# FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023
17/10/2023
Aula 18

# Interpretação física da Função de Green

SISTEMAS FERMIÔNICOS: SISTEMA HOMOGÊNEO:

$t>0$: $iG(\vec{k},t) = \langle \Phi_{0H} | c_{\vec{k}H}(t)\, c^{+}_{\vec{k}H}(0) | \Phi_{0H} \rangle$

$c_{\vec{k}H}(t) = e^{iHt}\, c_{\vec{k}}\, e^{-iHt}$

$\Rightarrow iG(\vec{k},t) = \langle \Phi_{0H} | e^{iHt}\, c_{\vec{k}}\, e^{-iHt}\, c^{+}_{\vec{k}} | \Phi_{0H} \rangle$

$|\Phi_{0H}\rangle = e^{iHt} |\Phi_{0S}(t)\rangle = e^{iHt} e^{-iE_0 t} |\Phi_{0S}\rangle = |\Phi_{0S}\rangle$

$\Rightarrow iG(\vec{k},t) = \langle \Phi_{0S} | c_{\vec{k}}\, e^{-iHt}\, \underbrace{c^{+}_{\vec{k}} | \Phi_{0S} \rangle}_{\equiv |\Phi_{\vec{k}}\rangle} = \langle \Phi_{\vec{k}} | \underbrace{e^{-iHt}}_{U(t,0)} | \Phi_{\vec{k}} \rangle$

i) CRIA-SE UM ELÉTRON NO ESTADO $|\vec{k}\rangle$ NA PRESENÇA DO MAR DE FERMI INTERAGENTE EM $t=0$

ii) EVOLUO NO TEMPO ATÉ $t$

iii) CALCULO O "OVERLAP" COM O ESTADO INICIAL $|\Phi_{\vec{k}}\rangle$

PARA $t<0$, O RESULTADO É SEMELHANTE MAS:

$$|\Psi'_{\vec{k}}\rangle = c_{\vec{k}}\,|\Psi_{0s}\rangle$$

DA REPRESENTAÇÃO DE LEHMANN ($t>0$):

$$G(\vec{k},t) = -iV \sum_{m} |\langle m,\vec{k}|\, c^{\dagger}_{\vec{k}}\,|\Psi_{0s}\rangle|^2\, e^{-i\epsilon_{m\vec{k}}(N+1)t}$$

NO ESPAÇO DE FREQUÊNCIAS:

$$G(\vec{k},\omega) = V \sum_{m} \frac{|\langle m\vec{k}|\, c^{\dagger}_{\vec{k}}\,|\Psi_{0s}\rangle|^2}{\omega - \epsilon_{m\vec{k}}(N+1) + i\delta}$$

NO LIMITE TERMODINÂMICO: $N \to \infty$, $V \to \infty$, $\frac{N}{V} = \text{CONST.}$

$$G(\vec{k},t) = -i\int_0^{\infty} A(\vec{k},\epsilon)\, e^{-i\epsilon t}\, d\epsilon$$

$$G(\vec{k},\omega) = \int_0^{\infty} \frac{A(\vec{k},\epsilon)}{\omega - \epsilon + i\delta}\, d\epsilon$$

SE $t<0$: $A(\vec{k},\epsilon) \to B(\vec{k},\epsilon)$, ETC.

# Função espectral de um líquido de Fermi

$$\boxed{A(\mathbf{k},\epsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma_{\mathbf{k}} Z_{\mathbf{k}}}{\left(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}\right)^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^2}} \qquad \gamma_{\mathbf{k}} \ll \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$$

LEVANDO NA REPRESENTAÇÃO DE LEHMANN:

$Z_{\vec{k}} = Z_k \,;\, \tilde{\epsilon}_{\vec{k}} = \tilde{\epsilon}_k$

$\gamma_{\vec{k}} = \gamma_k$

(1) $G(\vec{k},\omega) = \dfrac{Z_{\vec{k}}}{\omega - \tilde{\epsilon}_{\vec{k}} + i\gamma_{\vec{k}}}$

(2) $G(\vec{k},t) = -i Z_k e^{-i\tilde{\epsilon}_k t} e^{-\gamma_k t}$ $\left(t \gg \dfrac{1}{\gamma_k}\right)$

(1) PÓLOS SIMPLES EM $\tilde{\epsilon}_k - i\gamma_k$ COM RESÍDUO $Z_k$

(2) FORMA OSCILATÓRIA COM FREQUÊNCIA $\tilde{\epsilon}_k$ E SUB-
- AMORTECIMENTO COM MEIA-VIDA $\dfrac{1}{2\gamma_k}$

$\tilde{\varepsilon}_k$: ENERGIA DA QUASI-PARTÍCULA

$\frac{1}{2\gamma_k}$: MEIA-VIDA DA QP

$Z_k$: RESÍDUO (OU PESO) DE QP

# Importância do limite termodinâmico

$G(\vec{k},t) = -iV \sum_n A_{n\vec{k}}\, e^{-i\epsilon_{n\vec{k}}(N+1)t}$   $A_{n\vec{k}} = |\langle n\vec{k}| C_{\vec{k}}^{+} |\Psi_{0}\rangle|^2$

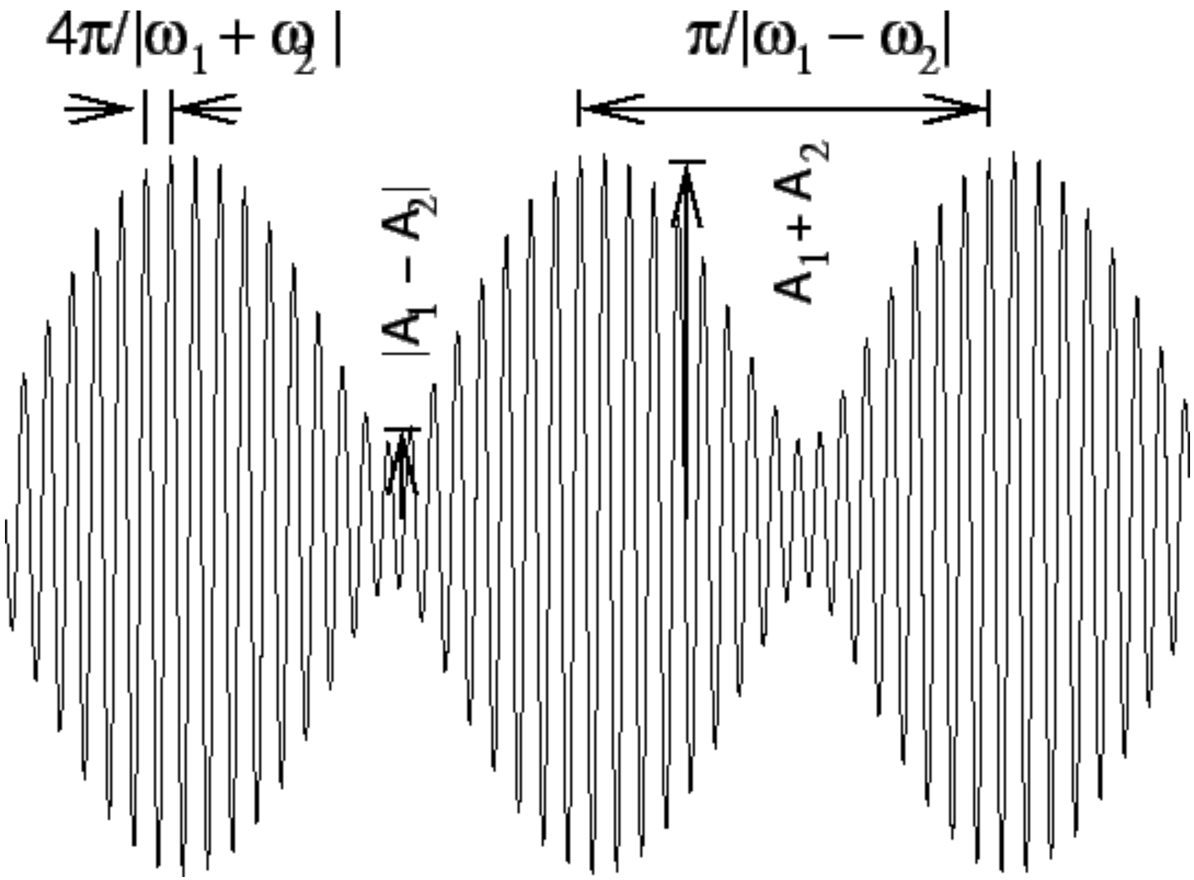
MAS, DEPOIS QUE $V \to \infty$:

$G(\vec{k},t) = -i Z_k\, e^{-i\tilde{\epsilon}_k t}\, e^{-\gamma_k t}$

- COMO É POSSÍVEL SOMAR CONTRIBUIÇÕES OSCILANTES E OBTER UMA FORMA QUE DECAI EXPONENCIALMENTE?
- EQUIVALENTEMENTE, NO PLANO DE $\omega$, TEMOS UMA SOMA SOBRE PÓLOS SIMPLES NO EIXO REAL DANDO ORIGEM A UM PÓLO FORA DO EIXO REAL:

LIMITE TERMODINÂMICO

# Batimentos




SE $\omega_1 \simeq \omega_2$

PERÍODO CURTO:

$$\sim \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \sim T_C$$

PERÍODO LONGO:

$$\sim \frac{1}{|\omega_1 - \omega_2|} \sim T_L$$

NUM LÍQUIDO DE FERMI TEMOS DUAS ESCALAS DE TEMPO:

i) $\frac{1}{\gamma_k}$ : MEIA-VIDA DA QP

ii) $\frac{1}{\Delta E}$ : SEPARAÇÃO ENTRE ENERGIAS CONSECUTIVAS DAS QP

NO LIMITE TERMODINÂMICO:

$\Delta E \to 0$

NA ANALOGIA COM O BATIMENTO:

$T_C \to \frac{1}{\gamma_k}$ $\quad$ $T_L \to \frac{1}{\Delta E} \to \infty$

# A auto-energia de líquidos de Fermi

VIMOS QUE: $G(\vec{k},\omega) = \dfrac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} - \Sigma(\vec{k},\omega)}$ ; $\epsilon_{\vec{k}} = \dfrac{k^2}{2m} - \mu$

$= \dfrac{k^2}{2m} - \dfrac{k_F^2}{2m}$

NUM SISTEMA HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO:

$$\Sigma(\vec{k},\omega) = \Sigma(k,\omega)$$

$= \dfrac{(k+k_F)(k-k_F)}{2m}$

NO EXERCÍCIO 3.14 DO FHW (LISTA):

$\xrightarrow{k \sim k_F} \dfrac{k_F}{m}(k-k_F)$

A F.G. TEM POLOS EM: $\tilde{\epsilon}_k + i\gamma_k$

$= v_F(k-k_F)$

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \Sigma'(k,\tilde{\epsilon}_k)$$

$$\gamma_k = \frac{\Sigma''(k,\tilde{\epsilon}_k)}{1 - \frac{\partial}{\partial\omega}\Sigma'(k,\omega)\Big|_{\omega=\tilde{\epsilon}_k}}$$

(SE $\gamma_k \ll \tilde{\epsilon}_k$)

ONDE: $\Sigma'(k,\omega) = \mathrm{Re}[\Sigma(k,\omega)]$

$\Sigma''(k,\omega) = \mathrm{Im}[\Sigma(k,\omega)]$

TEOREMA DE LUTTINGER: PHYS. REV. **119**, 1153 (1960)

1) $\tilde{\epsilon}_k \to 0$ QUANDO $k \to k_F$ ONDE $k_F$ É DADO PELO SISTEMA NÃO-INTERAGENTE: $\dfrac{k_F^3}{3\pi^2} = \dfrac{N}{V}$

AS INTERAÇÕES NÃO ALTERAM O VOLUME DA ESFERA DE FERMI.

2) $\Sigma''(k,\omega) \sim A\omega^2 + B(k-k_F)^2$

ELA SE ANULA EM $\omega = 0$ E $k = k_F$ E O FAZ DE FORMA QUADRÁTICA

DE 1) $\tilde{\epsilon}_k = v_F^*(k-k_F) = \dfrac{k_F}{m^*}(k-k_F)$

$m^*$ : MASSA RENORMALIZADA OU EFETIVA

$v_F^*$ : VELOCIDADE DE FERMI RENORMALIZADA

EXPANDIR $\Sigma(k,\omega)$ EM TORNO DE $k_F$ E $\omega=0$:

$$\Sigma'(k,\omega) = \Sigma'(k_F,0) + \left.\frac{\partial \Sigma'}{\partial k}\right|_{k_F,\omega=0} (k-k_F) + \left.\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right|_{\omega=0,k_F} \omega + O\left(\omega^2, (k-k_F)^2\right)$$

$0$

VIMOS QUE:

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \Sigma'(k,\tilde{\epsilon}_k)$$

SE $k \to k_F$: $V_F^*(k-k_F) = V_F(k-k_F) + \Sigma'(k_F,0) + \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}(k-k_F)$

$$+ \left.\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right|_{\omega=0,k_F} V_F^*(k-k_F)$$

NO LIMITE: $\Sigma'(k_F,0) = 0$

LEVANDO NA FUNÇÃO DE GREEN:

$$[G(\vec{k},\omega)]^{-1} = \omega - V_F(k-k_F) - \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}(k-k_F) - \left(\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right)\omega - i\Sigma''$$

$$= \overbrace{\left[1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right]}^{a}\omega - \overbrace{\left[V_F + \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}\right]}^{b}(k-k_F) - i\Sigma''$$

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{a\omega - b(k-k_F) - i\Sigma''} = \frac{1/a \rightarrow z_k}{\omega - \underbrace{\frac{b}{a}(k-k_F)}_{\tilde{\epsilon}_k} - i\underbrace{\frac{\Sigma''}{a}}_{\gamma_k}}$$

$$\tilde{\epsilon}_k = v_F^*(k-k_F) = \frac{k_F}{m^*}(k-k_F)$$

$$\Rightarrow \frac{k_F}{m^*} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{k_F}{m} + \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}}$$

MULTIPLICO POR $\frac{m}{k_F}$

$$\frac{m}{m^*} = \frac{1 + \frac{m}{k_F}\frac{\partial \Sigma'}{\partial k}\Big|_{\omega=0,k_F}}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0,k_F}}$$

$$z_k = \frac{1}{a} = \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0,k_F}} \quad ; \quad \gamma_k = \frac{\Sigma''}{a} = \frac{\Sigma''(k,\omega)}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0,k_F}}$$

$$\propto \omega^2, (k-k_F)^2 \ll \tilde{\epsilon}_k$$

# Medidas do tamanho da superfície de Fermi por oscilações quânticas

Efeito de Haas-van Alphen: pequenas oscilações da magnetização como função do campo magnético.

- As frequências como função de 1/B são medidas das áreas extremas da superfície de Fermi.
- A dependência com a temperatura dá a massa efetiva.
- Também resistividade (Shubnikov-de Haas)

# Medidas do tamanho da superfície de Fermi por oscilações quânticas

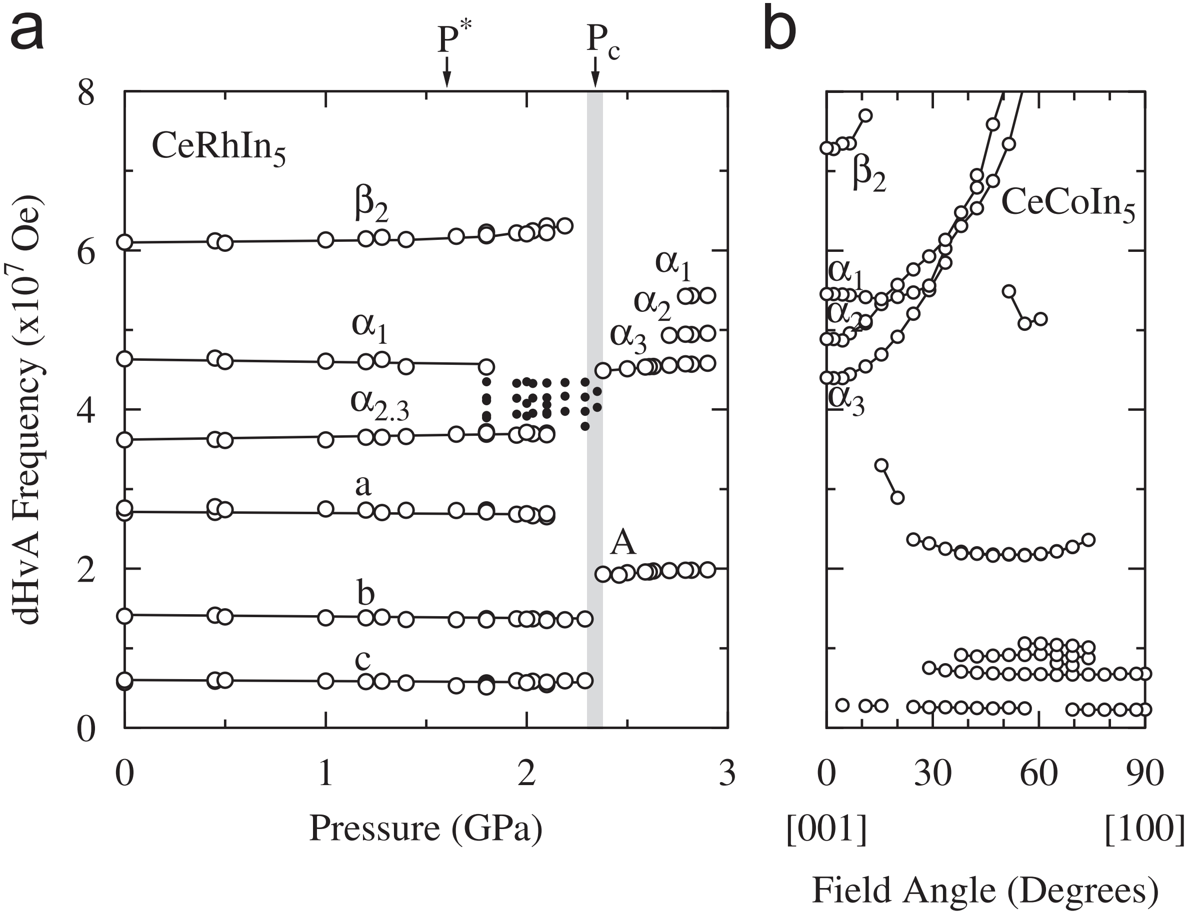



Fig. 5. (a) Pressure dependence of the dHvA frequency in $CeRhIn_5$ and (b) field angle dependence of the dHvA frequency in $CeCoIn_5$ [7].

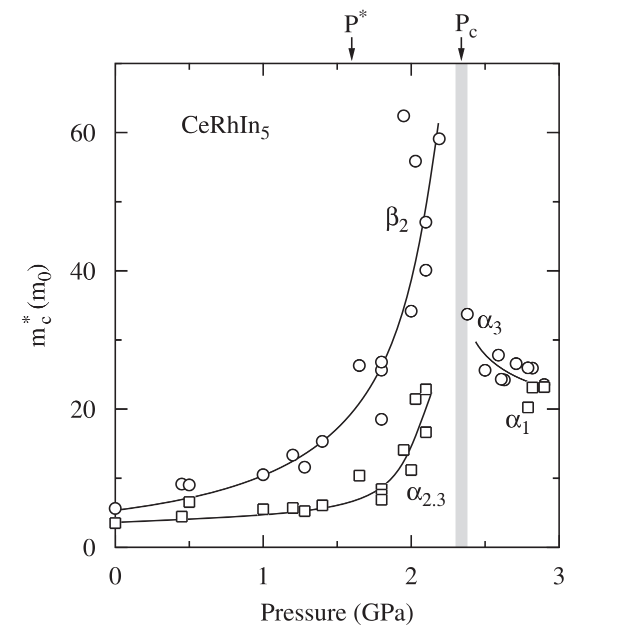
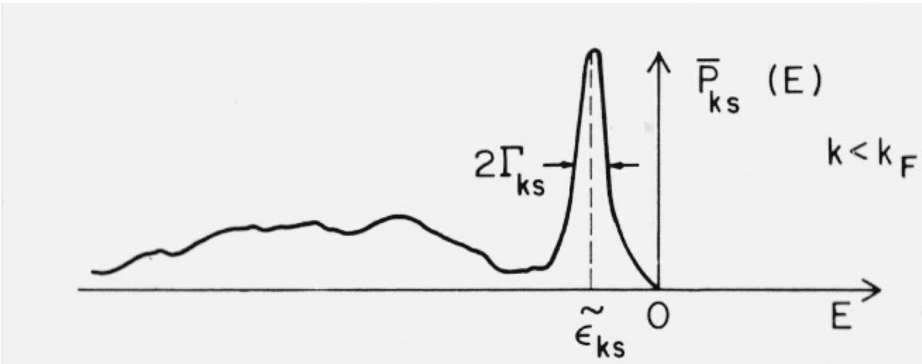



Fig. 6. Pressure dependence of the cyclotron mass in $CeRhIn_5$ [7].

R. Settai et al., J. Magn. Magn. Mat. **310**, 541 (2007)

# Quase-partículas ou não?

(OP $T_c$=90K) $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$



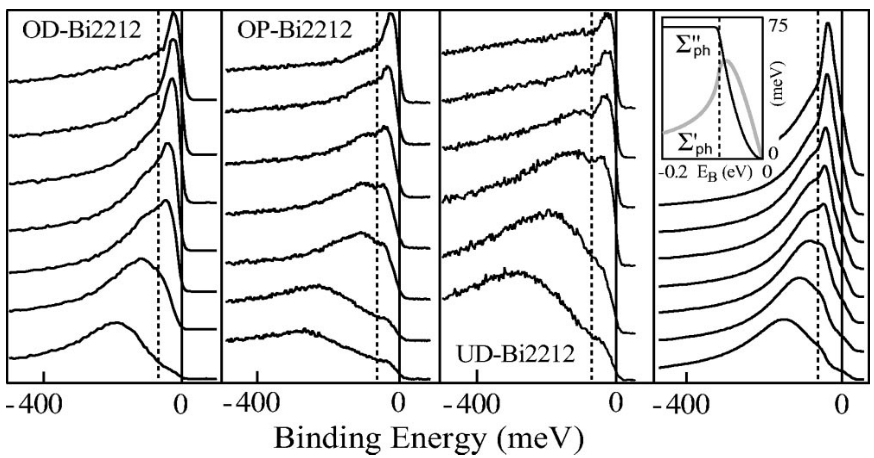




FIG. 79. Low-temperature spectra from overdoped (OD), optimally doped (OP), and underdoped (UD) Bi2212 along (0,0)-($\pi$,$\pi$). Right panel: spectral function for an electron-phonon coupled system in the Debye model at $T=0$; $\Sigma'(\omega)$ and $\Sigma''(\omega)$ are shown in the inset, where the dashed line indicates the maximum phonon energy. From Lanzara *et al.*, 2001.

Rev. Mod. Phys. **75**, 473 (2003)

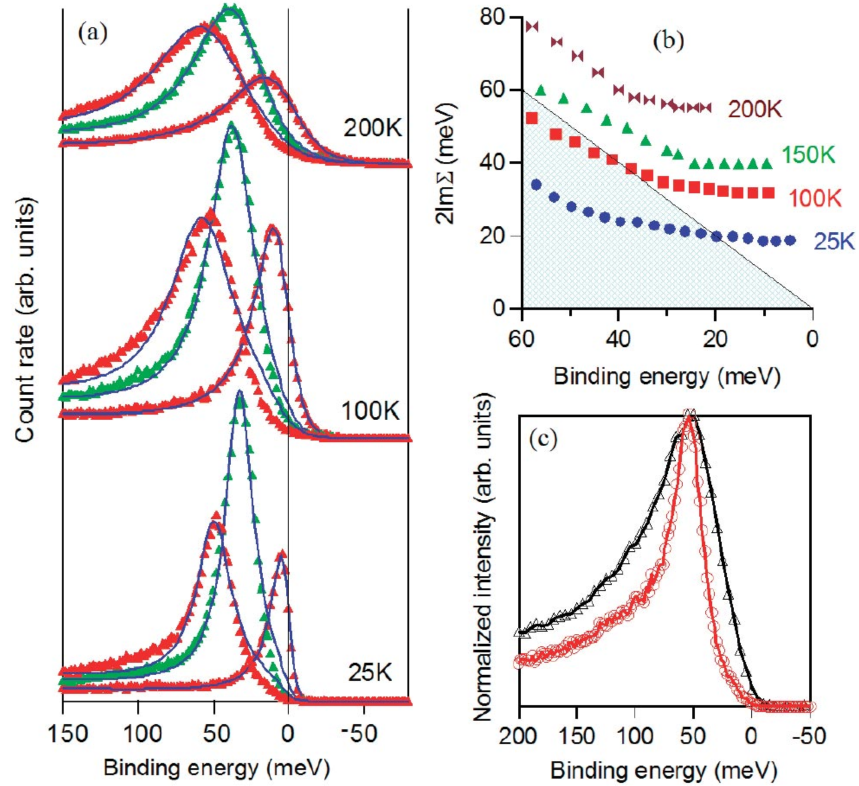



FIG. 3 (color). (a) EDCs (triangles) and Lorentzian fits (blue lines) at different temperatures (offset for clarity) for three emission angles each. (b) Summary of EDC fitting results showing full-width $2\,\mathrm{Im}\Sigma$ versus peak position. The shaded region indicates where peak full widths are sharper than their energy, which should be considered quasiparticle-like. (c) Raw EDCs from the laser (red circles) and 52 eV synchrotron source (black triangles) measured at the same **k** value.

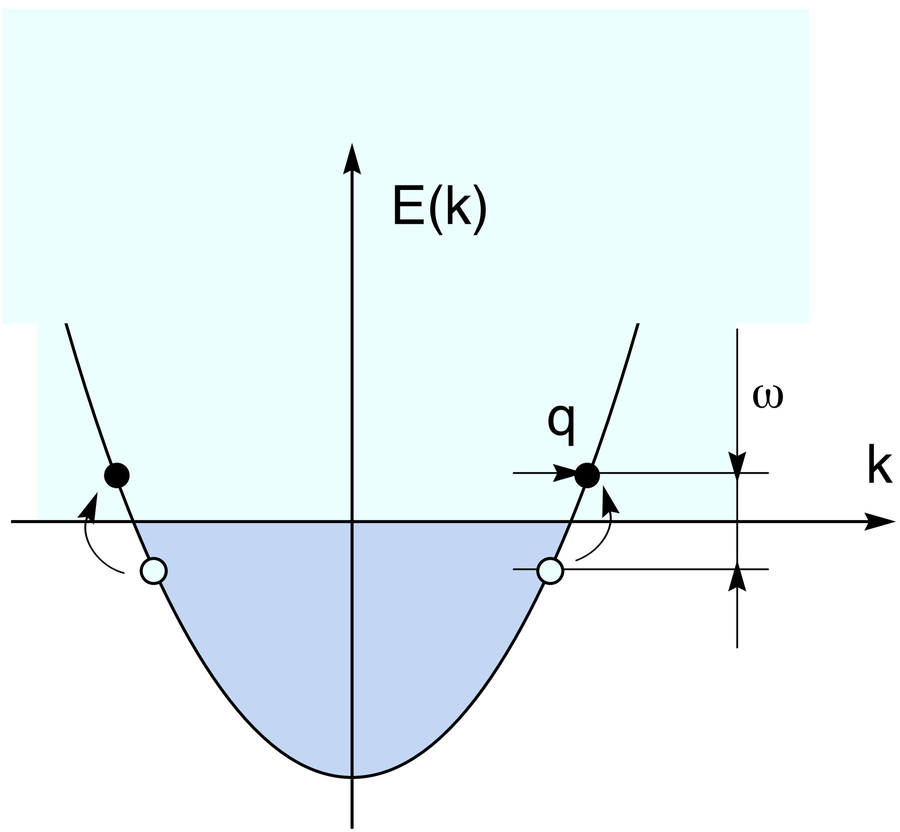
Laser ARPES: Phys. Rev. Lett. **96**, 017005 (2006)

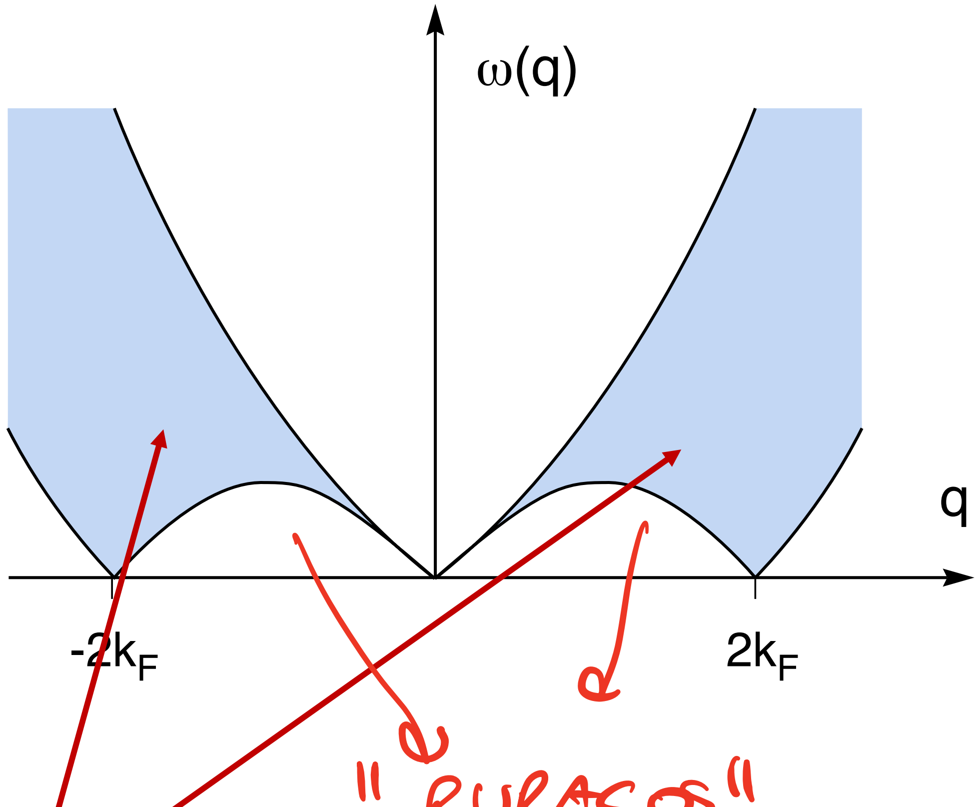
# Líquidos de Luttinger (1D)

Em 1D, a teoria dos líquidos de Fermi não é válida:

- Espaço de fase diferente (superfície de Fermi são pontos).
- Funções de Green não têm polos simples, mas pontos de ramificação no plano $\omega$ complexo.
- Não há quase-partículas estáveis.
- Separação de spin e carga: "holons" e "spinons" são as excitações estáveis.

# Líquidos de Luttinger (1D)




Excitações partícula-buraco

# Líquidos de Luttinger (1D)

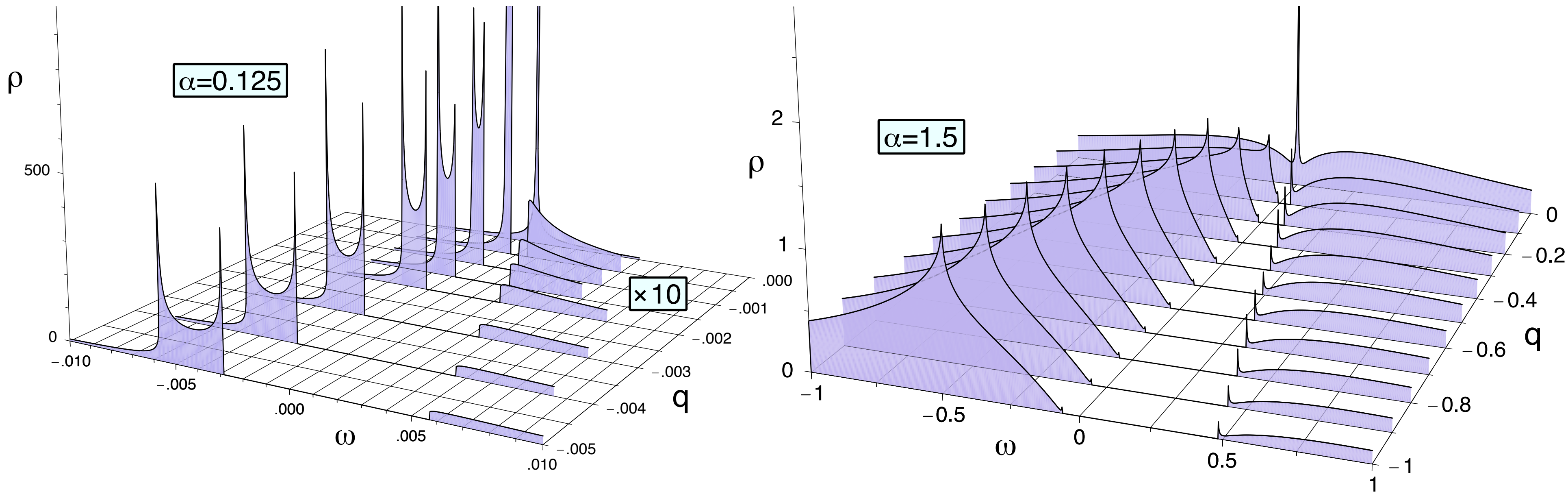



**FIGURE 2.** Spectral functions of a Luttinger liquid. The three signals represent the holon, the spinon, and the shadow bands (left to right). Left panel: weak/short-range interactions, $\alpha = 1/8$ ($K_\rho = 1/2$). Right panel: strong/long-range interactions, $\alpha = 1.5$ ($K_\rho = 1/8$).

Johannes Voit, AIP Conference Proceedings **544**, 309 (2000)