FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

1º Semestre de 2025

13/05/2025

Aula 18

Interpretação física da Função de Green

PARA SISTEMAS COM INVARIÂNCIA TRANSLACIONAL ONDE $\vec{k}$ É UM BOM NÚMERO QUÂNTICO $(t>0)$:

$$iG(\vec{k},t) = \langle \Phi_{0H} | c_{\vec{k}H}(t) c^{\dagger}_{\vec{k}H}(0) | \Phi_{0H} \rangle$$

$$= \langle \Phi_{0H} | e^{iHt} c_{\vec{k}} e^{-iHt} c^{\dagger}_{\vec{k}} | \Phi_{0H} \rangle =$$

$$\left[|\Phi_{0H}\rangle = e^{iHt} |\Phi_{0S}\rangle = e^{iE_0 t} |\Phi_{0S}\rangle \right]$$

$$= e^{iE_0 t} \underbrace{\langle \Phi_{0S} | c_{\vec{k}}}_{\langle \psi(\vec{k})|} e^{iHt} \underbrace{c^{\dagger}_{\vec{k}} | \Phi_{0S} \rangle}_{|\Phi(\vec{k})\rangle}$$

$$iG(\vec{k},t) = e^{iE_0 t} \langle \Phi(\vec{k}) | \underbrace{e^{iHt}}_{U(t,0)} | \Phi(\vec{k}) \rangle$$

MEDE A AMPLITUDE DE $|\psi(\vec{k})\rangle$ PERDURAR DE UM CERTO TEMPO $\underline{t}$.

DA REPRESENTAÇÃO DE LEHMANN:

$$G(\vec{k},t) = -iV \sum_{n} |\langle \Psi_{n\vec{k}} | c^{\dagger}_{\vec{k}} | \Phi_{0s} \rangle|^2 e^{-i[\epsilon_{n\vec{k}}(N+1)]t}$$

NO ESPAÇO ω

$$G(\vec{k},\omega) = V \sum_{n} \frac{|\langle \Psi_{n\vec{k}} | c^{\dagger}_{\vec{k}} | \Phi_{0s} \rangle|^2}{\omega - \epsilon_{n\vec{k}}(N+1) + i\eta}$$

NO LIMITE TERMODINÂMICO:

$$G(\vec{k},\omega) = \int_{0}^{\infty} \frac{A(\vec{k},\epsilon)\, d\epsilon}{\omega - \epsilon + i\eta}$$

PARA $t < 0$, $A(\vec{k},\epsilon) \longrightarrow B(\vec{k},\epsilon)$

Função espectral de um líquido de Fermi

$$\boxed{A\left(\mathbf{k},\epsilon\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\gamma_{\mathbf{k}}Z_{\mathbf{k}}}{\left(\epsilon-\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}\right)^2+\gamma_{\mathbf{k}}^2}}\qquad \gamma_{\mathbf{k}}\ll\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$$

ESSA FORMA DA $A(\vec{k},\epsilon)$, VÁLIDA PARA OS LÍQUIDOS DE FERMI, OBTEMOS:

$$\boxed{G(\vec{k},\omega)=\frac{Z_{\vec{k}}}{\omega-\tilde{\epsilon}_{\vec{k}}+i\gamma_{\vec{k}}}}$$

Z_k: PESO OU RESÍDUO DE QUASEPARTÍCULA $\boxed{Z_{\vec{k}}\in(0,1]}$

$\tilde{\epsilon}_{\vec{k}}$: ENERGIA DE EXCITAÇÃO DA QUASEPARTÍCULA

$\gamma_{\vec{k}}=\frac{1}{2\tau_{\vec{k}}}$: INVERSO DA MEIA-VIDA DA QUASEPARTÍCULA

DAQUI OBTÉM-SE:

$$G(\vec{k},t) = -i\, z_{\vec{k}}\, e^{-i\tilde{\epsilon}_{\vec{k}} t}\, e^{-\gamma_{\vec{k}} t}$$

COMPORTAMENTO OSCILATÓRIO, COM FREQUÊNCIA DADA PELA ENERGIA DA EXCITAÇÃO, COM AMPLITUDE $z_{\vec{k}}$ E COM DECAIMENTO COM MEIAVIDA DADA POR $\frac{1}{\gamma_{\vec{k}}}$ (OSCILADOR SUB-AMORTECIDO)

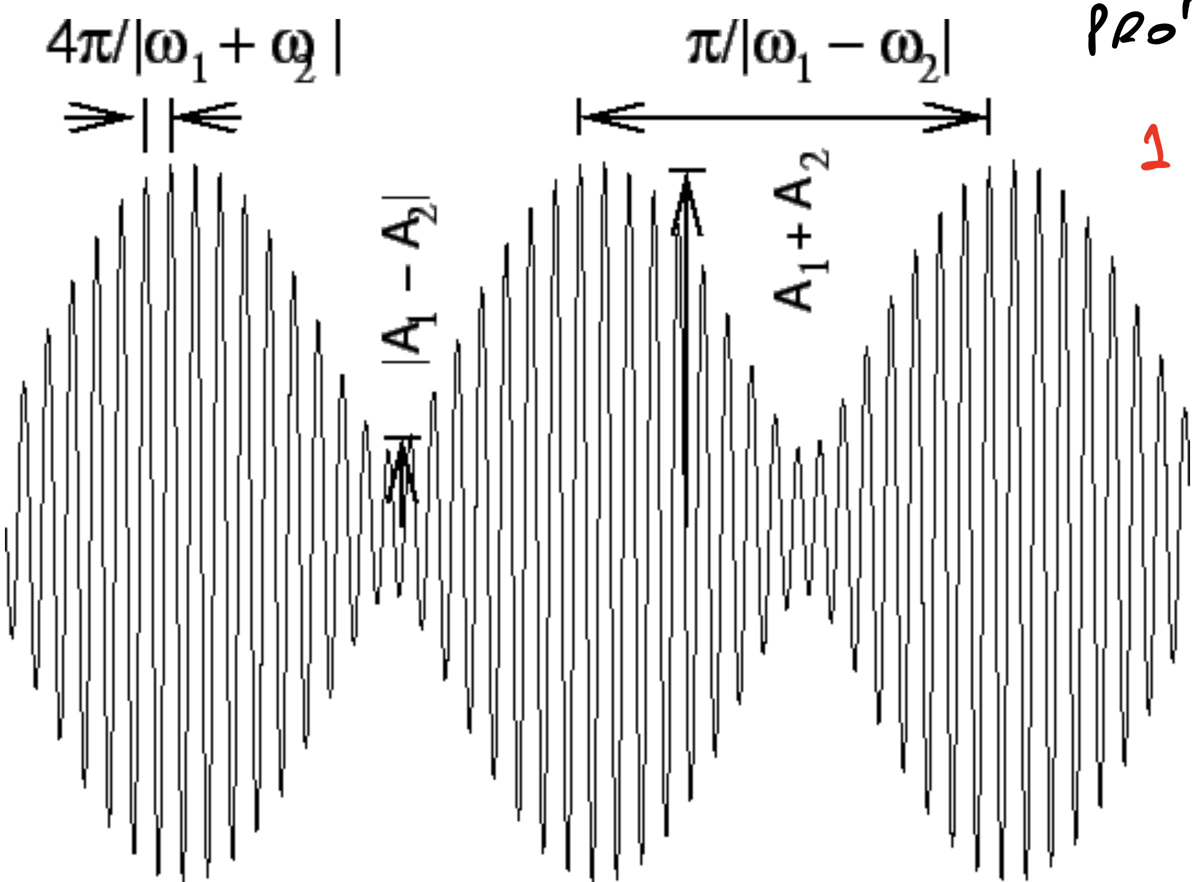
Importância do limite termodinâmico

POR QUE: (1) UMA SOMA DE EXPONENCIAIS OSCILANTES NO TEMPO DÁ ORIGEM A UMA EXPONENCIAL AMORTECIDA?

(2) UMA SOMA DE POLOS SIMPLES NO PLANO DE $\underline{\omega}$ COMPLEXO LIGEIRAMENTE AFASTADOS DO EIXO REAL POR η DÁ ORIGEM A UM POLO FINITAMENTE AFASTADO DO EIXO REAL ($\gamma_{\vec{k}}$)?

RESP.: LIMITE TERMODINÂMICO.

Batimentos



SUPERPOSIÇÃO DE 2 FREQUÊNCIAS ω_1 E ω_2 PRÓXIMAS:

1 PERÍODO CURTO:

$$\sim \frac{1}{\omega_1+\omega_2}$$

1 PERÍODO LONGO:

$$\sim \frac{1}{|\omega_1-\omega_2|}$$

NO NOSSO CASO, O ANÁLOGO DE $\omega_1+\omega_2$ É $\tilde{E}_{\vec{k}}$ E O ANÁLOGO DE $|\omega_1-\omega_2| \sim \Delta E$ = SEPARAÇÃO ENTRE OS NÍVEIS $E_{n\vec{k}}(n+1)$

NO LIMITE TERMODINÂMICO:

$$\Delta \epsilon \to 0 \quad \sim \quad \tau_{\text{longo}} \to \infty$$

A auto-energia de líquidos de Fermi

EXERCÍCIO 3.14 DO F+W:

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} - \Sigma(\vec{k},\omega)}$$

OS POLOS DE $G(\vec{k},\omega)$: $\omega = \tilde{\epsilon}_k + i\gamma_k$ SÃO TAIS QUE

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \mathrm{Re}\,\Sigma(\vec{k},\tilde{\epsilon}_k)$$

$$\gamma_k = \frac{\mathrm{Im}\,\Sigma(\vec{k},\tilde{\epsilon}_k)}{1 - \left[\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Sigma(\vec{k},\omega)\right]\Big|_{\omega=\tilde{\epsilon}_k}} \qquad (\gamma_k \ll \tilde{\epsilon}_k)$$

DENTRO DA TEORIA DOS LÍQUIDOS DE FERMI, HÁ UM TEOREMA (DE LUTTINGER) (PR 119, 1153 (1960)), PROVADO EM TEORIA DE PERTURBAÇÃO,

(i) $\tilde{\epsilon}_k \rightarrow 0$ QUANDO $k \rightarrow k_F$

(ii) $\gamma_k \rightarrow 0$, QUANDO $k \rightarrow k_F$

ONDE k_F É O VALOR NÃO INTERAGENTE:

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

A SUPERFÍCIE DE FERMI MANTÉM O SEU VOLUME MESMO NA PRESENÇA DE INTERAÇÕES,

COMO CONSEQUÊNCIA:

$$\epsilon_k \cong v_F^{(0)}(k-k_F) = \frac{k_F}{m}(k-k_F) \quad \text{SE} \quad k \simeq k_F$$

$$\tilde{\epsilon}_k \cong v_F\,(k-k_F) = \frac{k_F}{m^*}(k-k_F)$$

POLOS SÃO OS PONTOS NO PLANO COMPLEXO DE ω ONDE:

$$\omega - \epsilon_k - \Sigma(\vec{k},\omega) = 0 \qquad \Sigma(\vec{k},\omega) = \Sigma'(\vec{k},\omega) + i\,\Sigma''(\vec{k},\omega)$$

TOMANDO PARTE REAL E IMAGINÁRIA E $k \simeq k_F$:

$$\omega - \epsilon_k - \Sigma'(\vec{k},\omega) = 0 \qquad \omega = v_F(k-k_F) \equiv v_F\,\delta k$$

$$\Rightarrow v_F\,\cancel{\delta k} = v_F^{(0)}\,\delta k + \Sigma'(k_F+\delta k, v_F\,\delta k)$$

$$= v_F^{(0)}\,\cancel{\delta k} + \underbrace{\Sigma'(k_F,0)}_{=0 \text{ PELO TEOREMA DE LUTTINGER}} + \frac{\partial\Sigma'}{\partial k}\Big|_{k_F,0}\cancel{\delta k} + \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega}\Big|_{k_F,0} v_F\,\cancel{\delta k}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega}\right) v_F = v_F^{(0)} + \frac{\partial\Sigma'}{\partial k} \Rightarrow v_F = \frac{v_F^{(0)} + \frac{\partial\Sigma'}{\partial k}}{1 - \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega}}$$

$$\boxed{\frac{v_F}{v_F^{(0)}} = \frac{m}{m^*} = \frac{1 + \frac{1}{v_F^{(0)}}\frac{\partial\Sigma'}{\partial k}\Big|_{k_F,0}}{1 - \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega}\Big|_{k_F,0}}}$$

DENTRO DA TEORIA DOS LÍQUIDOS DE FERMI:

$$\Sigma''(\vec{k},\omega) \cong O\left[(k-k_F)^2, \omega^2\right] \ll \tilde{\varepsilon}_k \sim V_F(k-k_F)$$

LEVANDO NA FUNÇÃO DE GREEN:

$$\Sigma(k,\omega) = \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}(k-k_F) + \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\,\omega + i\,\Sigma''$$

$$\Rightarrow G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - V_F^{(0)}(k-k_F) - \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}(k-k_F) - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\omega - i\,\Sigma''}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right)\omega - \left(V_F^{(0)} + \frac{\partial \Sigma'}{\partial k}\right)(k-k_F) - i\,\Sigma''}$$

$$= \frac{\overbrace{1/\left(1-\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}\right)}^{Z_k}}{\omega - \underbrace{\frac{\left(V_F^{(0)} + \partial\Sigma'/\partial k\right)}{1-\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}}}_{V_F = \frac{k_F}{m^*}}(k-k_F) - i\,\frac{\Sigma''}{1-\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}}}$$

$$G(k,\omega) = \frac{z_k}{\underbrace{\omega - \frac{k_F}{m^*}(k-k_F)}_{\tilde{\epsilon}_k} + i\gamma_k}$$

$$\gamma_k = \frac{\Sigma''}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}} \qquad z_k = \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega}}$$

$$\frac{\partial \Sigma'}{\partial \omega} < 0 \Rightarrow z \in (0,1]$$

Medidas do tamanho da superfície de Fermi por oscilações quânticas

Efeito de Haas-van Alphen: pequenas oscilações da magnetização como função do campo magnético.

- As frequências como função de 1/B são medidas das áreas extremas da superfície de Fermi.
- A dependência com a temperatura dá a massa efetiva.
- Também resistividade (Shubnikov-de Haas)

Medidas do tamanho da superfície de Fermi por oscilações quânticas

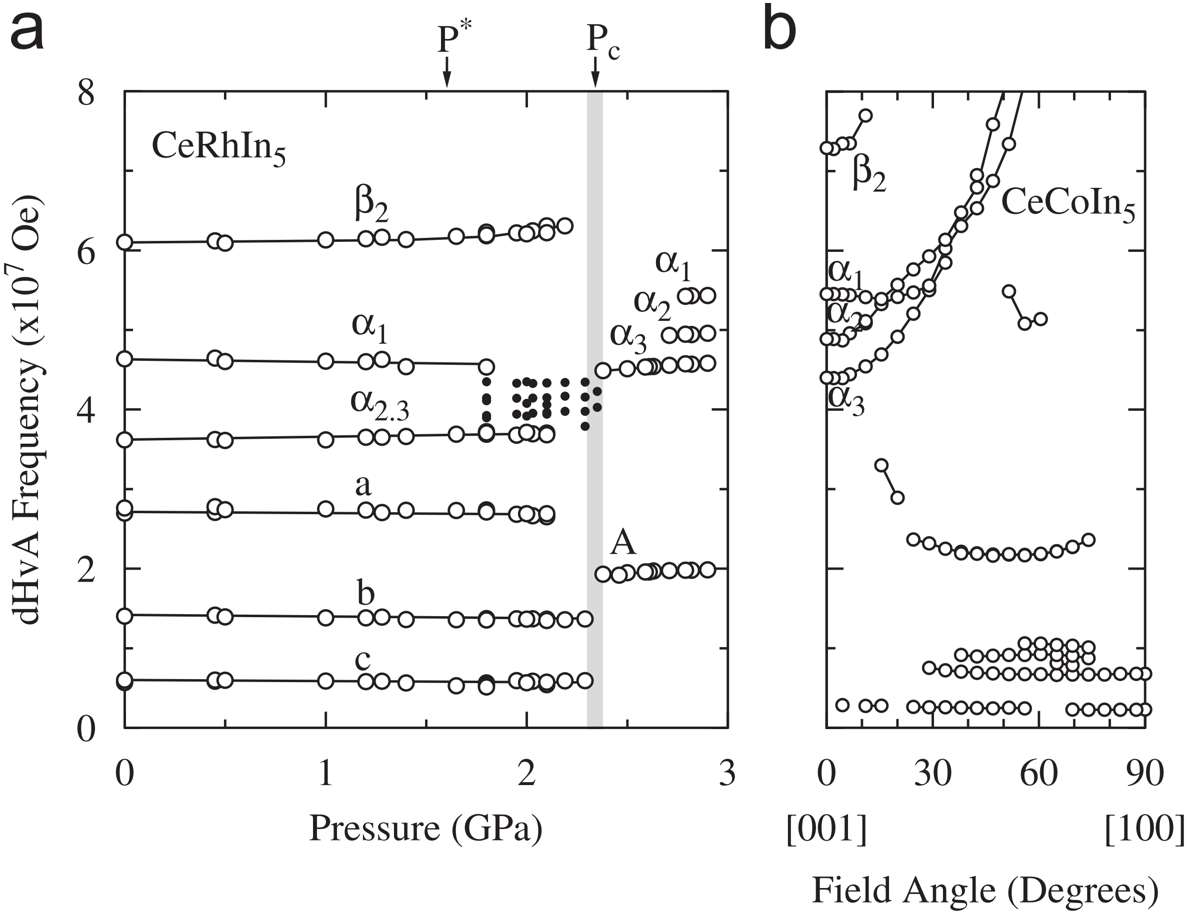


Fig. 5. (a) Pressure dependence of the dHvA frequency in $CeRhIn_5$ and (b) field angle dependence of the dHvA frequency in $CeCoIn_5$ [7].

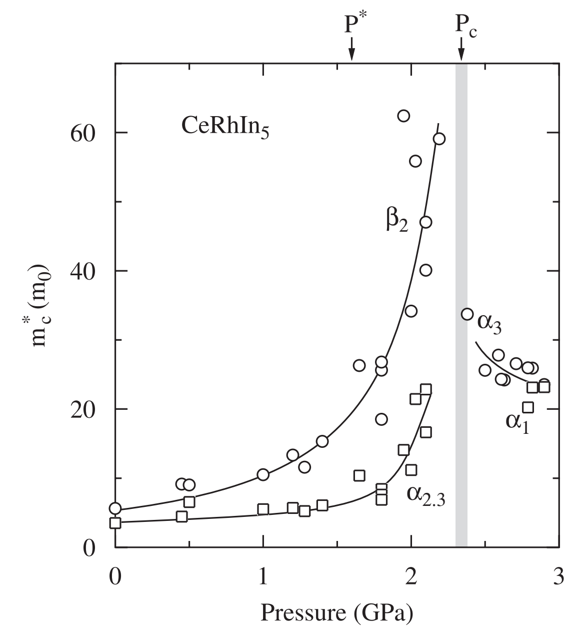
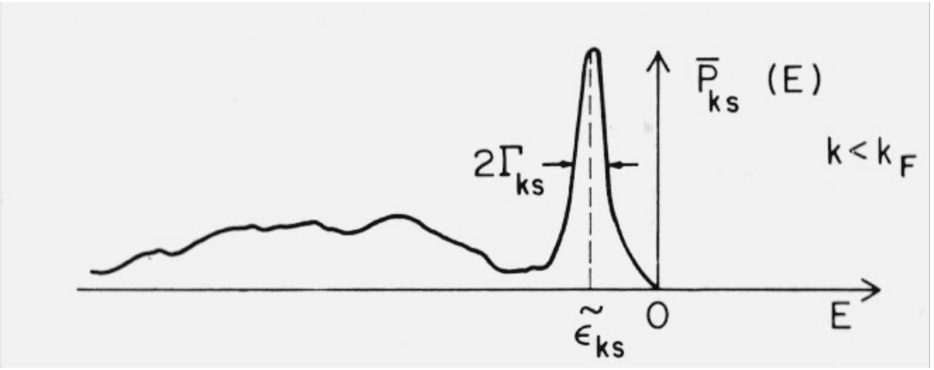


Fig. 6. Pressure dependence of the cyclotron mass in $CeRhIn_5$ [7].

R. Settai et al., J. Magn. Magn. Mat. **310**, 541 (2007)

Quase-partículas ou não?

(OP T_c=90K) $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$



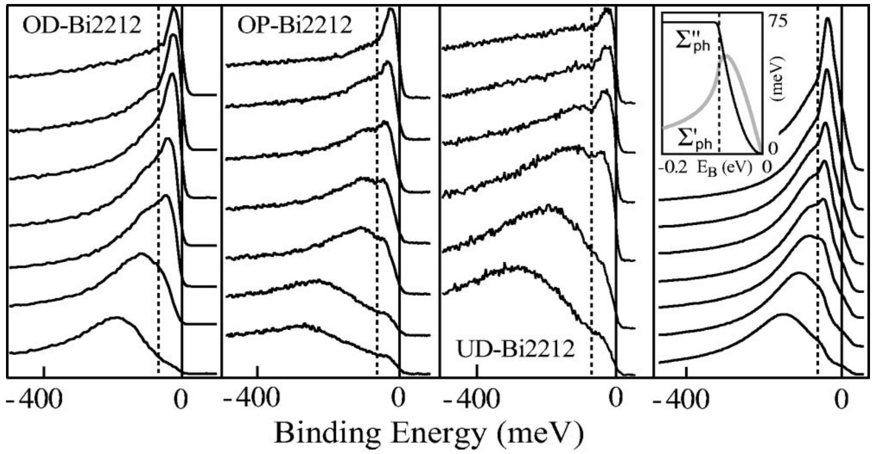


FIG. 79. Low-temperature spectra from overdoped (OD), optimally doped (OP), and underdoped (UD) Bi2212 along (0,0)-(π,π). Right panel: spectral function for an electron-phonon coupled system in the Debye model at $T=0$; $\Sigma'(\omega)$ and $\Sigma''(\omega)$ are shown in the inset, where the dashed line indicates the maximum phonon energy. From Lanzara *et al.*, 2001.

Rev. Mod. Phys. **75**, 473 (2003)

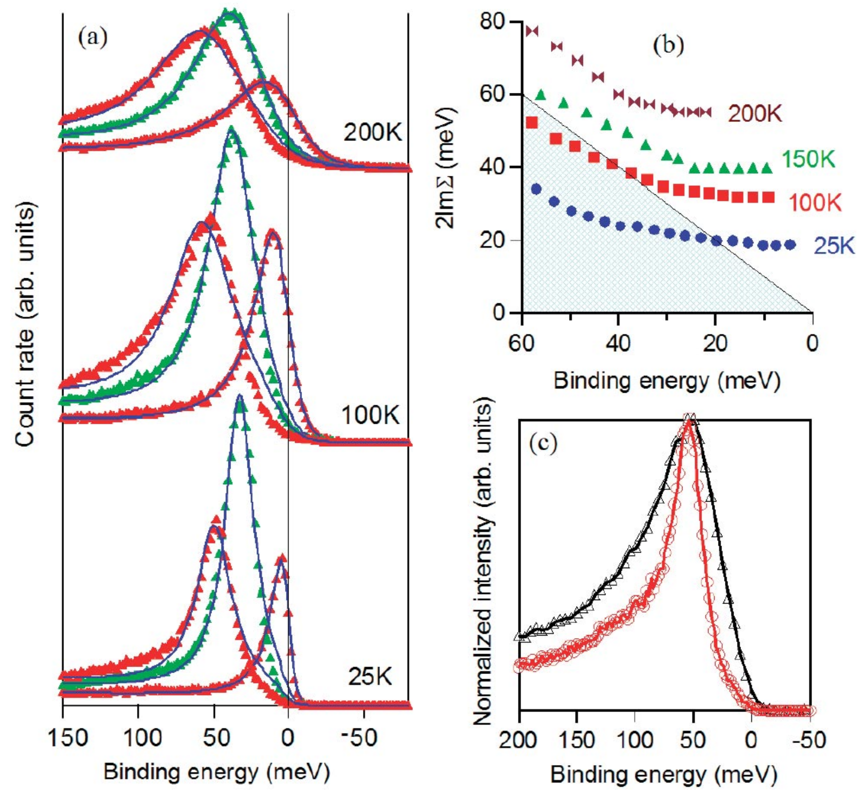


FIG. 3 (color). (a) EDCs (triangles) and Lorentzian fits (blue lines) at different temperatures (offset for clarity) for three emission angles each. (b) Summary of EDC fitting results showing full-width $2\,\mathrm{Im}\Sigma$ versus peak position. The shaded region indicates where peak full widths are sharper than their energy, which should be considered quasiparticle-like. (c) Raw EDCs from the laser (red circles) and 52 eV synchrotron source (black triangles) measured at the same **k** value.

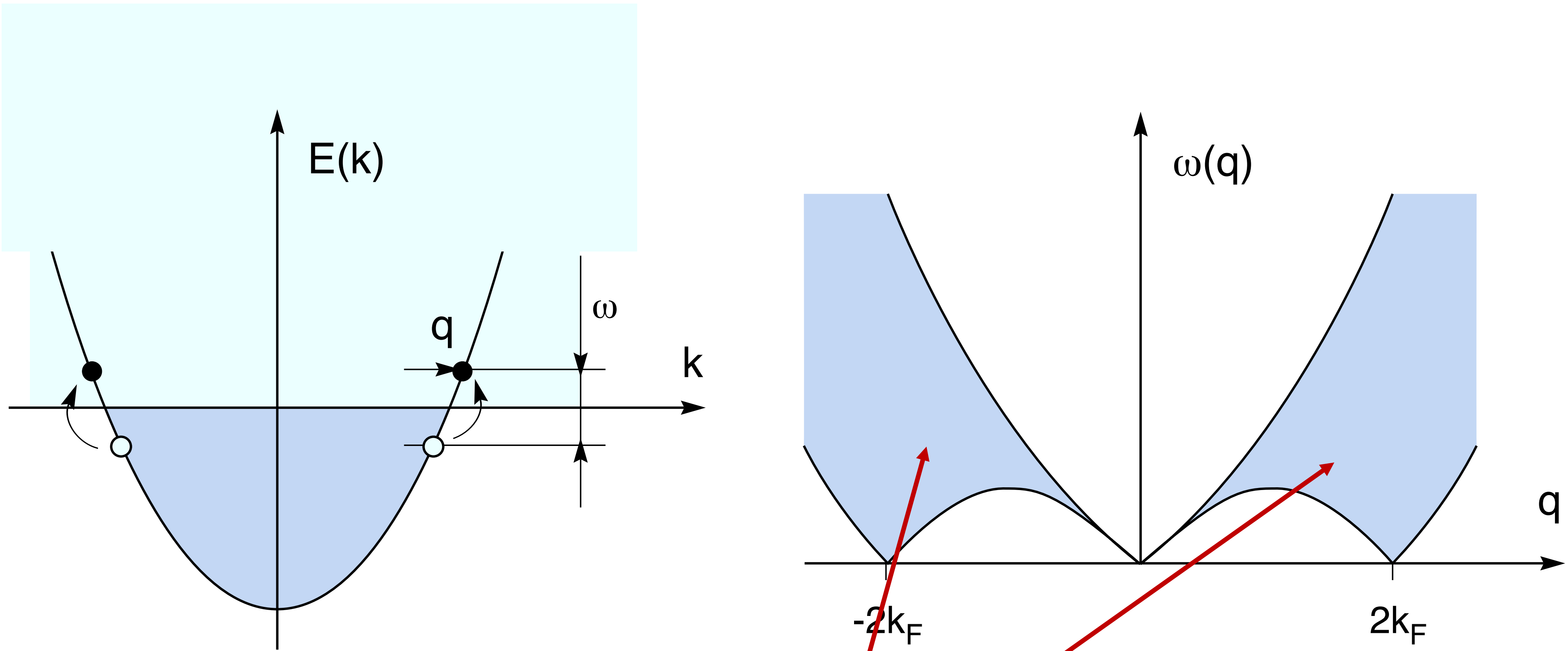
Laser ARPES: Phys. Rev. Lett. **96**, 017005 (2006)

Líquidos de Luttinger (1D)

Em 1D, a teoria dos líquidos de Fermi não é válida:

- Espaço de fase diferente (superfície de Fermi são pontos).
- Funções de Green não têm polos simples, mas pontos de ramificação no plano ω complexo.
- Não há quase-partículas estáveis.
- Separação de spin e carga: “holons” e “spinons” são as excitações estáveis.

Líquidos de Luttinger (1D)



Excitações partícula-buraco

Líquidos de Luttinger (1D)

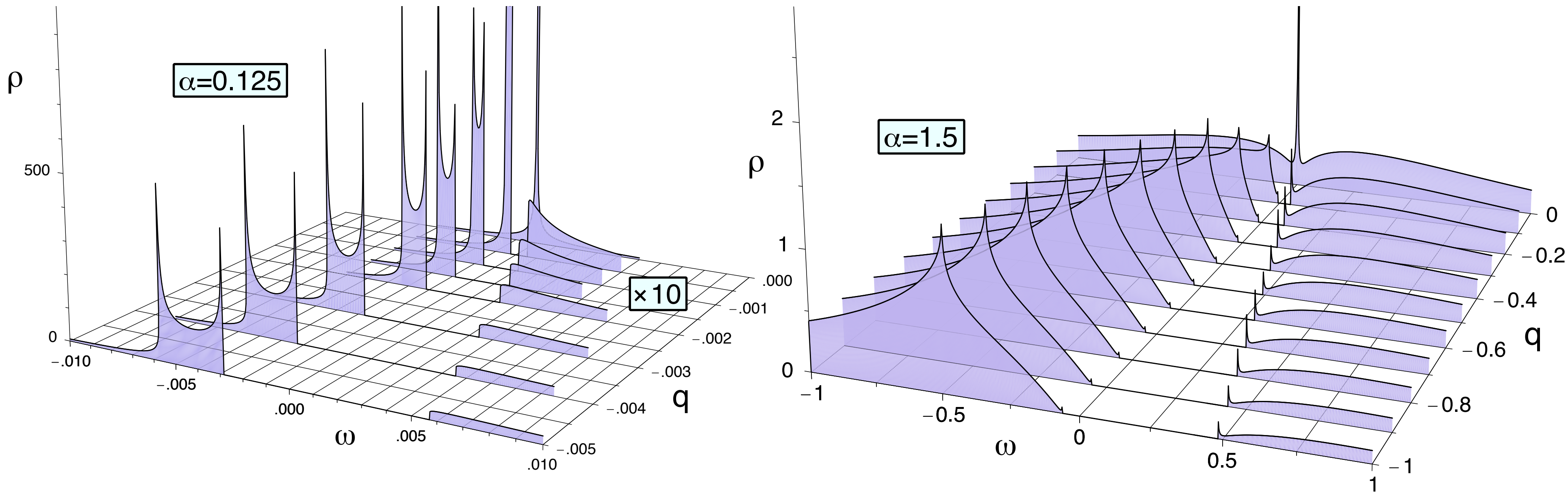


FIGURE 2. Spectral functions of a Luttinger liquid. The three signals represent the holon, the spinon, and the shadow bands (left to right). Left panel: weak/short-range interactions, $\alpha = 1/8$ ($K_\rho = 1/2$). Right panel: strong/long-range interactions, $\alpha = 1.5$ ($K_\rho = 1/8$).

Johannes Voit, AIP Conference Proceedings **544**, 309 (2000)