

FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023

28/09/2023

Aula 16

Aulas passadas

Hamiltoniano: $H = H_0 + H_1$

Versão de interação $\left\{ \begin{array}{l} \text{Estados: } |\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi_S(t)\rangle \\ \text{Operadores: } O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t} \end{array} \right.$

Se H_0 é quadrático, os **operadores** têm dinâmica simples:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{q}} \Rightarrow c_{\mathbf{q}I}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{q}} t} c_{\mathbf{q}}$$
$$O_I(t) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} O(\mathbf{k}, \mathbf{q}) c_{\mathbf{k}I}^{\dagger}(t) c_{\mathbf{q}I}(t)$$

Aulas passadas

Os **estados** têm dinâmica complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \tilde{U}(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\partial_t \tilde{U}(t, t_0) = H_{1I}(t) \tilde{U}(t, t_0)$$

O operador evolução temporal permite uma **expansão perturbativa em H_1**

$$\tilde{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T [H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)]$$

Teorema de Gell-Mann e Low

(Fetter & Walecka, Seção 6)

$$H = H_0 + e^{-\eta|t|} H_1 \quad (\eta \rightarrow 0^+)$$

Seja um autoestado de H_0 : $H_0 |\Phi_0\rangle = E_0 |\Phi_0\rangle$

Se o seguinte limite existe $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}_\eta(0, \pm\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \tilde{U}_\eta(0, \pm\infty) | \Phi_0 \rangle}$

então ele é $\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle}$ onde $H \left(\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \right) = E \left(\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \right)$

Aula passada

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 H_{1I}(t_3) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3r_3 d^3r_4 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \psi_{\alpha I}^\dagger(\mathbf{r}_3, t_3) \psi_{\beta I}^\dagger(\mathbf{r}_4, t_3) \psi_{\beta I}(\mathbf{r}_4, t_3) \psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3, t_3) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3r_3 d^3r_4 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_4 U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \delta(t_3 - t_4) \psi_{\alpha I}^\dagger(\mathbf{r}_3, t_3) \psi_{\beta I}^\dagger(\mathbf{r}_4, t_4) \psi_{\beta I}(\mathbf{r}_4, t_4) \psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3, t_3)\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 H_{1I}(t_3) = \frac{1}{2} \int d^3 \int d^4 U_{34} \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3$$

Aula passada

$$iG_{12} = \frac{\langle T [\tilde{U} (+\infty, -\infty) \psi_{I1} \psi_{I2}^\dagger] \rangle_0}{\langle \tilde{U} (+\infty, -\infty) \rangle_0}$$

$$\langle T [\tilde{U} (+\infty, -\infty) \psi_{I1} \psi_{I2}^\dagger] \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \langle T [H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \psi_{I1} \psi_{I2}^\dagger] \rangle_0$$

$$\langle T [\tilde{U} (+\infty, -\infty)] \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \langle T [H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)] \rangle_0$$

NUMERA DO 000:

$$n=0: \langle T [\psi_1 \psi_2^\dagger] \rangle = iG_{12}^{(0)}$$

Teorema de Wick

Teorema de Wick: O valor esperado no estado fundamental **não-interagente** de uma sequência de operadores de criação e destruição na versão de interação é dado pela **soma de todas as contrações possíveis de pares**, onde cada termo tem o sinal de **+1 (-1)** de acordo com o número de transposições necessárias de operadores fermiônicos para ir da ordem inicial até a ordem final ser **par (ímpar)**.

Cada contração de um operador de destruição com um operador de criação (nessa ordem) é igual à função de Green não-interagente.

Aula passada

Regras de diagramas já vistas:

1. Contrações com tempos iguais são sempre dadas por

$$iG_{33}^{(0)} \equiv \lim_{t'_3 \rightarrow t_3^+} \left\langle T \left[\psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3, t_3) \psi_{\alpha I}^\dagger(\mathbf{r}_3, t'_3) \right] \right\rangle_0 = \frac{1}{2} n.$$

2. Devido à integração simétrica sobre as variáveis internas de H_{1I} , não distinguimos diagramas com intercâmbio de variáveis 3 e 4 (os vértices das “cobrinhas”) e suprimimos o fator de 1/2.

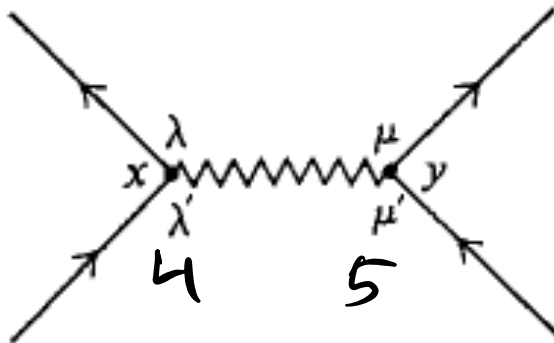
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 H_{1I}(t_3) = \frac{1}{2} \int d^3 \int d^4 U_{34} \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3$$

Aula passada



$$\longrightarrow iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) = \langle T [\psi_{\alpha I}(x) \psi_{\beta I}^\dagger(y)] \rangle_0$$

$$\longrightarrow iG_{43}^{(0)}$$

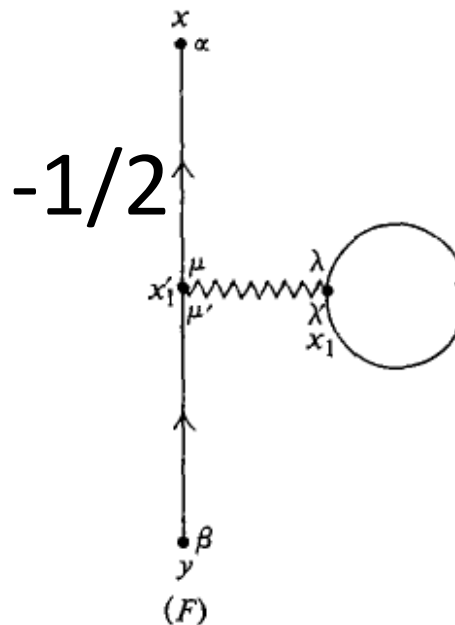
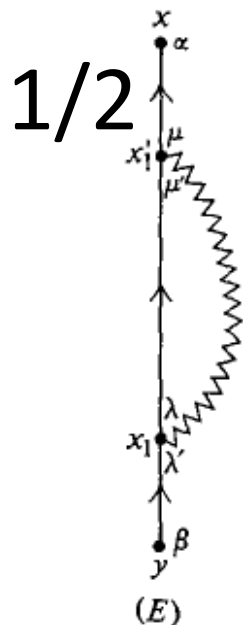
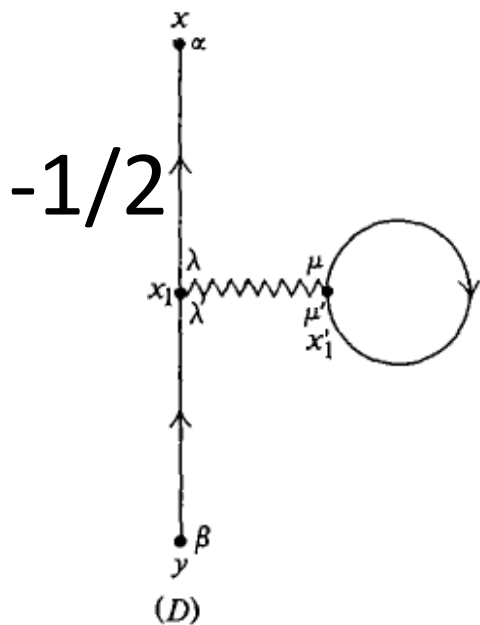
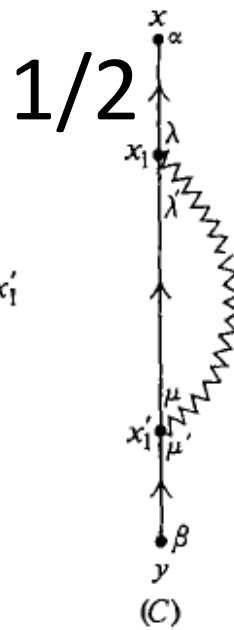
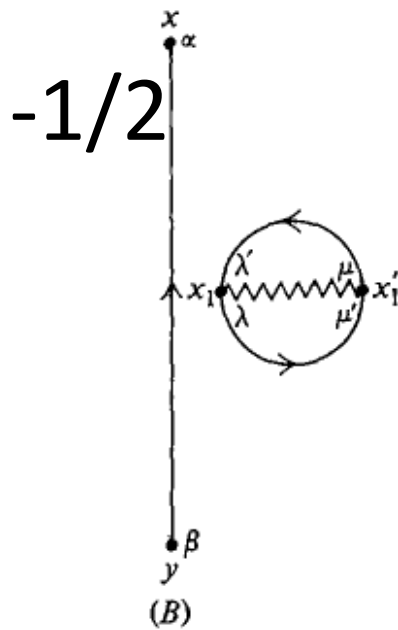
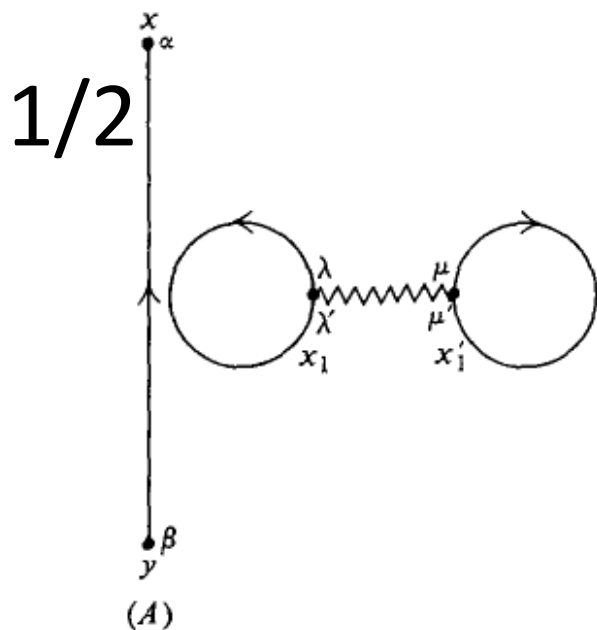


$$\longrightarrow -iU(x, y) \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\mu, \mu'}$$

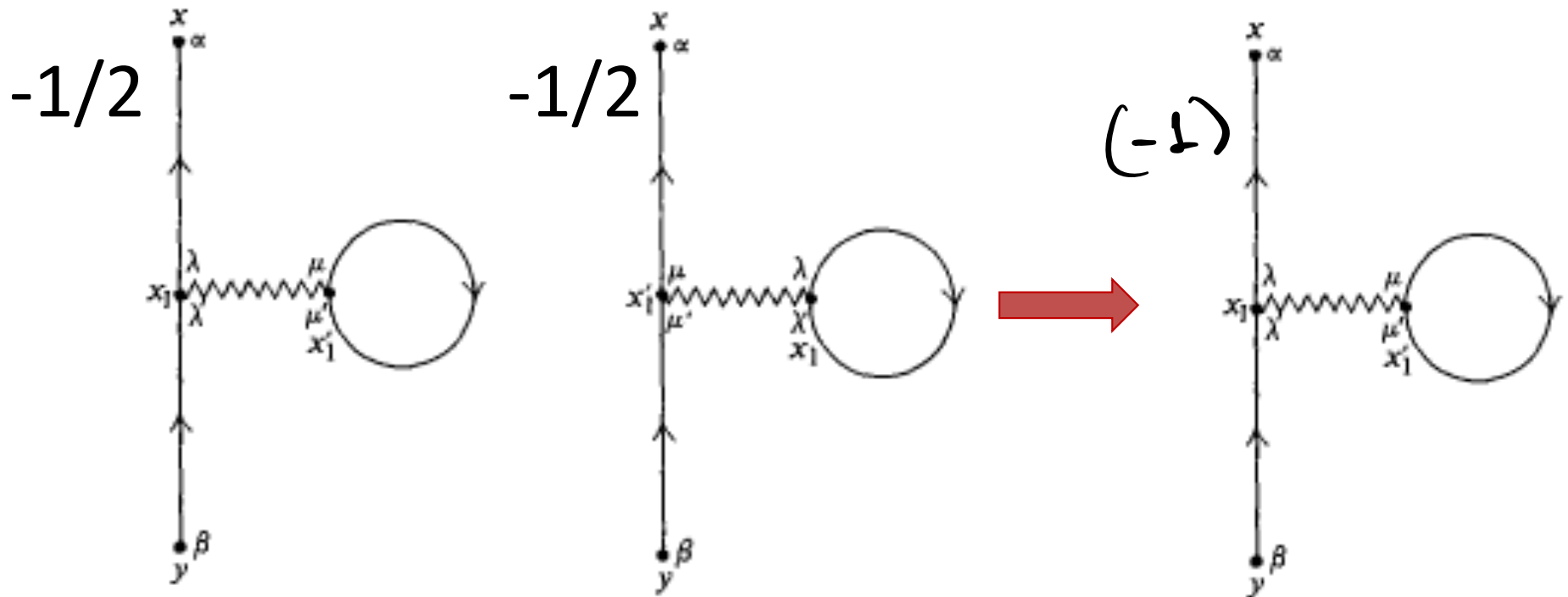
$$\longrightarrow -iU_{45}$$

NUMERADOR: ORDEM $n = 1$

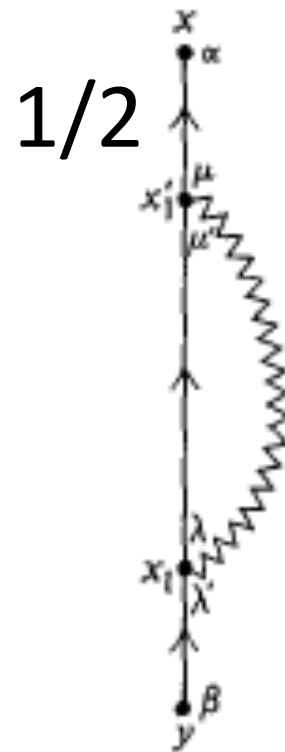
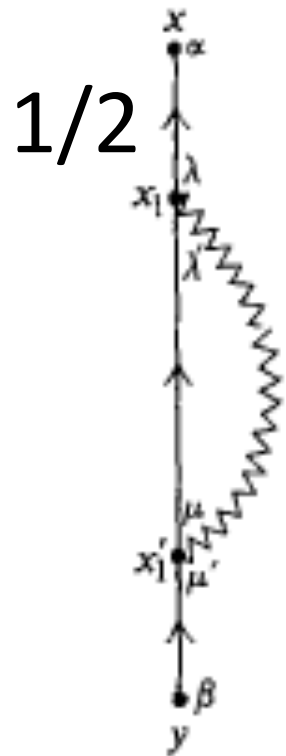
Aula passada



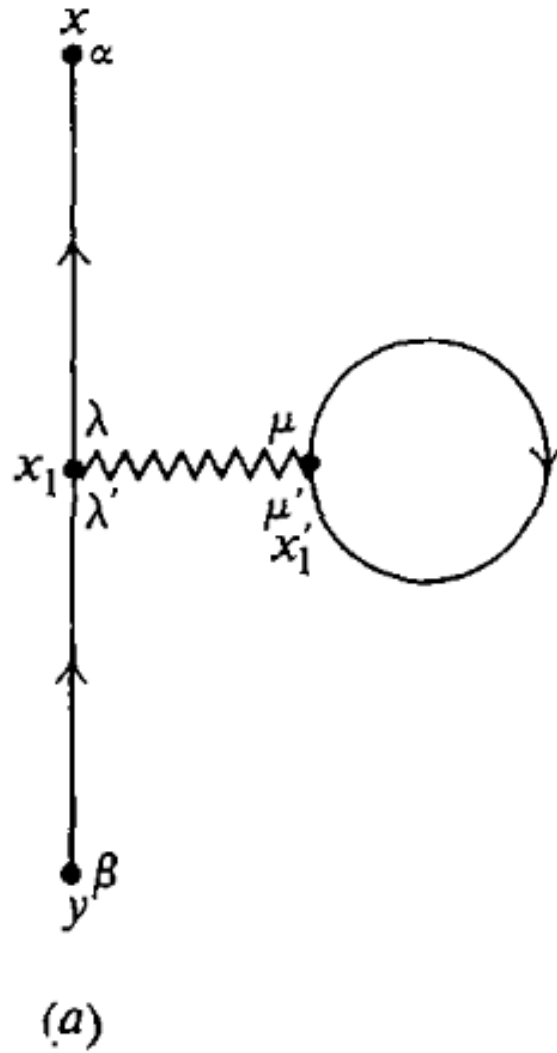
Aula passada



Aula passada



Diagramas em 1a. ordem



Regra do sinal

O SINAL GLOBAL É $(-1)^F$, ONDE F É O NÚMERO DE "LOOPS" FERMIÔNICOS.

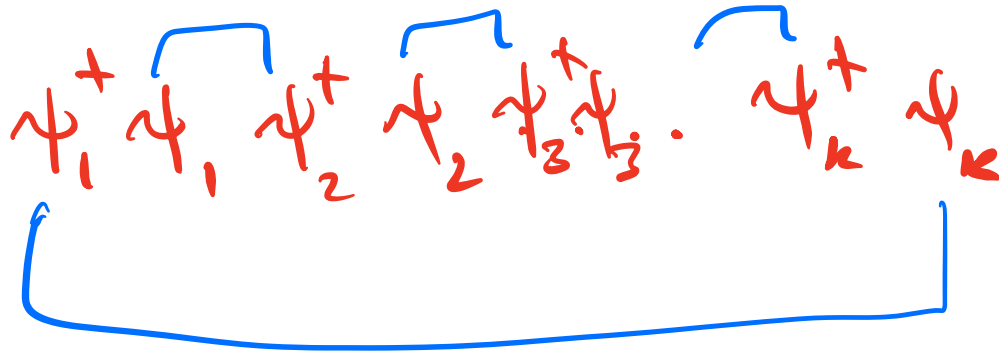
QUALQUER "LOOP" FERMIÔNICO

CORRESPONDE A CONTRAÇÕES ENTRE

VARIÁVEIS INTERNAS, PERTENCENTES A UM

OU MAIS

H_{12} :

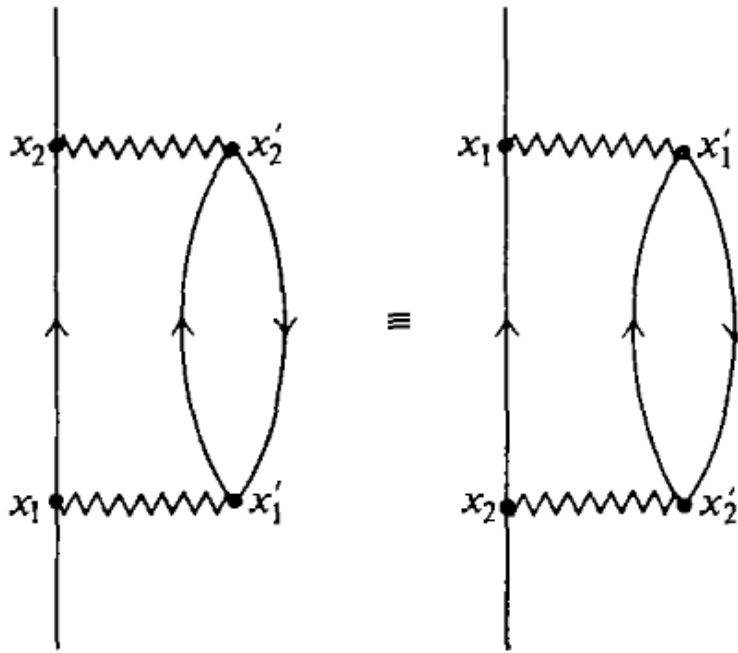


$$\int d^3 \int d^4 U_{34} \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger \psi_4 \psi_3$$

→ SINAL É (-1)

TODO LOOP TEM A ESTRUTURA ACIMA

O fator $1/(n!)$



EM ORDEM 2 E SUPERIOR APARECEM DIAGRAMAS, COMO OS AO LADO, QUE DIFEREM ENTRE SI APENAS PELA TROCA DOS PARES DE VARIÁVEIS NAS EXTREMIDADES DAS "COBRINHAS".

PARA m COBRINHAS, HÁ $(m!)$ PERMUTAÇÕES DE PARES DE EXTREMIDADES, QUE DÃO ORIGEM A TERMOS NUMERICAMENTE IDÊNTICOS.

REGRA: DESENHE UM SÓ E ELIMINE O FATOR $\frac{1}{m!}$.

Regras dos diagramas em ordem n

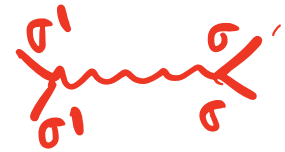
1. Desenhe todos os diagramas conectados topologicamente distintos, começando no ponto do espaço-tempo (mais spin) y e terminando em x , com $2n+1$ funções de Green (linhas contínuas orientadas) e n linhas de interação (“cobrinhas”).
2. Cada extremidade de uma “cobrinha” (vértice) é rotulado por um ponto no espaço-tempo (mais spin) (x_3, x_4, x_5, \dots) . A cada “cobrinha” com extremidades em (x_3, x_4) é associada a interação $-iU(x_3, x_4)$. $\hat{=} -i U_{34}$
3. Cada linha contínua começa em y e termina em x . A ela é associada a função de Green $iG^{(0)}(x,y)$.

Regras dos diagramas em ordem n

4. Integre/Some sobre todos os pontos internos (x_3, x_4, x_5, \dots) (incluindo spin).

$$\rightarrow G_{\alpha\beta}^{(0)} = \delta_{\alpha\beta} G^{(0)}$$

5. Conserve spin em cada função de Green e em cada vértice (para interações que conservam o spin no vértice).



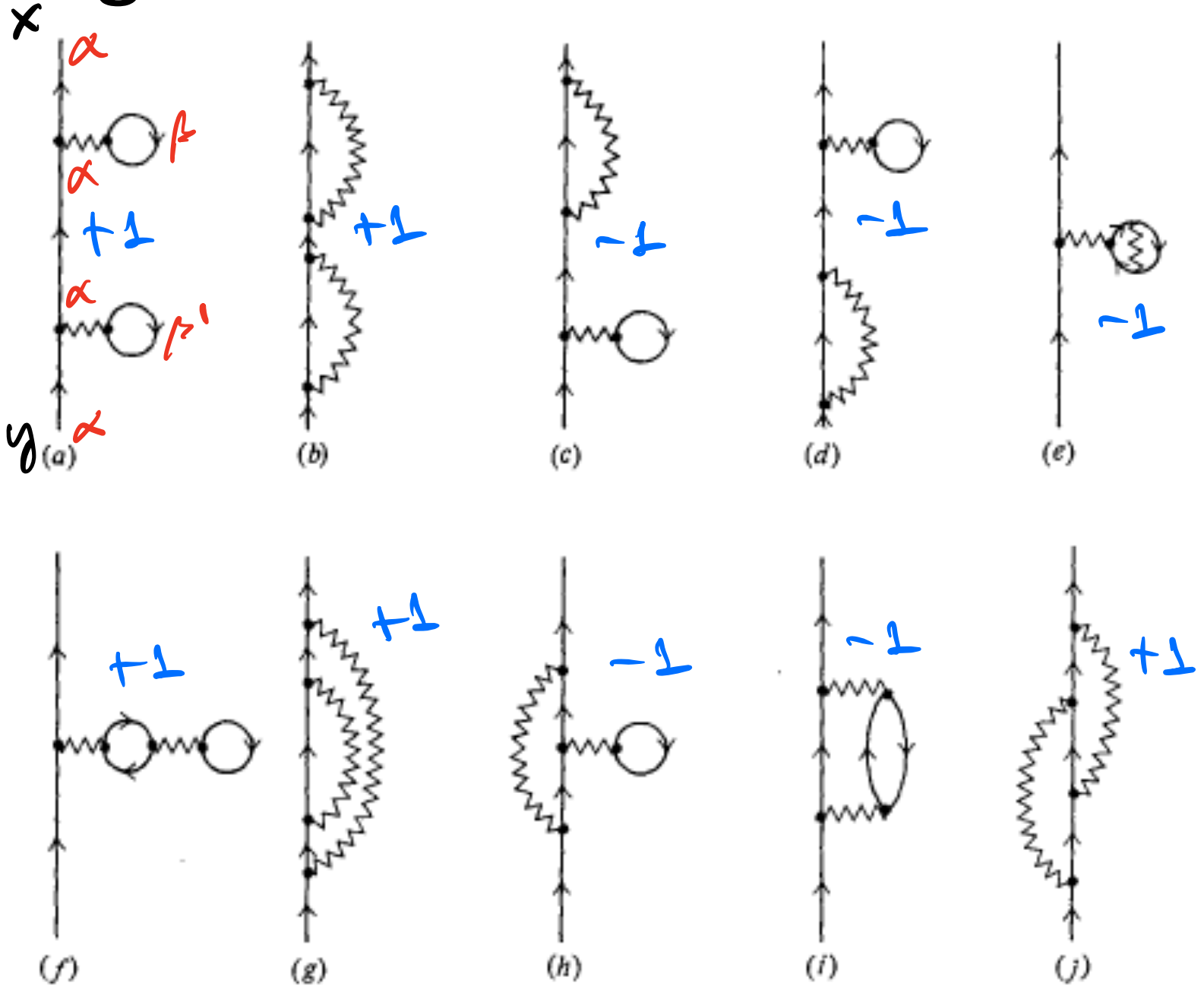
6. Multiplique o diagrama por $(-1)^L$, onde L é o número de “loops” fechados fermiônicos.

7. Caso haja funções de Green com tempos iguais, a regra a ser usada é

$$iG_{33} \equiv \lim_{t'_3 \rightarrow t_3^+} \langle T [\psi_{\alpha I}(\mathbf{r}_3, t_3) \psi_{\alpha I}^\dagger(\mathbf{r}_3, t'_3)] \rangle_0 = \frac{1}{2}n.$$

Diagramas em 2a. ordem

Quais são os sinais?



Diagramas no espaço k, ω

DEFINIÇÕES: $G(x) \equiv G(\vec{x}_1, -\vec{x}_2; t_1, -t_2) = G(\vec{R}, T) =$

$$= \int e^{-iPx} G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

$$G(p) = \int d^4 x e^{iPx} G(x)$$

ONDE: $P \equiv (\vec{k}, \omega)$

$$Px \equiv \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$d^4 p = d^3 k d\omega$$

$$d^4 x = d^3 R dT$$

$$U(x) = U(\vec{x}) \delta(t) = \int U(q) e^{-iqx} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

$$q = (\vec{q}, \nu)$$

$$x = (\vec{x}, t)$$

$$U(q) = \int d^4 x e^{iqx} U(x) = \int d^3 x dt e^{i\nu t} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} U(\vec{x}) \delta(t)$$

$$U(\vec{q}, \nu)$$

$$= \int d^3 x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} U(\vec{x}) \equiv U(\vec{q}) \rightarrow \text{NÃO DEPENDE DE } \underline{\nu}$$



$$= (i)^3 (-i) \int d^3 d^4 U_{34} G_{32}^{(0)} G_{43}^{(0)} G_{34}^{(0)} =$$

$$= - \int d^3 \vec{x}_3 dt_3 d^3 \vec{x}_4 dt_4 U(\vec{x}_3 - \vec{x}_4) \delta(t_3 - t_4) G^{(0)}(x_3 - x_2)$$

$$G^{(0)}(x_4 - x_3) G^{(0)}(x_1 - x_4) =$$

$$\underbrace{t_3 \rightarrow t_4 + \eta}$$

$$U_{34} = U(\vec{x}_3 - \vec{x}_4) \delta(t_3 - t_4)$$

$$= - \int d^4 x_3 d^4 x_4 \int \frac{d^4 q d^4 k d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^6} e^{-iq(x_3 - x_4)} e^{-ik(x_3 - x_2)} e^{-ip(x_4 - x_3)} e^{-ip'(x_1 - x_4)} U(q) G^{(0)}(k) G^{(0)}(p) G^{(0)}(p')$$

$e^{-i\omega p(t_4 - t_3)} = e^{i\omega p \eta}$

$$\int d^4 x_3 e^{i x_3 (p - k - q)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q)$$

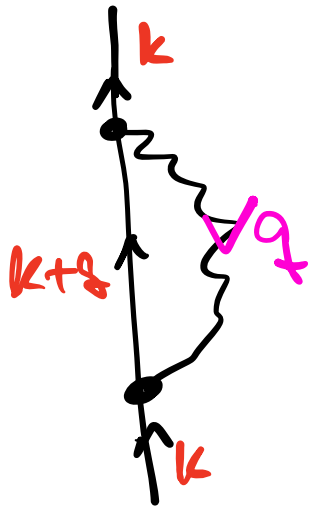
$$\int d^4 x_4 e^{i x_4 (q - p + p')} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p + p')$$

$\left. \begin{array}{l} p = k + q \\ p' = p - q = k \end{array} \right\}$

$$= - \int \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^8} e^{-ik(x_1 - x_2)} U(\vec{q}) G^{(0)}(k) G^{(0)}(k+q) G^{(0)}(k) e^{i(\omega t + \nu) \eta}$$

$$\equiv i G^{(1ex)}(x_1 - x_2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x_1 - x_2)} G^{(1ex)}(k)$$

$$i G^{(1ex)}(k) = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} U(\vec{q}) [G^{(0)}(k)]^2 G^{(0)}(k+q) e^{i\omega \eta} e^{i\nu \eta}$$



$$\rightarrow -i U(\vec{q}) [i G^{(0)}(k)]^2 i G^{(0)}(k+q)$$

• NOTEM a CONSERVAÇÃO DE 4-MOMENTO
 EM CADA EXTREMIDADE DE COBRINHA,
 QUE GANHOU UMA ORIENTAÇÃO

• NOTEM TAMBÉM AS DUAS PERNAS EXTERNAS
 $[i G^{(0)}(k)]^2$

$$G^{(2ex)}(k) = i [G^{(0)}(k)]^2 \int \frac{d^3q d\nu}{(2\pi)^4} e^{i\nu n} U(\vec{q}) G^{(0)}(\vec{k} + \vec{q}, \omega + \nu)$$

TROCA DE VARIÁVEIS :

$$q \rightarrow q - k \quad \begin{cases} \vec{q} \rightarrow \vec{q} - \vec{k} \\ \nu \rightarrow \nu - \omega \end{cases}$$

$$\int \frac{d^3q d\nu}{(2\pi)^4} e^{i(\nu - \omega)n} U(\vec{q} - \vec{k}) G^{(0)}(\vec{q}, \nu)$$

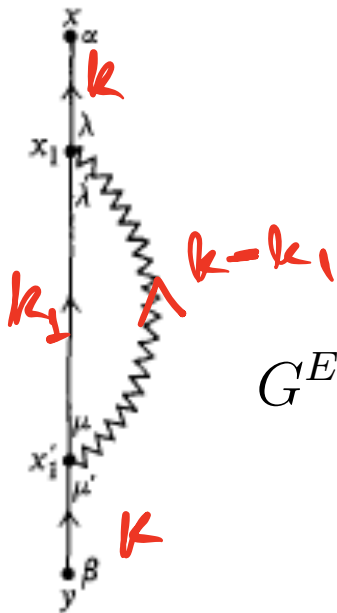
Diagramas no espaço \mathbf{k}, ω

$$G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} G(k)$$

Para sistemas homogêneos: $G(k) = \int d^4 x e^{ikx} G(x)$

$$k = (\mathbf{k}, \omega)$$

$$kx = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$



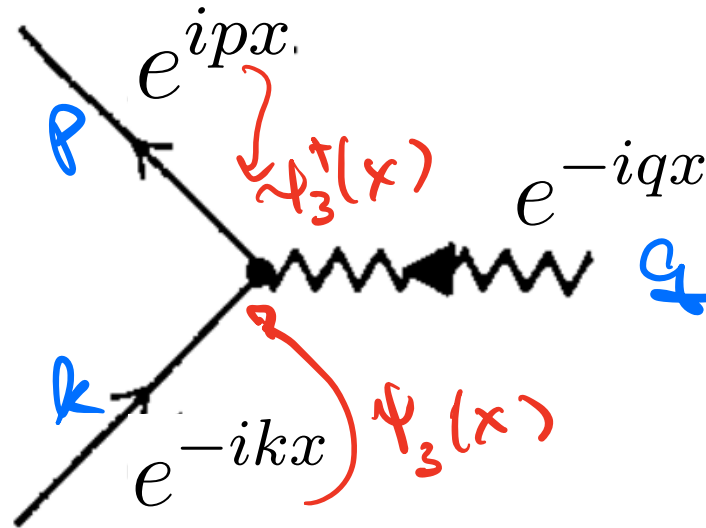
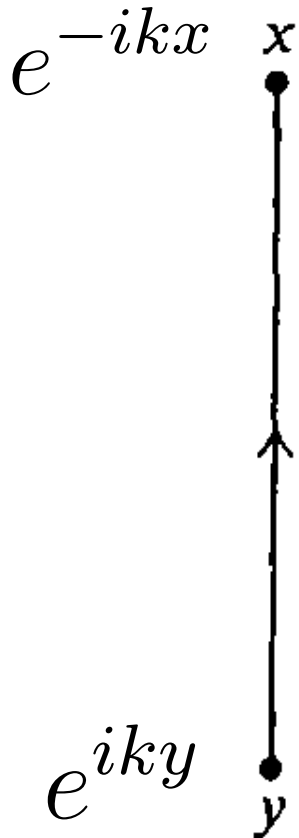
$$G^{EX}(\omega, \mathbf{k}) = i [G^{(0)}(\omega, \mathbf{k})]^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} e^{i\omega_1 \eta} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) G^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1)$$

Regra geral

$$G^{(0)}(x-y) = -i \left\langle T \left[\psi_I(x) \psi_I^\dagger(y) \right] \right\rangle_0 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G^{(0)}(k)$$

$$\psi_I^\dagger(y) \rightarrow e^{iky}$$

$$\psi_I(x) \rightarrow e^{-ikx}$$



$$\int d^4x e^{-ix(k+q-p)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+q-p)$$

$$p = k+q$$

Regra geral



$$G(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G(k)$$

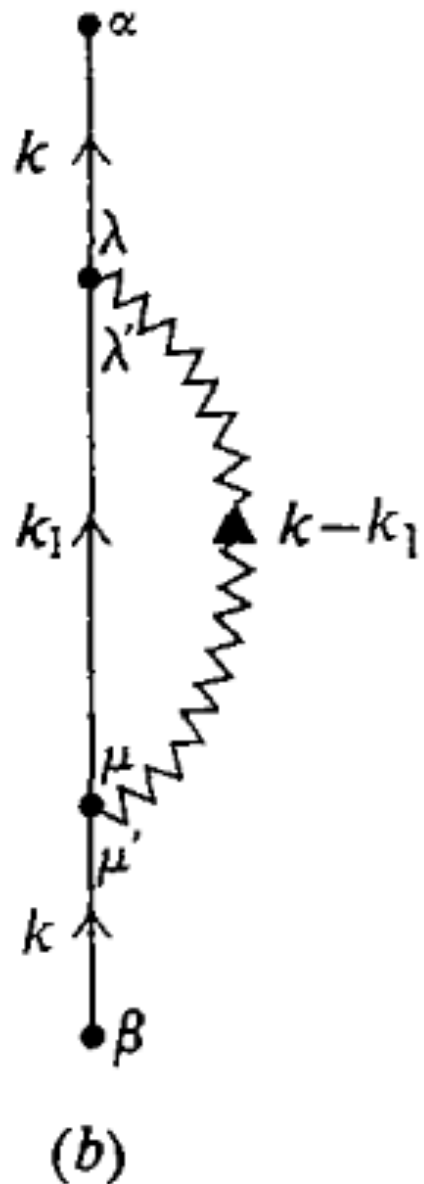
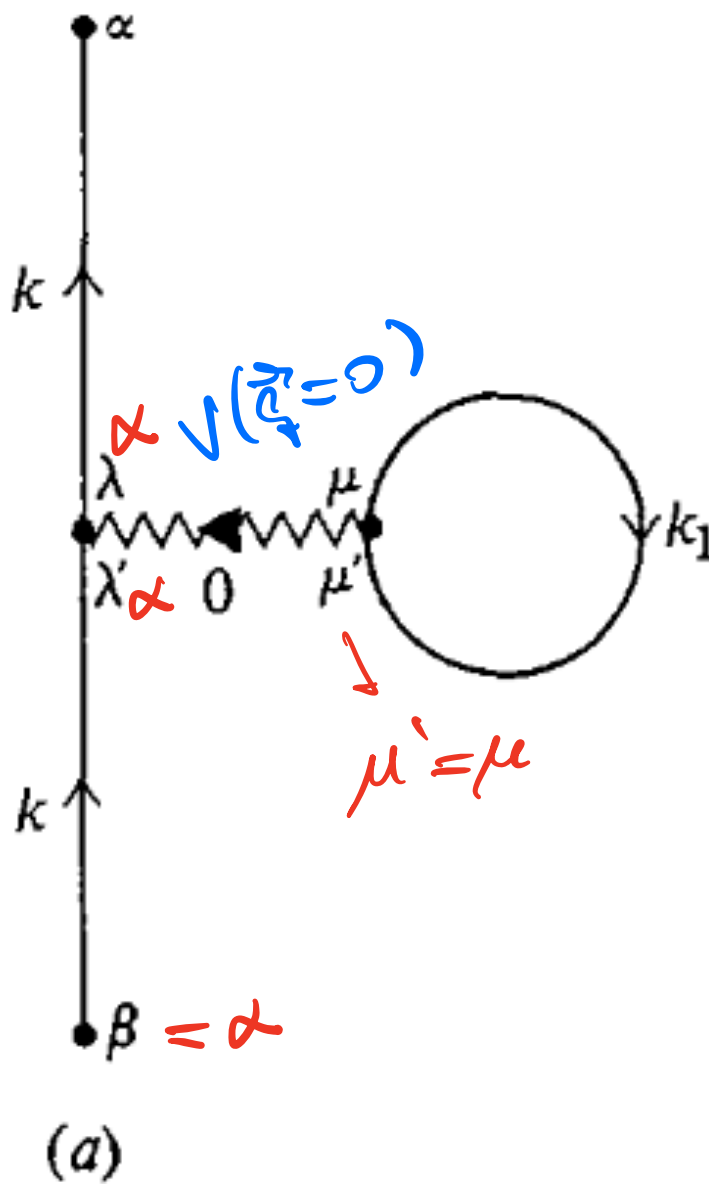
We can now state the Feynman rules for the n th-order contribution to $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \equiv G_{\alpha\beta}(k)$:

1. Draw all topologically distinct connected diagrams with n interaction lines and $2n + 1$ directed Green's functions.
2. Assign a direction to each interaction line; associate a directed four-momentum with each line and conserve four-momentum at each vertex.
3. Each Green's function corresponds to a factor

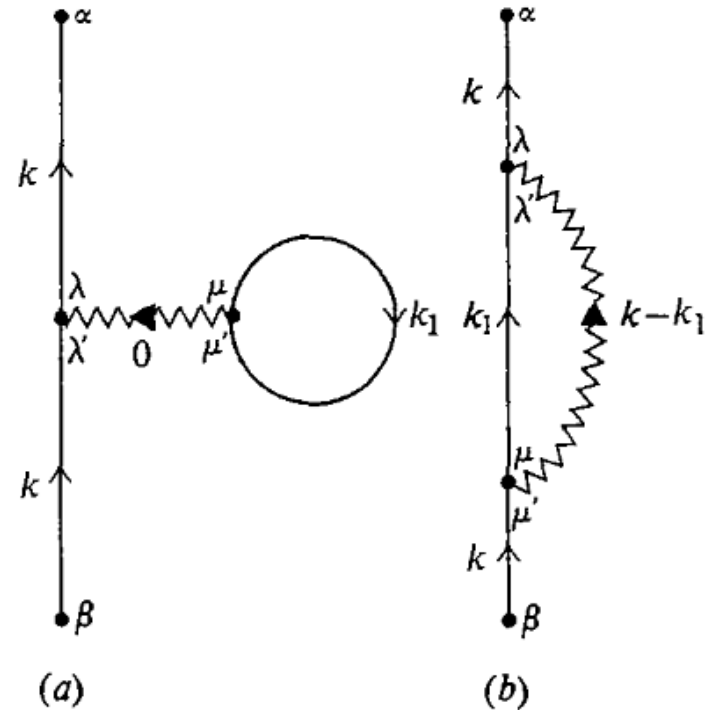
$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} G^0(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\eta} + \frac{\theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\eta} \right] \quad (9.14)$$

$\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\eta$
 $S = \text{sgn}(k - k_F)$

4. Each interaction corresponds to a factor $U(q)_{\lambda\lambda', \mu\mu'} = V(\mathbf{q})_{\lambda\lambda', \mu\mu'}$, where the matrix indices are associated with the fermion lines as in Fig. 9.11.
5. Perform a spin summation along each continuous particle line including the potential at each vertex.
6. Integrate over the n independent internal four-momenta.
7. Affix a factor $(i/\hbar)^n (2\pi)^{-4n} (-1)^F$ where F is the number of closed fermion loops.
8. Any single-particle line that forms a closed loop as in Fig. 9.11a or that is linked by the same interaction line as in Fig. 9.11b is interpreted as $e^{i\omega\eta} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, where $\eta \rightarrow 0^+$ at the end of the calculation.



Diagramas de 1a. ordem



$$G^{(1a)}(\omega, \mathbf{k}) = -2i \left[G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \right]^2 V(\mathbf{0}) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} e^{i\omega_1 \eta} G^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1)$$

$$G^{(1b)}(\omega, \mathbf{k}) = i \left[G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \right]^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} e^{i\omega_1 \eta} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) G^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1)$$

$$G^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = i \left[G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \right]^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} e^{i\omega_1 \eta} [V(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - 2V(\mathbf{0})] G^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1)$$