > t_2$ ($t_1 < t_2$ É ANÁLOGO):

$$(*) = \frac{\langle \Phi_0 | \tilde{U}(+\infty, 0)\, \psi_{1H}\, \psi^\dagger_{2H}\, \tilde{U}(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \underbrace{\tilde{U}(+\infty, 0)\, \tilde{U}(0, -\infty)}_{\tilde{U}(+\infty, -\infty)} | \Phi_0 \rangle} \to N$$

$$N = \langle \Phi_0 | \underbrace{\tilde{U}(+\infty, 0)\, \tilde{U}(0, t_1)}_{\tilde{U}(+\infty, t_1)}\, \psi_{1I}\, \underbrace{\tilde{U}(t_1, 0)\, \tilde{U}(0, t_2)}_{\tilde{U}(t_1, t_2)}\, \psi^\dagger_{2I}\, \underbrace{\tilde{U}(t_2, 0)\, \tilde{U}(0, -\infty)}_{\tilde{U}(t_2, -\infty)} | \Phi_0 \rangle$$

$$i\,G(1,2) = \frac{\langle \Phi_0 | \tilde{U}(+\infty, t_1)\, \psi_{1I}\, \tilde{U}(t_1, t_2)\, \psi^{+}_{2I}\, \tilde{U}(t_2, +\infty) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \tilde{U}(+\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle}$$

F+W; p. 84

$$= \frac{\langle \Phi_0 | T[\tilde{U}(+\infty, -\infty)\, \psi_{1I}\, \psi^{+}_{2I}] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | T[\tilde{U}(+\infty, -\infty)] | \Phi_0 \rangle}$$

USANDO A SÉRIE PERTURBATIVA PARA $\tilde{U}(+\infty, -\infty)$ EM PRINCÍPIO TEMOS $G(1,2)$ ORDEM A ORDEM EM TEORIA DE PERTURBAÇÃO.

TERMO GENÉRICO:

$$\langle \Phi_0 | T[H_{1I}(t_1') \cdots H_{1I}(t_n')\, \psi_{1I}\, \psi^{+}_{2I}] | \Phi_0 \rangle$$

$$H_{1I}(t_1') = \iint \cdots \psi^{+}_{\alpha_{1I}}(\bar{r}_1, t_1')\, \psi^{+}_{\alpha_{2I}}(\bar{r}_2, t_1')\, \psi_{\alpha_{2I}}(\bar{r}_2, t_1')\, \psi_{\alpha_{1I}}(\bar{r}_1, t_1')$$

UMA SEQUÊNCIA DE OPERADORES DE CRIAÇÃO E DESTRUIÇÃO NA VERSÃO DE INTERAÇÃO, NO EST. FUNDAMENTAL $\bar{N}$ - INTERAGENTE

Forma útil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 H_{1I}(t_3) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\int d^3r_3 d^3r_4 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 U(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4)\,\psi^\dagger_{\alpha I}(\mathbf{r}_3,t_3)\,\psi^\dagger_{\beta I}(\mathbf{r}_4,t_3)\,\psi_{\beta I}(\mathbf{r}_4,t_3)\,\psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3,t_3)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\int d^3r_3 d^3r_4 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{dt_4 U(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4)\,\delta(t_3-t_4)}^{U_{34}}\,\psi^\dagger_{\alpha I}(\mathbf{r}_3,t_3)\,\psi^\dagger_{\beta I}(\mathbf{r}_4,t_4)\,\psi_{\beta I}(\mathbf{r}_4,t_4)\,\psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3,t_3)$$

$$\sum_{\alpha_3}\int d^3r_3 \int dt_3 \longrightarrow \int d3$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 H_{1I}(t_3) = \frac{1}{2}\int d3 \int d4 U_{34}\psi_3^\dagger\psi_4^\dagger\psi_4\psi_3}$$

$$\langle \Phi_0 | T\Big[\underbrace{\psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3}_{H_1} \underbrace{\psi_5^\dagger \psi_6^\dagger \psi_6 \psi_5}_{H_1} \cdots \psi_1 \psi_2^\dagger \Big] | \Phi_0 \rangle$$

Teorema de Wick

Teorema de Wick: O valor esperado no estado fundamental não-interagente de uma sequência de operadores de criação e destruição na versão de interação é dado pela soma de todas as contrações possíveis de pares, onde cada termo tem o sinal de +1 (-1) de acordo com o número de transposições necessárias de operadores fermiônicos para ir da ordem inicial até a ordem final ser par (ímpar).

Cada contração de um operador de destruição com um operador de criação (nessa ordem) é igual à i x função de Green não-interagente.

$$\psi_1 \psi_2^\dagger = i G^{(0)}(1,2)$$

$$\psi_2^\dagger \psi_1 = -i G^{(0)}(1,2)$$

ORDEM ZERO: $\langle \Phi_0 | T[\psi_1 \psi_2^\dagger] | \Phi_0 \rangle = i\, G^{(0)}(1,2)$

PRIMEIRA ORDEM:

$$\langle T[\psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3 \psi_1 \psi_2^\dagger] \rangle \,, \quad \langle T[\psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3 \psi_1 \psi_2^\dagger] \rangle$$

$$\langle T[\psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3 \psi_1 \psi_2^\dagger] \rangle$$

$$= i G^{(0)}(1,2) \left[i\, G^{(0)}(3,4)\, (-i)\, G^{(0)}(4,3) - i\, G^{(0)}_{44}\, (-i)\, G^{(0)}_{33} \right]$$

$$i G^{(0)}_{13} \left[i G^{(0)}_{42}\, (-i)\, G^{(0)}_{34} - i\, G^{(0)}_{44}\, i\, G^{(0)}_{32} \right]$$

$$-i G^{(0)}_{14} \left[+i\, G^{(0)}_{33}\, i\, G^{(0)}_{42} + i\, G^{(0)}_{32}\, (-i)\, G^{(0)}_{43} \right]$$

$$i G^{(1)}_{12} = \frac{1}{2} \int d4\, d3\, U_{34} \Big[G^{(0)}_{12} \left(G^{(0)}_{43} G^{(0)}_{34} - G^{(0)}_{33} G^{(0)}_{44} \right) + G^{(0)}_{13} \left(G^{(0)}_{44} G^{(0)}_{32} - G^{(0)}_{42} G^{(0)}_{34} \right) +$$

$$+ G^{(0)}_{14} \left(G^{(0)}_{42} G^{(0)}_{33} - G^{(0)}_{43} G^{(0)}_{32} \right) \Big]$$

(i) HÁ CONTRAÇÕES COM TEMPOS IGUAIS, MAS ISSO É AMBÍGUO NA FUNÇÃO DE GREEN. NO ENTANTO, ESSAS CONTRAÇÕES SÓ ENVOLVEM TEMPOS "INTERNOS" AOS TERMOS H_{1I}. NELES, OS OPS. DE CRIAÇÃO <u>SEMPRE</u> VÊM À ESQUERDA DOS DE DESTRUIÇÃO. PORTANTO:

$$iG^{(0)}_{33} = \langle T[\psi_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3)\psi^{\dagger}_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3)]\rangle = \langle T[\psi_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3)\psi^{\dagger}_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3+\eta)]\rangle$$

$$= -\langle \Phi_0 | \psi^{\dagger}_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3)\psi_{\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3) | \Phi_0\rangle = -\langle \Phi_0 | \psi^{\dagger}_{\alpha_3}(\vec{r}_3)\psi_{\alpha_3}(\vec{r}_3) | \Phi_0\rangle$$

$$= -\frac{n^{(0)}}{2} = -\frac{N}{2V}$$

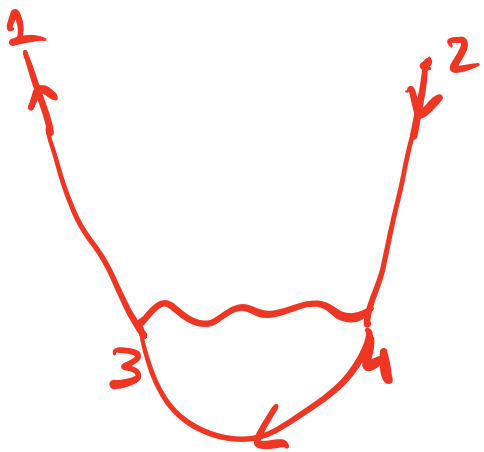
$$\Rightarrow iG^{(0)}_{33} \longrightarrow iG^{(0)}_{\alpha_3\alpha_3}(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_3, t_3+\eta)$$

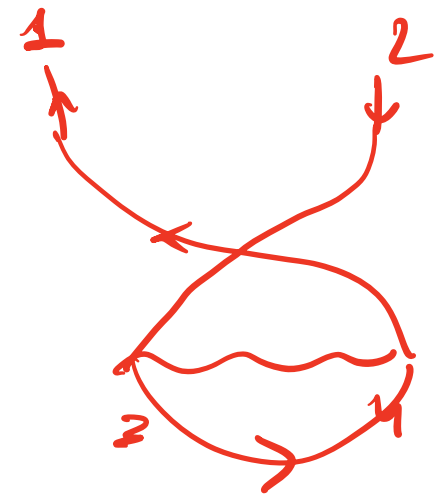
$$\Rightarrow iG^{(0)}_{33} = -\frac{n^{(0)}}{2} \Rightarrow \boxed{G^{(0)}_{33} = i\frac{n^{(0)}}{2}}$$

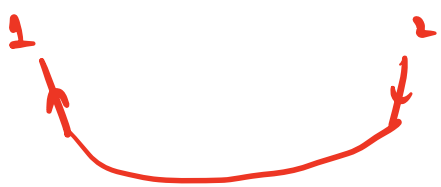
(ii) PARA OS TERMOS EM QUE ÍNDICES EXTERNOS (1, 2) MISTURAM-SE COM ÍNDICES EXTERNOS (3, 4), A TROCA $3 \rightleftarrows 4$ (VARIÁVEIS MUDAS) MOSTRA QUE OS TERMOS SÃO IGUAIS DOIS A DOIS. PODEMOS MANTER UM SÓ E IGNORAR O FATOR DE $1/2$. ISSO VALE EM TODAS AS ORDENS SUPERIORES EM H_{2I}.

$$iG^{(1)}_{12} = \frac{1}{2}\int d4\, d3\, U_{34}\Big[G^{(0)}_{12}\left(G^{(0)}_{43}G^{(0)}_{34} - G^{(0)}_{33}G^{(0)}_{44}\right) + G^{(0)}_{13}\left(G^{(0)}_{44}G^{(0)}_{32} - G^{(0)}_{42}G^{(0)}_{34}\right) +$$

$$+ G^{(0)}_{14}\left(G^{(0)}_{42}G^{(0)}_{33} - G^{(0)}_{43}G^{(0)}_{32}\right)\Big]$$

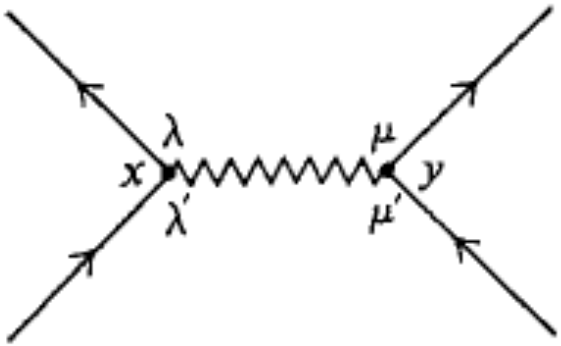






Elementos gráficos dos diagramas

$$iG^{(0)}_{\alpha\beta}(x,y) = \left\langle T\left[\psi_{\alpha I}(x)\,\psi^{\dagger}_{\beta I}(y)\right]\right\rangle_0$$

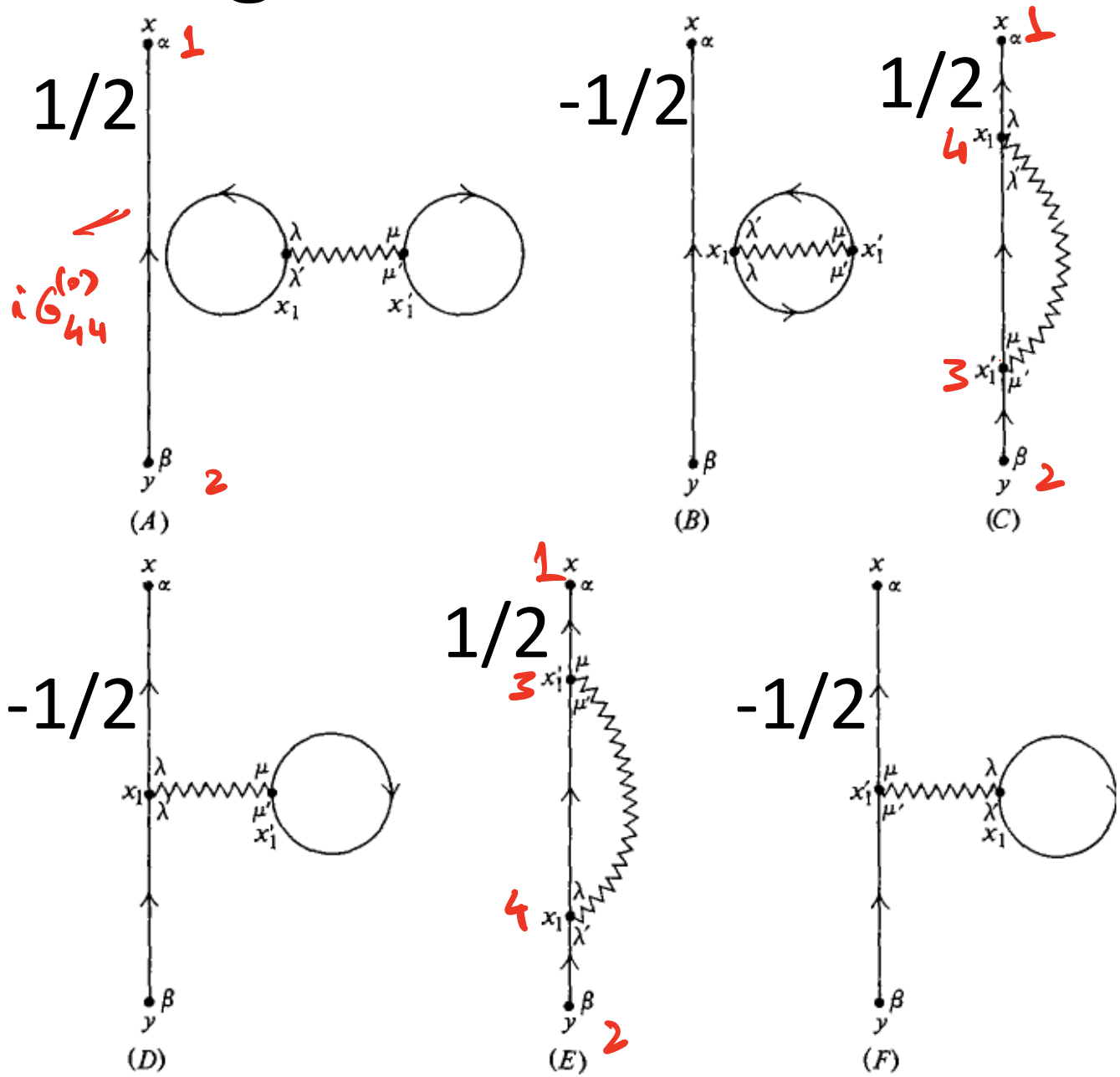


$$-iU(x,y)\,\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\mu,\mu'}$$

Diagramas de 1a. ordem

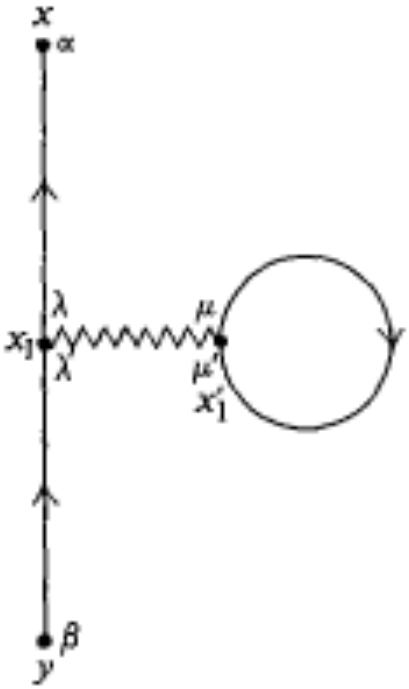
$-iU_{34}$

$iG^{(0)}_{12}$ $iG^{(0)}_{33}$ $iG^{(0)}_{44}$

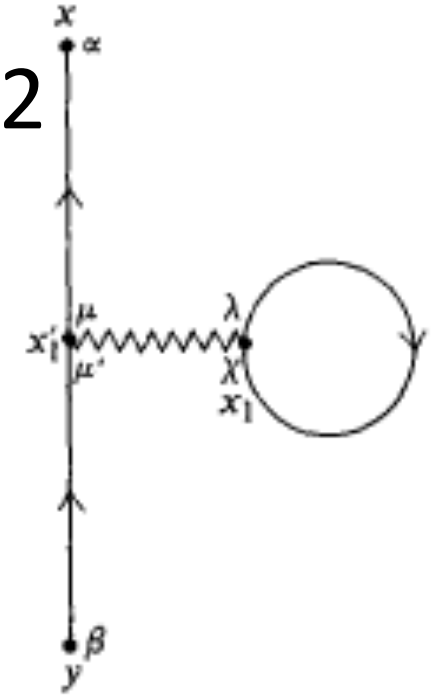


Diagramas de 1a. ordem

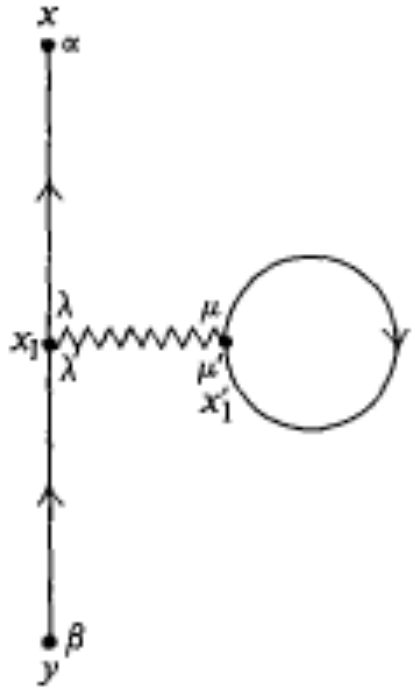
-1/2



-1/2



-1



Diagramas de 1a. ordem

1/2

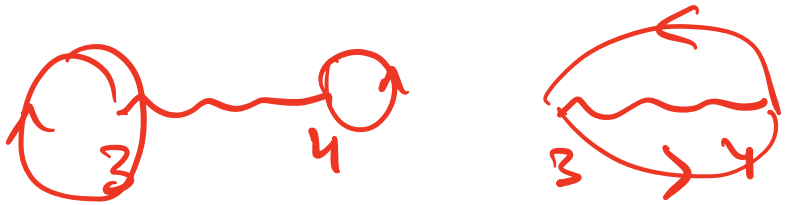
1/2

O denonimador

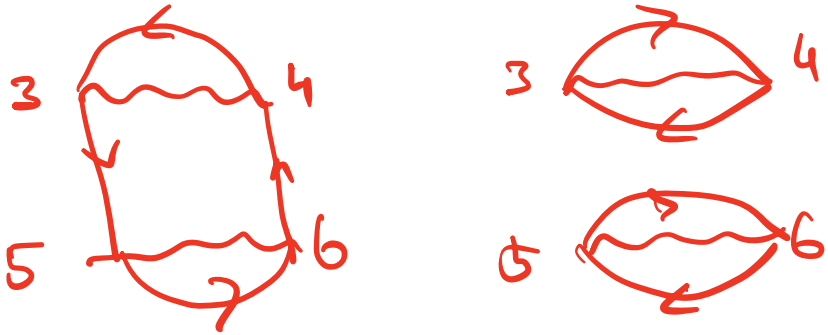
$$D = \langle \Phi_0 | T \Big[\underbrace{\psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3}_{H_1} \underbrace{\psi_5^\dagger \psi_6^\dagger \psi_6 \psi_5}_{H_1} \cdots \Big] | \Phi_0 \rangle$$

0ª ORDEM: 1

1ª ORDEM:



2ª ORDEM:

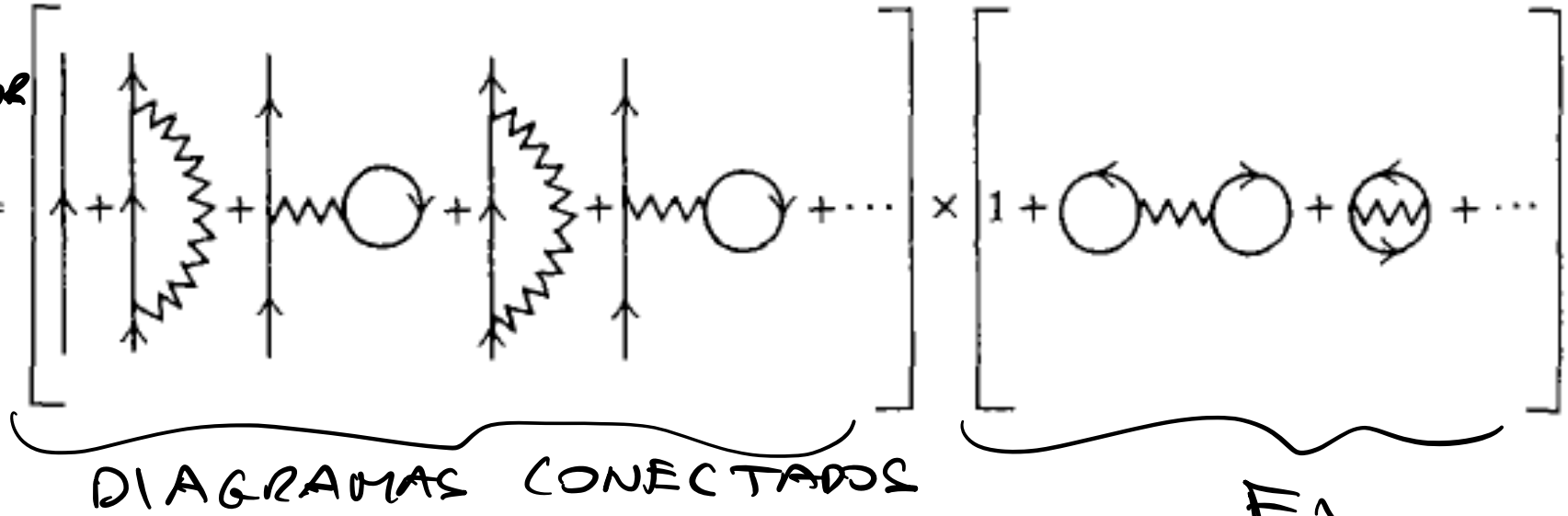


+ . . . . .

Os diagramas desconectados

NUMERADOR

$= \tilde{G}_{\alpha\beta}(x,y) =$

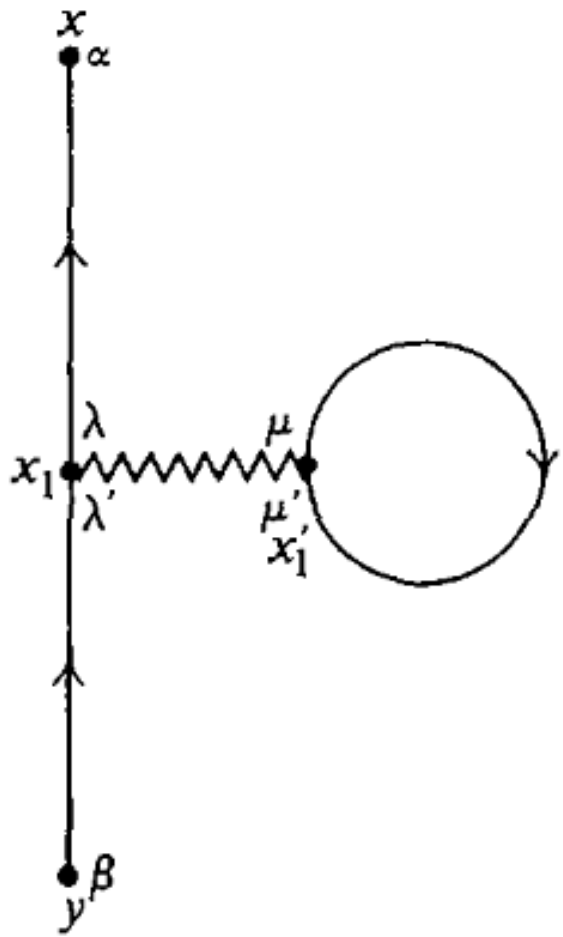


$D = \langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle = 1 +$

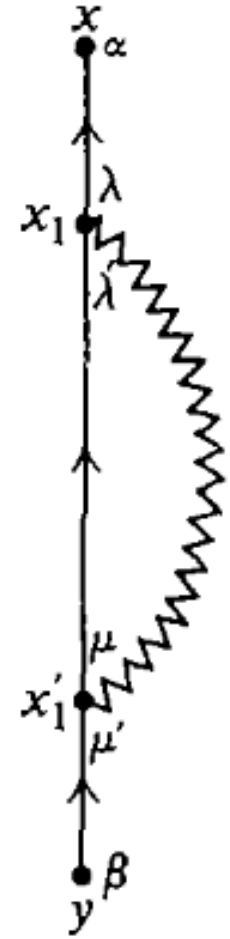
TEOREMA: $F1 = D$ (F+W: p. 95-96)

$\Rightarrow$ BASTA CALCULAR OS DIAGRAMAS CONECTADOS.

Diagramas em 1a. ordem



(a)



(b)