FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023

05/10/2023

Aula 17

Aula passada

$$iG_{12} = \frac{\left\langle T\left[\tilde{U}\left(+\infty,-\infty\right)\psi_{I1}\psi_{I2}^{\dagger}\right]\right\rangle_0}{\left\langle \tilde{U}\left(+\infty,-\infty\right)\right\rangle_0}$$

$$\left\langle T\left[\tilde{U}\left(+\infty,-\infty\right)\psi_{I1}\psi_{I2}^{\dagger}\right]\right\rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\ldots dt_n\left\langle T\left[H_{1I}\left(t_1\right)\ldots H_{1I}\left(t_n\right)\psi_{I1}\psi_{I2}^{\dagger}\right]\right\rangle_0$$

$$\left\langle T\left[\tilde{U}\left(+\infty,-\infty\right)\right]\right\rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\ldots dt_n\left\langle T\left[H_{1I}\left(t_1\right)\ldots H_{1I}\left(t_n\right)\right]\right\rangle_0$$

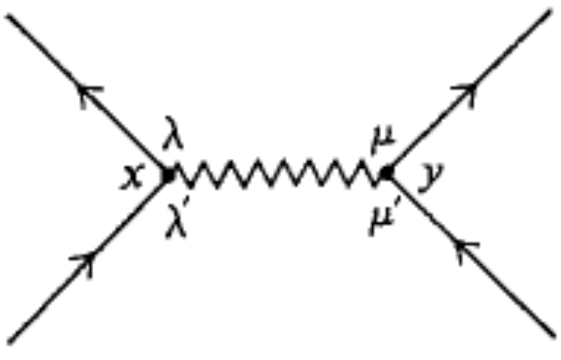
Teorema de Wick

Teorema de Wick: O valor esperado no estado fundamental não-interagente de uma sequência de operadores de criação e destruição na versão de interação é dado pela soma de todas as contrações possíveis de pares, onde cada termo tem o sinal de +1 (-1) de acordo com o número de transposições necessárias de operadores fermiônicos para ir da ordem inicial até a ordem final ser par (ímpar).

Cada contração de um operador de destruição com um operador de criação (nessa ordem) é igual à função de Green não-interagente.

Aula passada

$$iG^{(0)}_{\alpha\beta}\left(x,y\right)=\left\langle T\left[\psi_{\alpha I}\left(x\right)\psi^{\dagger}_{\beta I}\left(y\right)\right]\right\rangle_0$$



$$-iU\left(x,y\right)\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\mu,\mu'}$$

Regras dos diagramas em ordem n

1. Desenhe todos os diagramas conectados topologicamente distintos, começando no ponto do espaço-tempo (mais spin) y e terminando em x, com $2n+1$ funções de Green (linhas contínuas orientadas) e n linhas de interação ("cobrinhas").

2. Cada extremidade de uma "cobrinha" (vértice) é rotulado por um ponto no espaço-tempo (mais spin) $(x_3, x_4, x_5, \ldots)$. A cada "cobrinha" com extremidades em (x_3, x_4) é associada a interação $-iU(x_3, x_4)$.

3. Cada linha contínua começa em y e termina em x. A ela é associada a função de Green $iG^{(0)}(x,y)$.

Regras dos diagramas em ordem n

4. Integre/some sobre todos os pontos internos $(x_3, x_4, x_5, \ldots)$ (incluindo spin).

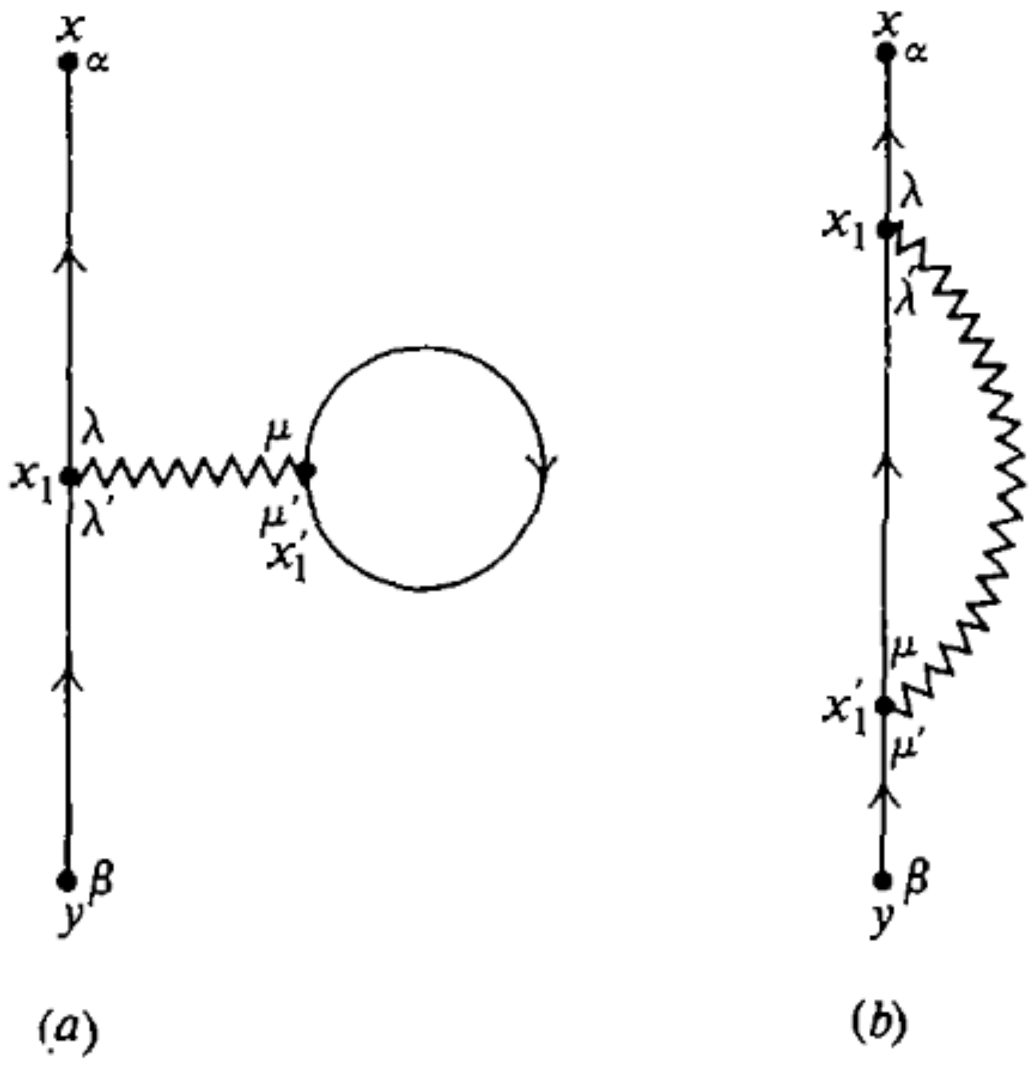
5. Conserve spin em cada função de Green e em cada vértice (para interações que conservam o spin no vértice).

6. Multiplique o diagrama por $(-1)^L$, onde L é o número de "loops" fechados fermiônicos.

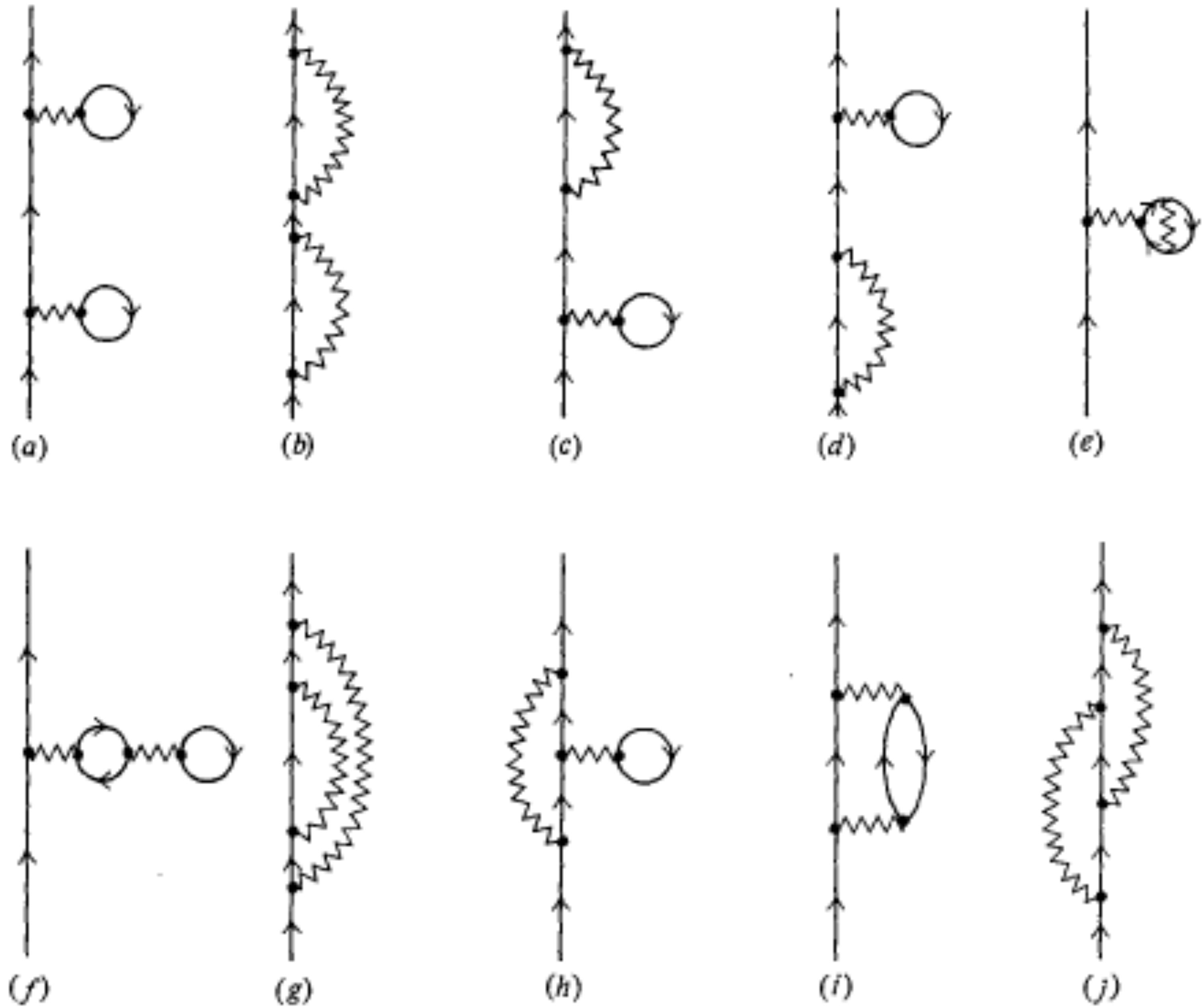
7. Caso haja funções de Green com tempos iguais, a regra a ser usada é

$$iG^{(0)}_{33} \equiv \lim_{t_3' \to t_3^+} \left\langle T\left[\psi_{\alpha I}(\boldsymbol{r}_3, t_3)\, \psi^\dagger_{\alpha I}(\boldsymbol{r}_3, t_3')\right]\right\rangle_0 = \frac{1}{2} n.$$

Diagramas em 1a. ordem



Diagramas em 2a. ordem



Aula passada

Para sistemas homogêneos:

$$k = (\mathbf{k}, \omega)$$

$$kx = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} G(k)$$

$$G(k) = \int d^4x e^{ikx} G(x)$$

$$U(x) = U(\mathbf{r}) \delta(t) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} U(q)$$

$$U(q) = \int d^4x e^{iqx} U(x) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{q})$$

Diagramas no espaço **k**,ω

We can now state the Feynman rules for the nth-order contribution to $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) \equiv G_{\alpha\beta}(k)$:

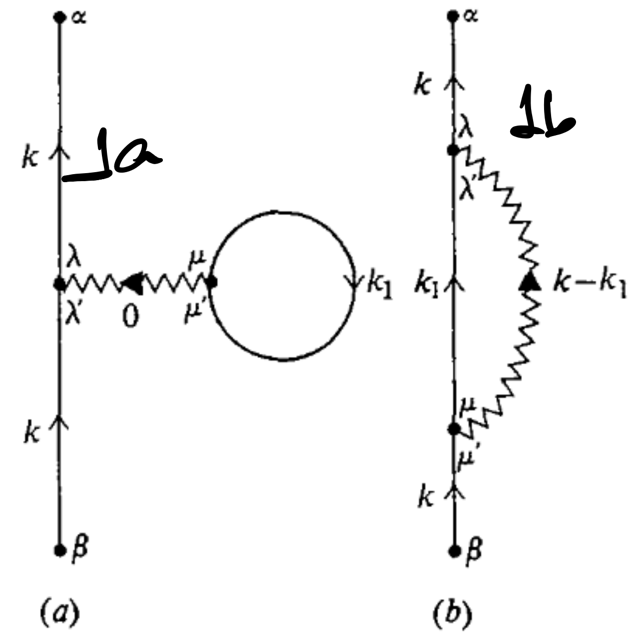
1. Draw all topologically distinct connected diagrams with n interaction lines and $2n+1$ directed Green's functions.
2. Assign a direction to each interaction line; associate a directed four-momentum with each line and conserve four-momentum at each vertex.
3. Each Green's function corresponds to a factor

$$G^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\alpha\beta}\, G^0(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\eta} + \frac{\theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\eta}\right] \tag{9.14}$$

4. Each interaction corresponds to a factor $U(q)_{\lambda\lambda',\mu\mu'} = V(\mathbf{q})_{\lambda\lambda',\mu\mu'}$ where the matrix indices are associated with the fermion lines as in Fig. 9.11.
5. Perform a spin summation along each continuous particle line including the potential at each vertex.
6. Integrate over the n independent internal four-momenta.
7. Affix a factor $(i/\hbar)^n(2\pi)^{-4n}(-1)^F$ where F is the number of closed fermion loops.
8. Any single-particle line that forms a closed loop as in Fig. 9.11a or that is linked by the same interaction line as in Fig. 9.11b is interpreted as $e^{i\omega\eta}\, G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$, where $\eta \to 0^+$ at the end of the calculation.

Aula passada

Diagramas de 1a. ordem



$$G^{(1a)}(\omega,\mathbf{k}) \;=\; -2i\left[G^{(0)}(\omega,\mathbf{k})\right]^2 V(\mathbf{0})\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{i\omega_1\eta}G^{(0)}(\omega_1,\mathbf{k}_1)$$

$$G^{(1b)}(\omega,\mathbf{k}) \;=\; i\left[G^{(0)}(\omega,\mathbf{k})\right]^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{i\omega_1\eta}V(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,G^{(0)}(\omega_1,\mathbf{k}_1)$$

$$\boxed{G^{(1)}(\omega,\mathbf{k}) \;=\; i\left[G^{(0)}(\omega,\mathbf{k})\right]^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{i\omega_1\eta}\left[V(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)-2V(\mathbf{0})\right]G^{(0)}(\omega_1,\mathbf{k}_1)}$$

Integrações sobre frequências

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega\eta}\, G(k,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega\eta}\left[\frac{\theta(k_F-q)}{\omega-\epsilon_q-i\eta} + \frac{\theta(q-k_F)}{\omega-\epsilon_q+i\eta}\right]$$

$$I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{e^{i\omega\eta}}{\omega-\epsilon_q \pm i\eta}$$

LEMA DE JORDAN: $I = \int_{\frown} e^{i\omega\eta} f(\omega)\, d\omega$ ONDE $f(\omega) \xrightarrow[|\omega|\to\infty]{} 0$

$\eta > 0$

$\frown$: CAMINHO É UM SEMI-CÍRCULO DE RAIO R NO SEMI-PLANO SUPERIOR, ONDE $R \to \infty$

$I \to 0$

NO SEMI-PLANO SUPERIOR: $\omega = Re^{i\theta}$ $\quad \theta \in (0,\pi)$

$$\Rightarrow \exp[i\omega\eta] = \exp[iR\eta(\cos\theta + i\sin\theta)] =$$

$$= e^{iR\eta\cos\theta}\, e^{-\eta R\sin\theta} \sim e^{-\lambda R} \quad \lambda > 0 \quad (\text{ONDE } \sin\theta > 0)$$

$$\int_{\cap} e^{i\omega\eta} f(\omega)\, d\omega \sim \frac{R}{R} e^{-\lambda R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

SEGUE QUE

$$I'_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega = \int_{\circlearrowleft} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega\eta}}{\omega - \epsilon_q \pm i\eta} \Leftarrow$$ FAÇO POR RESÍDUOS

O INTEGRANDO É UMA FUNÇÃO COM PÓLOS SIMPLES EM:

$$\omega = \epsilon_q \mp i\eta$$

$I'_{+} = 0$ PORQUE O POLO ESTÁ NO SEMI-PLANO INFERIOR

$$I'_{-} = 2\pi i \sum (\text{Res.}) = \cancel{2\pi} i \left[\frac{1}{\cancel{2\pi}} e^{i\eta(\epsilon_q + i\eta)} \right] \xrightarrow[\eta\to 0^+]{} i$$

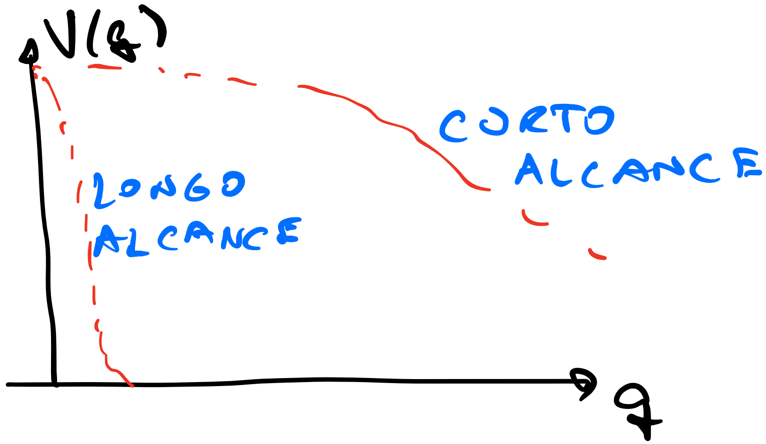
$$I = i\,\theta(k_F - q)$$

$$G^{(1)}(\vec{k},\omega) = -\left[G^{(0)}(\vec{k},\omega)\right]^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(k_F - q)\left[\underbrace{V(\vec{k}-\vec{q})}_{\text{TROCA}} - \underbrace{2V(0)}_{\text{DIRETO}}\right]$$

NO 2º TERMO: $\displaystyle\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\theta(k_F - q) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{N}{V} = \frac{n}{2}$

$$G^{(1)}(\vec{k},\omega) = \left[G^{(0)}(\vec{k},\omega)\right]^2 \left[n V(0) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\theta(\vec{k}_F - q)\, V(\vec{k}-\vec{q}) \right]$$

POTENCIAIS DE CURTO x LONGO ALCANCE:



CURTO ALCANCE: OS 2 TERMOS SÃO SIMILARES

DIRETO ~ TROCA

LONGO ALCANCE:

TROCA << DIRETO

POTENCIAL COULOMBIANO: ~ LONGO ALCANCE

⇒ EFEITOS DE TROCA SÃO MENORES QUE OS DIRETO.

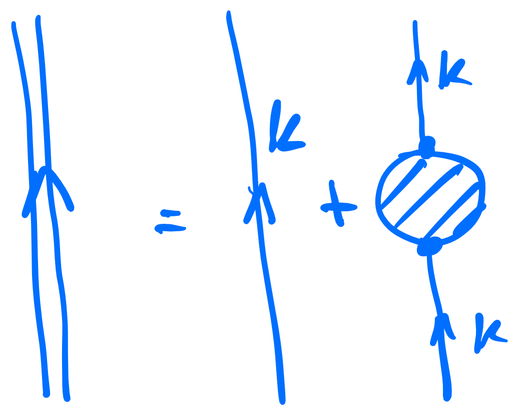
Auto-energia e equação de Dyson

$$G^{(1a)}(\omega,\mathbf{k}) = -2i\left[G^{(0)}(\omega,\mathbf{k})\right]^2 V(\mathbf{0})\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{i\omega_1\eta}G^{(0)}(\omega_1,\mathbf{k}_1)$$

$$G^{(1b)}(\omega,\mathbf{k}) = i\left[G^{(0)}(\omega,\mathbf{k})\right]^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{i\omega_1\eta}V(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)G^{(0)}(\omega_1,\mathbf{k}_1)$$

DA ESTRUTURA ACIMA E ANALISANDO TERMOS GENÉRICOS EM ORDEM $n \geq 1$, FICA CLARO QUE O FATOR $[G^{(0)}(\omega,\vec{k})]^2$ ESTÁ PRESENTE SEMPRE:

 $= -i\,\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega)$

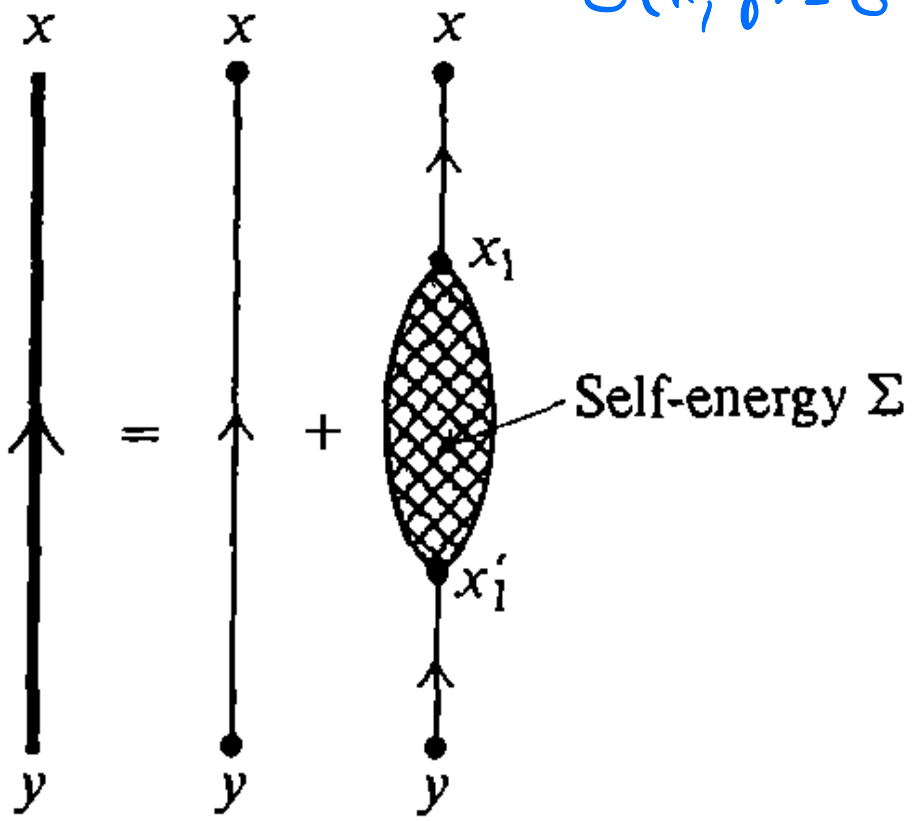


$$\cancel{i}\,G(\vec{k},\omega) = \cancel{i}\,G^{(0)}(\vec{k},\omega) + \left[iG^{(0)}(\vec{k},\omega)\right]^2(-\cancel{i})\,\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega)$$

$$G(\vec{k},\omega) = G^{(0)}(\vec{k},\omega) + \left[G^{(0)}(\vec{k},\omega)\right]^2\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega)$$

$\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega)$ = AUTO-ENERGIA IMPRÓPRIA

Auto-energia no espaço real

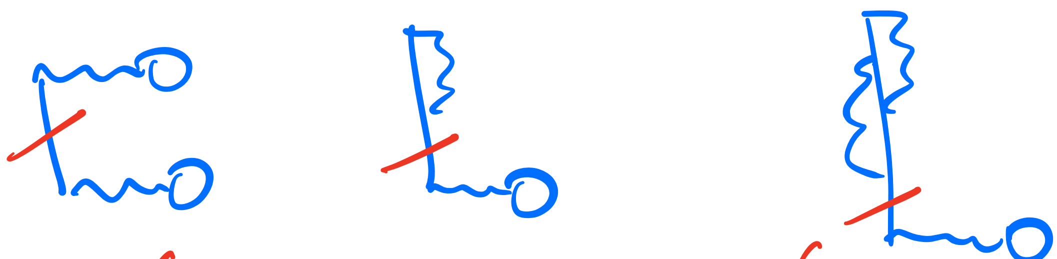


$$G(x,y) = G^{(0)}(x,y) + \int dx_1\, dx_1'\, G^{(0)}(x,x_1)\tilde{\Sigma}(x_1,x_1')\, G^{(0)}(x_1',y)$$

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}(\vec{k},\omega) = \left[n V(0) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \theta(k_F - q)\, V(\vec{k}-\vec{q}) \right]$$

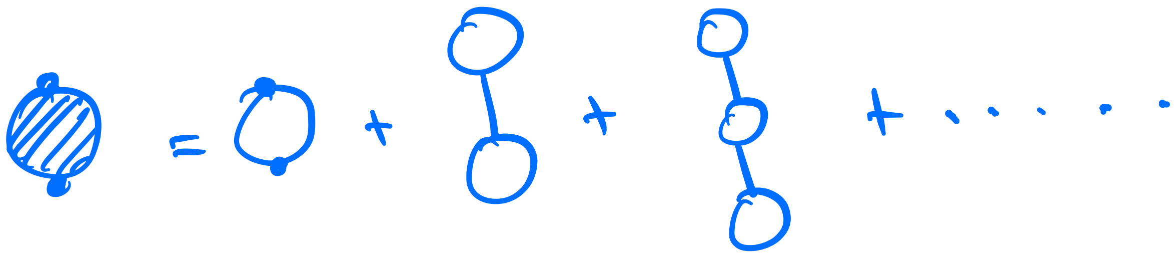
OLHANDO PARA TODOS OS DIAGRAMA DE $\tilde{\Sigma}$, VEMOS QUE ELES PODEM SER CLASSIFICADOS COMO:

1) REDUTÍVEIS DE UMA PARTÍCULA: SE DESMEMBRAM EM DUAS PARTES DESCONECTADAS SE "CORTAMOS" UMA FUNÇÃO DE GREEN $G^{(0)}(\vec{k},\omega)$:



2) IRREDUTÍVEIS DE UMA PARTÍCULA: TODOS OS OUTROS

Auto-energia própria



 = CONTÉM TODOS OS DIAGRAMAS IRREDUTÍVEIS DE UMA PARTÍCULA $= -i\Sigma(\vec{k},\omega)$

$\Sigma(\vec{k},\omega)$ = AUTO-ENERGIA PRÓPRIA

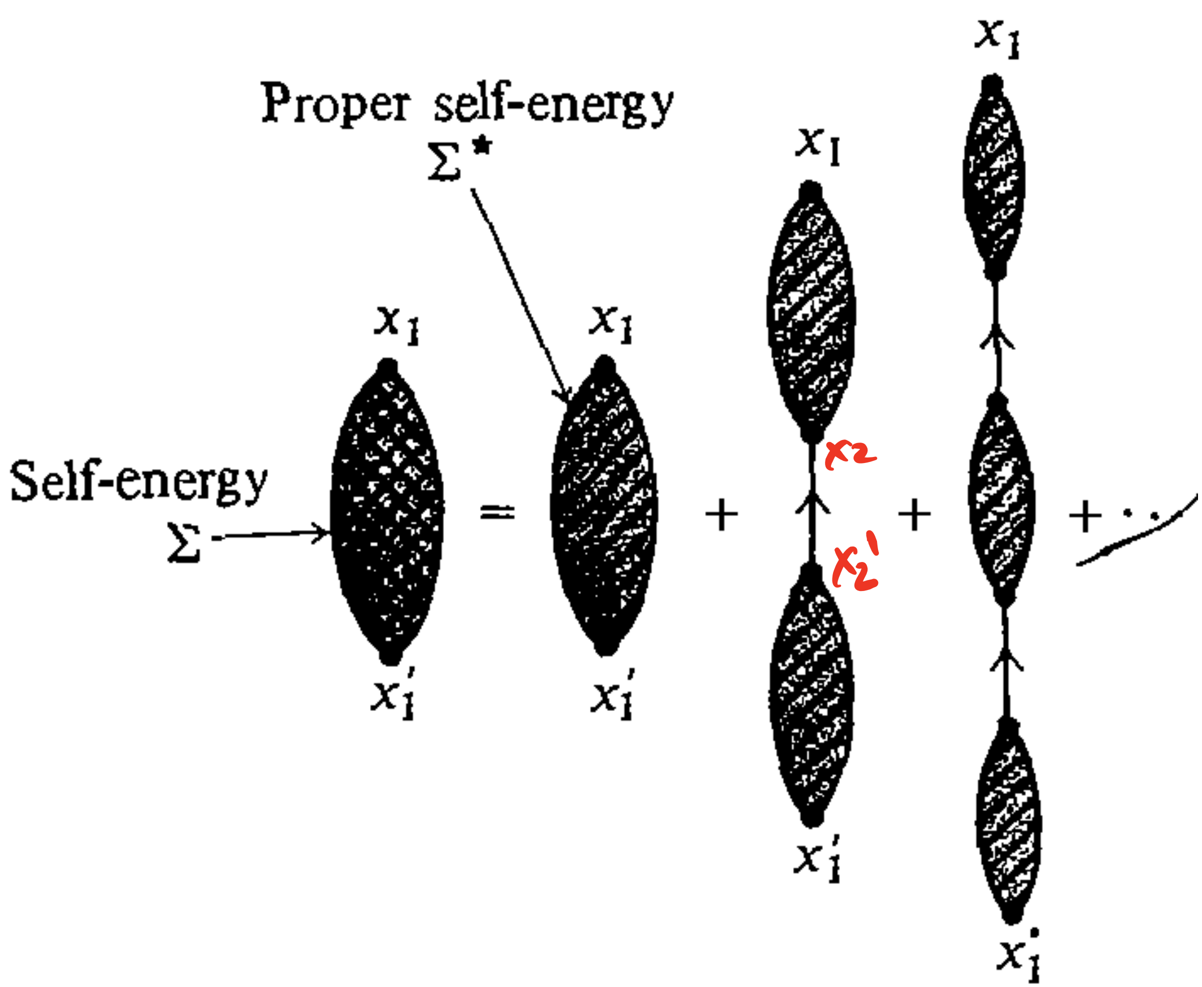
$$\cancel{-i}\,\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega) = \cancel{-i}\,\Sigma(\vec{k},\omega) + [\cancel{i}\,\Sigma(\vec{k},\omega)]^2[\cancel{i}\,G^{(0)}(\vec{k},\omega)] +$$

$$+ [-i\Sigma(\vec{k},\omega)]^3[iG^{(0)}(\vec{k},\omega)]^2 + \dots$$

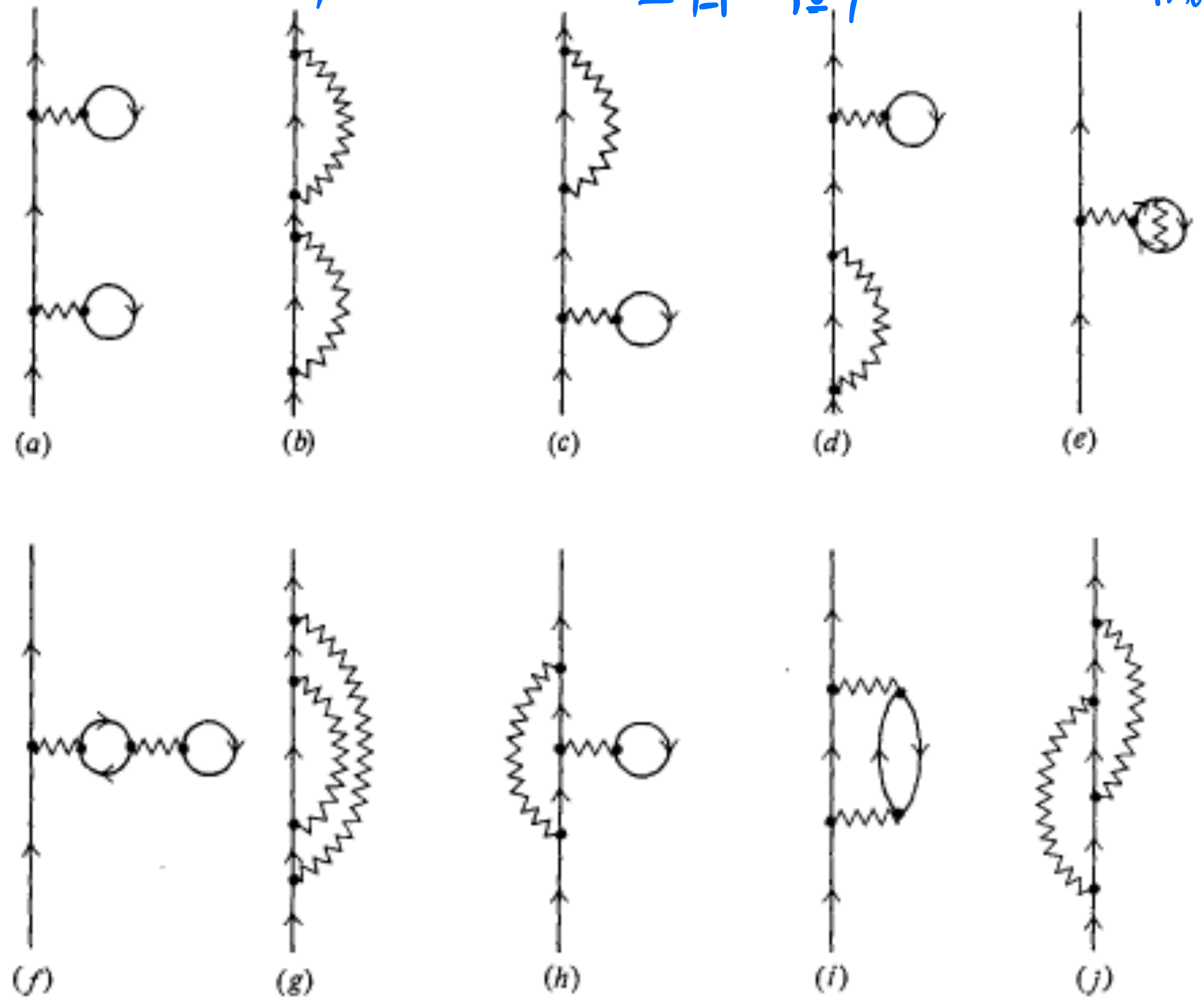
$$\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega) = \Sigma(\vec{k},\omega) + [\Sigma(\vec{k},\omega)]^2 G^{(0)}(\vec{k},\omega) + [\tilde{\Sigma}(\vec{k},\omega)]^3[G^{(0)}(\vec{k},\omega)]^2$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma\{1 + \Sigma G^{(0)} + [\Sigma G^{(0)}]^2 + [\Sigma G^{(0)}]^3 + \dots\} = \boxed{\frac{\Sigma}{1-\Sigma G^{(0)}} = \tilde{\Sigma}}$$

Relação entre a auto-energia e a auto-energia própria no espaço real



DOS DIAGRAMAS DE AUTO-ENERGIA ABAIXO, TODOS CONTRIBUEM PARA $\tilde{\Sigma}^{(2)}$, MAS APENAS $\underline{e}$, $\underline{f}$, …, $\underline{j}$, CONTRIBUEM PARA $\Sigma^{(2)}$



IGNORANDO POR UM INSTANTE A DEPENDÊNCIA COM $(\vec{k},\omega)$:

$$G = G^{(0)} + [G^0]^2 \tilde{\Sigma} = G^{(0)} + [G^{(0)}]^2 \left[\frac{\Sigma}{1 - G^{(0)}\Sigma} \right]$$

$$= G^{(0)} \left\{ 1 + \frac{G^{(0)}\Sigma}{1 - G^{(0)}\Sigma} \right\} = G^{(0)} \left[\frac{1}{1 - G^{(0)}\Sigma} \right] = G$$

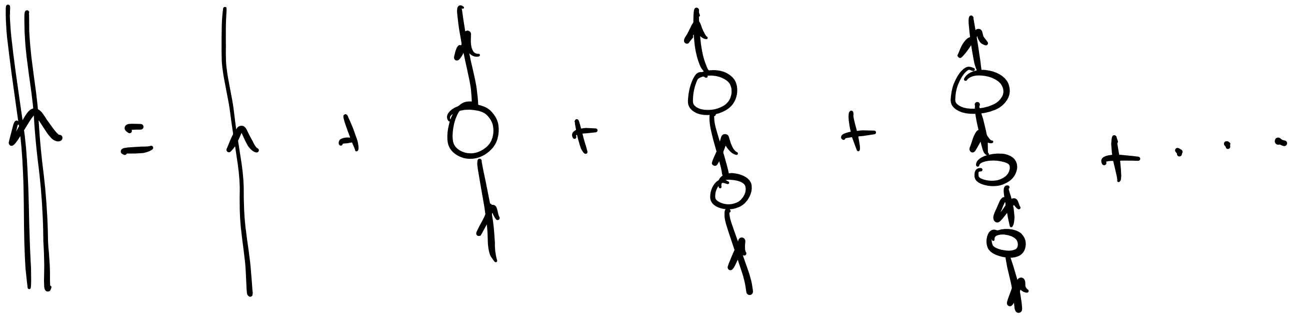
$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{[G^{(0)}(\vec{k},\omega)]^{-1} - \Sigma(\vec{k},\omega)}$$

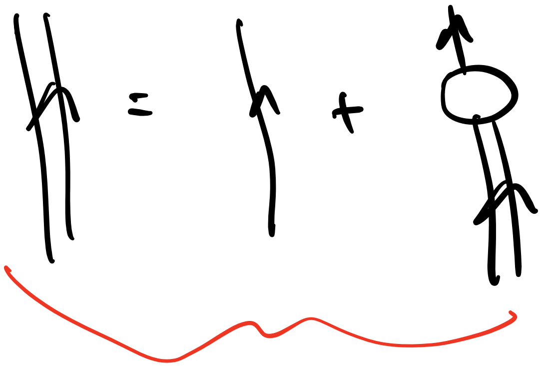
$$G^{(0)}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} + i \underbrace{\mathrm{sgn}(k-k_F)}_{s_k} \eta}$$

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} + i s_k \eta - \Sigma(\vec{k},\omega)}$$

USUALMENTE $\mathrm{Im}[\Sigma(\vec{k},\omega)] \neq 0$ E PODEMOS GERALMENTE DEIXAR DE ESCREVER $i\eta s_k$:

$$\boxed{G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} - \Sigma(\vec{k},\omega)}}$$





EQ. DE DYSON

$$\Rightarrow \quad iG = iG^{(0)} + iG^{(0)}[-i\Sigma]iG$$

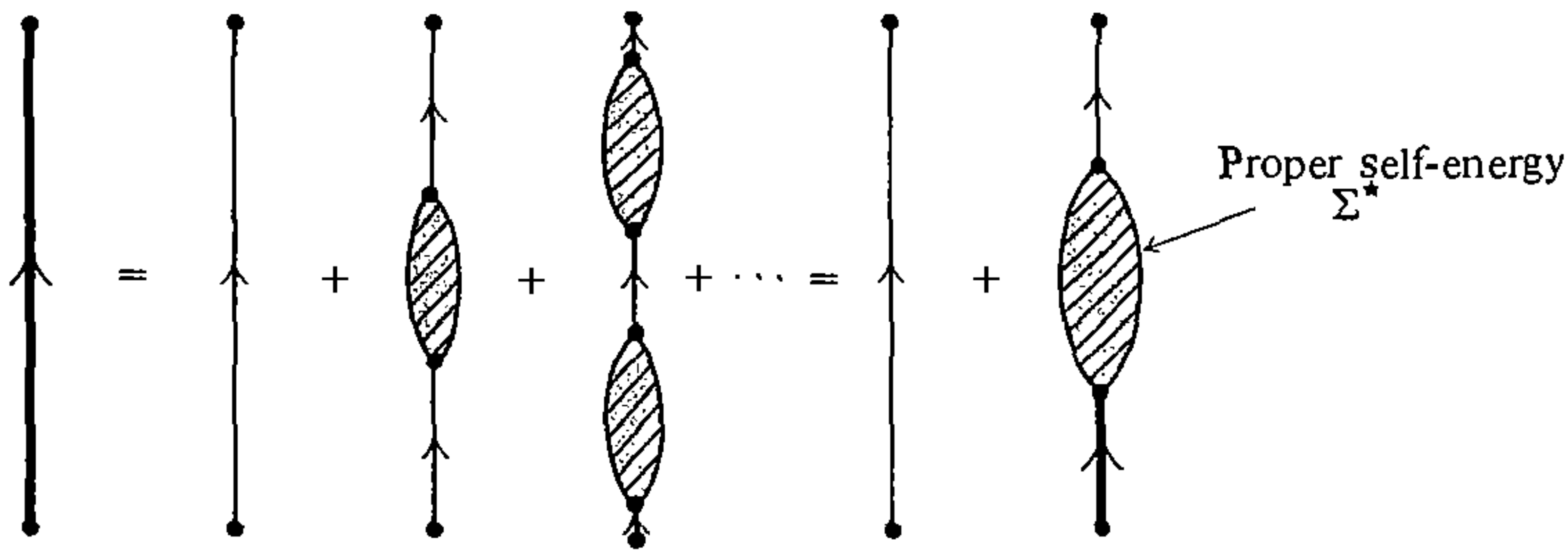
$$G = G^{(0)} + G^{(0)}\Sigma G$$

$$G - G^{(0)}\Sigma G = G^{(0)}$$

$$[1 - G^{(0)}\Sigma]G = G^{(0)}$$

$$G = \frac{G^{(0)}}{1 - G^{(0)}\Sigma} = \frac{1}{[G^{(0)}]^{-1} - \Sigma}$$

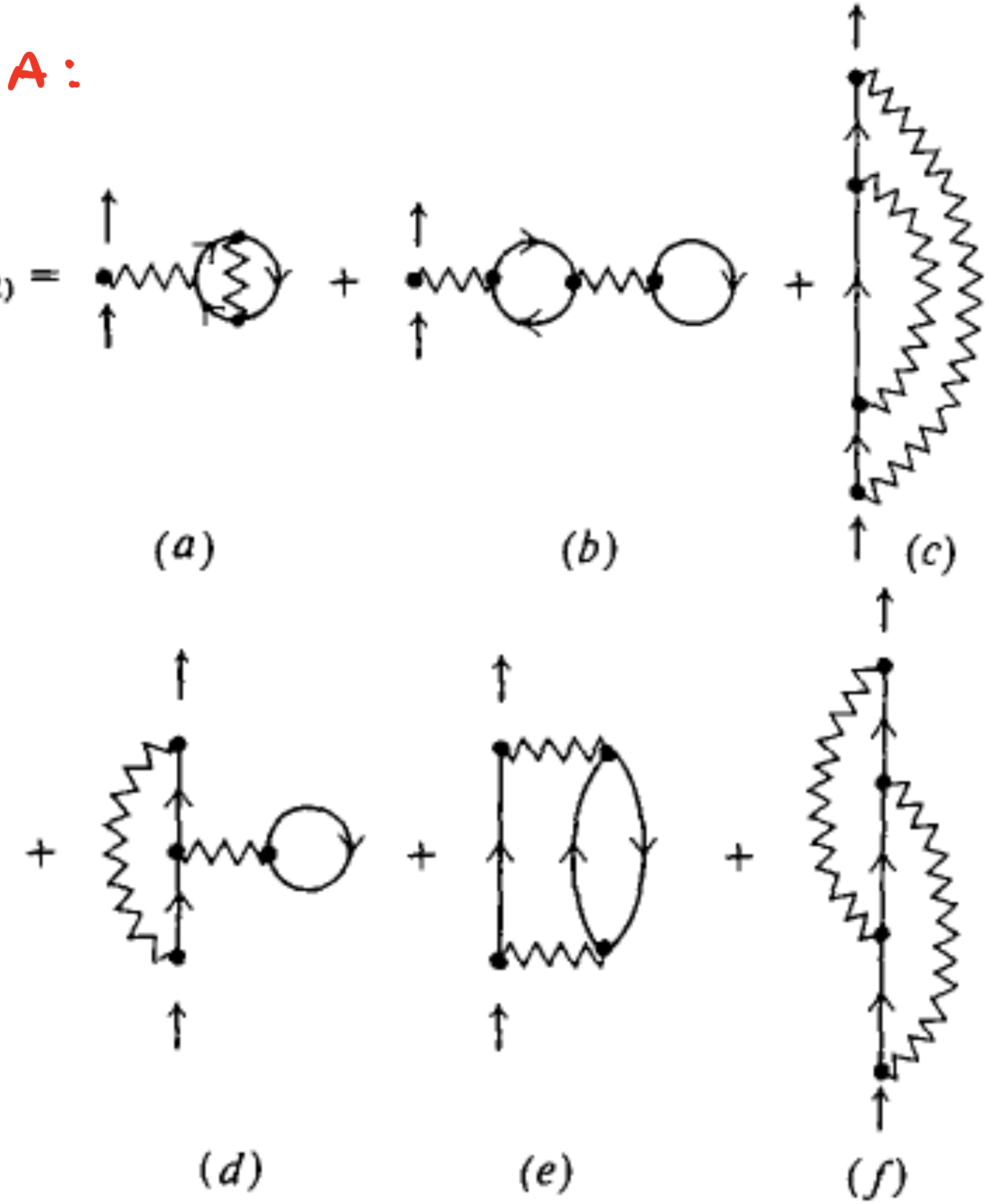
Equação de Dyson



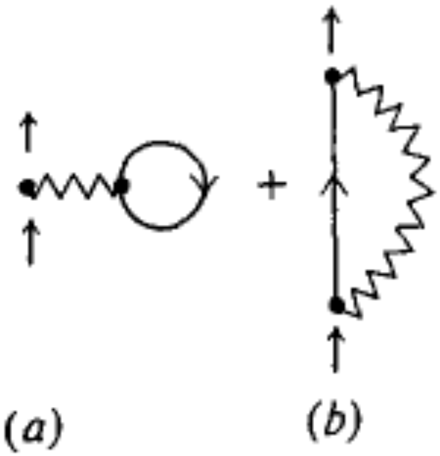
AUTO-ENERGIA PRÓPRIA:

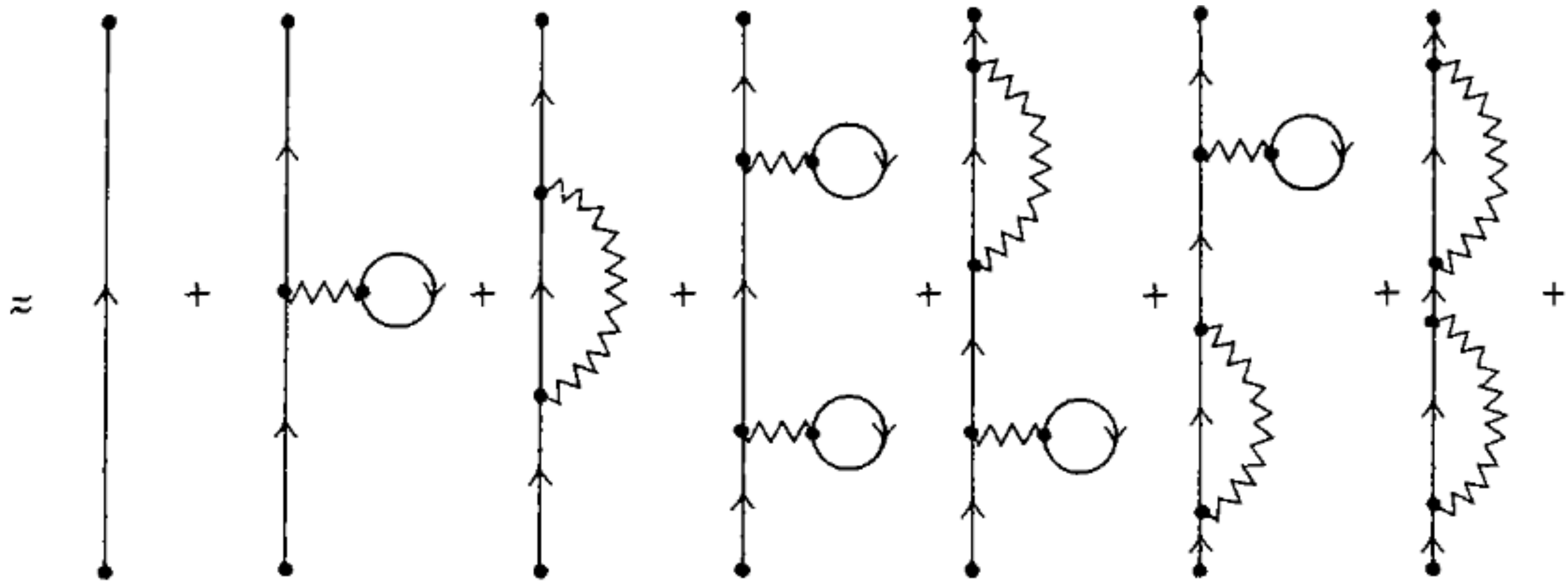
$(\Sigma^* = \Sigma)$

$\Sigma^{\star}_{(2)} =$

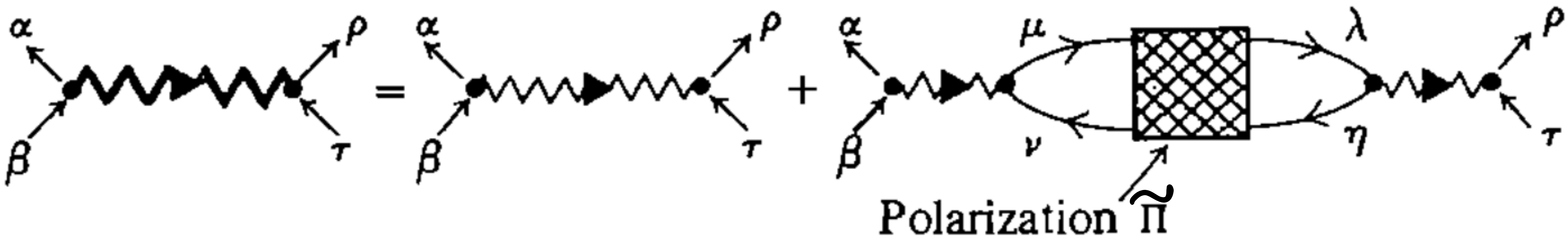


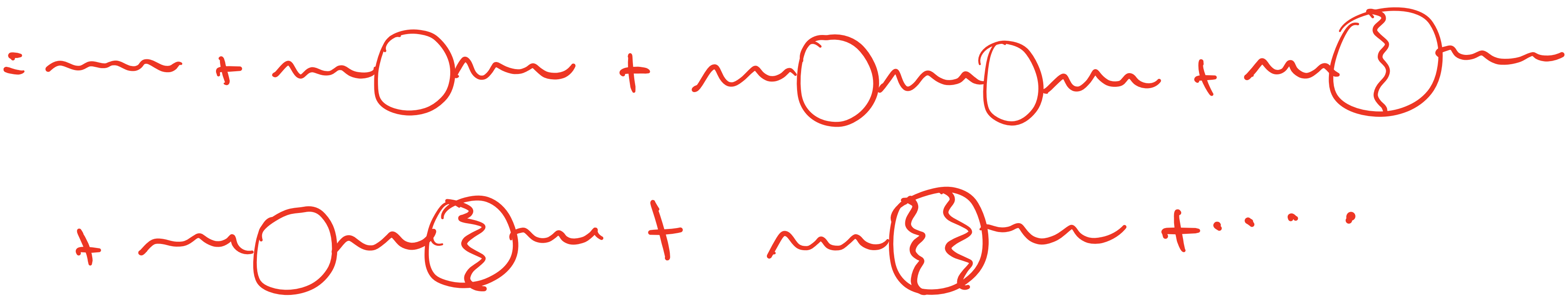
$\Sigma^{\star}_{(1)} =$

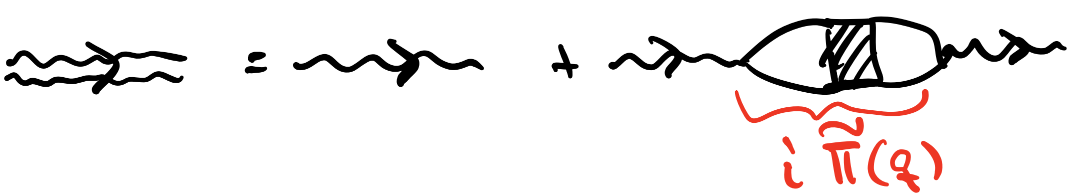




Inserção de polarização







$\tilde{\Pi}(q)$ = INSERÇÃO DE POLARIZAÇÃO IMPRÓPRIA

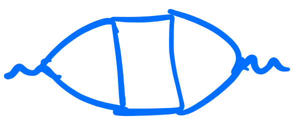
$$-iU^R(q) = -iU(q) + [-iU(q)]^2 [i\tilde{\Pi}(q)]$$

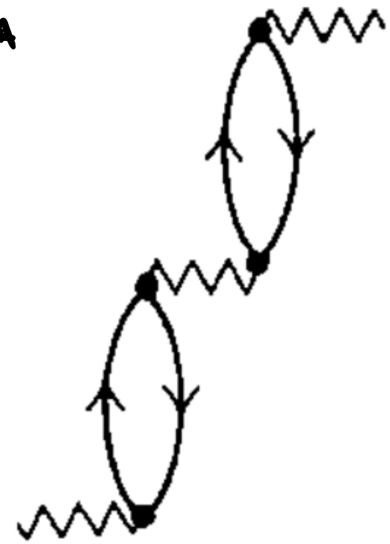
$$U^R(q) = U(q) + [U(q)]^2 \tilde{\Pi}(q)$$

Polarização própria e imprópria

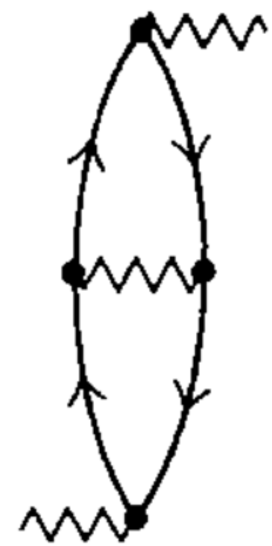
INSERÇÃO DE POLARIZAÇÃO PRÓPRIA NÃO SE DESCONECTAM EM DOIS CORTANDO UMA COBRINHA.

$\Pi(q)$ = INS. DE POL. PRÓPRIA

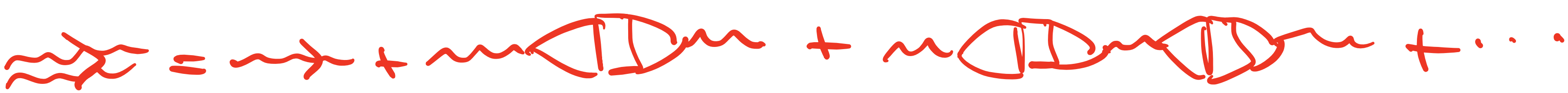
 $= i\Pi(q)$



Improper



Proper

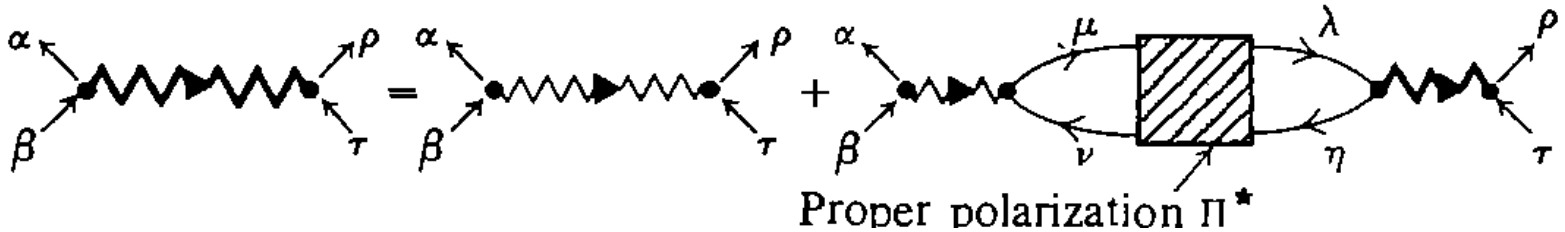


$$-iU^R = -iU + [-iU]^2 (i\Pi) + (-iU)^3 (i\Pi)^2 + \dots$$

$$U^R = U + U^2\Pi + U^3\Pi^2 + \dots = U\left[1 + U\Pi + (U\Pi)^2 + \dots\right]$$

$$\boxed{U^R = \frac{U}{1 - U\Pi}}$$

Equação de Dyson para a polarização



$$U^R(q) = \frac{U(q)}{1 - \Pi(q)\,U(q)} \equiv \frac{U(q)}{\epsilon(q)}$$

$\epsilon(q) = 1 - \Pi(q)\,U(q)$ = CONSTANTE DIELÉTRICA DO MEIO

CORREÇÕES DE VÉRTICE: