

FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023

23/11/2023

Aula 28

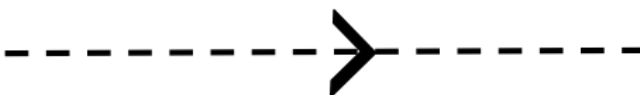
Aula passada

$$H_{ph} = \sum_{\mathbf{q},s} \omega_s(\mathbf{q}) \left(a_{\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{q},s} + \frac{1}{2} \right)$$

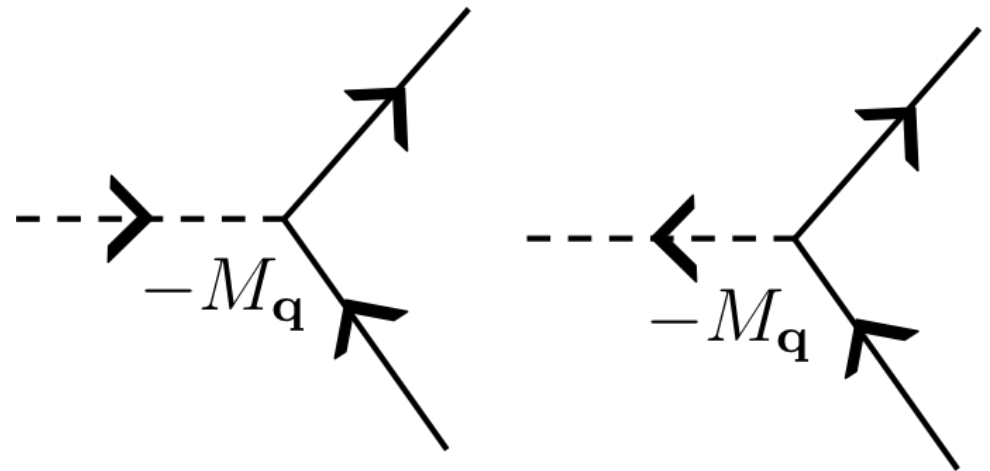
$$M_{\mathbf{q},s} = i\sqrt{N} \frac{\tilde{V}(\mathbf{q}) \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{q})}{\sqrt{2M\omega_s(\mathbf{q})}}$$

$$H_{e-ph} = \sum_{\mathbf{k} \mathbf{q} s \sigma} M_{\mathbf{q},s} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} \left(a_{\mathbf{q},s} + a_{-\mathbf{q},s}^\dagger \right)$$

Função de Green dos fônons


$$\mathcal{D}^{(0)}(i\nu_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{i\nu_n - \omega_s(\mathbf{q})}$$

Vértice elétron-fônon



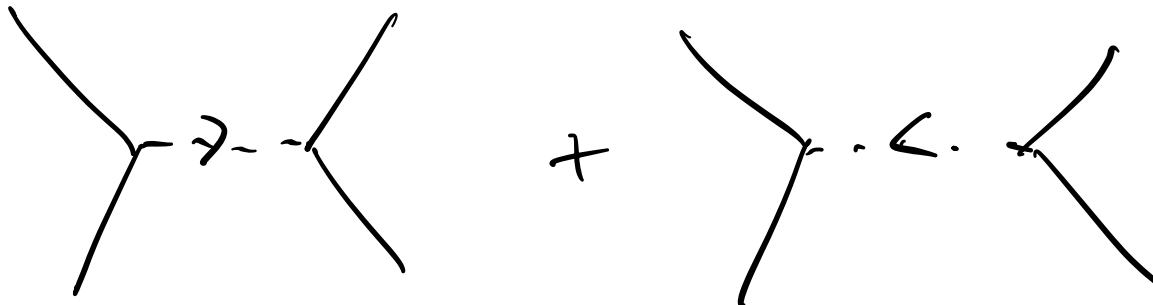
Aula passada

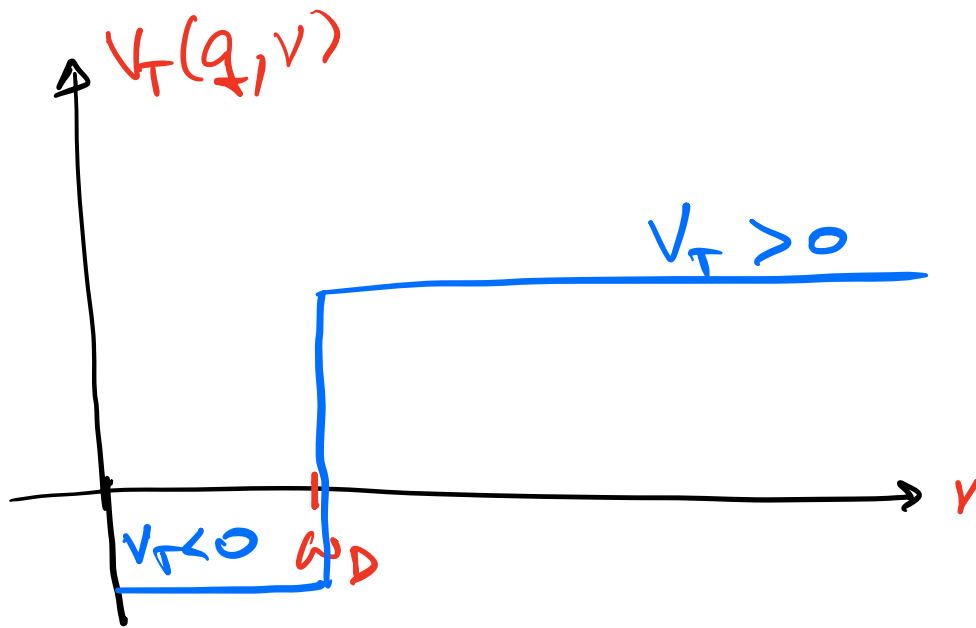
Interação efetiva devido à troca de fônons:

$$V_{eff}(\mathbf{q}, \nu) = |M_{\mathbf{q},s}|^2 \frac{2\omega_s(\mathbf{q})}{\nu^2 - [\omega_s(\mathbf{q})]^2}$$

$$V_{eff}(\mathbf{q}, 0) = -\frac{2|M_{\mathbf{q},s}|^2}{\omega_s(\mathbf{q})} < 0$$

$$\omega_s(\mathbf{q}) < \omega_D \sim 10^{-2} E_F$$





$$V_T(q, v) = V_{eff}(q, v) + V_{coul}(q)$$

$$= \frac{|M|^2 2 \omega_s(q)}{v^2 - \omega_s^2(q)} + \frac{e^2}{4\pi q^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{>0 \quad 0 \quad <0}$
 >0

VAMOS ASSUMIR:

$$V_T < 0 \quad |v| < \omega_D$$

Hamiltoniano efetivo BCS

$$H = H_0 + H_{BCS}$$

$$H_0 = \sum_{\vec{k}, \sigma} E(\vec{k}) c_{\vec{k}, \sigma}^\dagger c_{\vec{k}, \sigma} \quad (\text{UMA BANDA DE ELÉTRONS LIVRES})$$

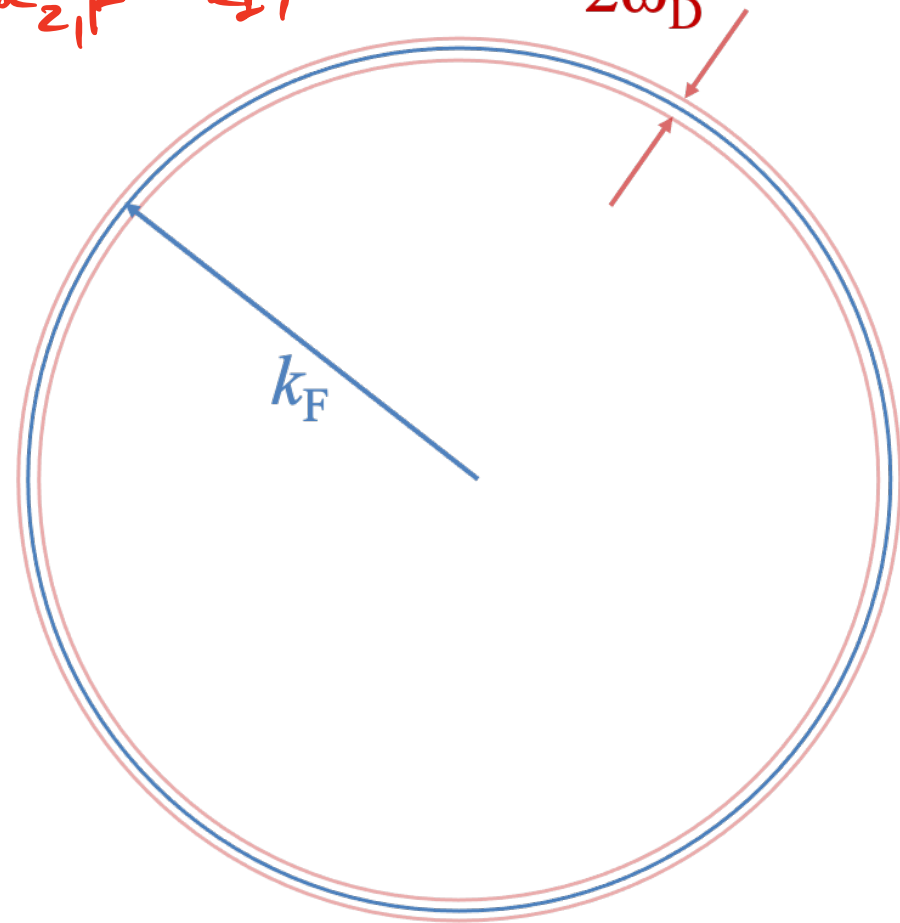
$$H_{BCS} = \frac{\lambda}{2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \uparrow}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \uparrow}^\dagger c_{\vec{k}_2, \uparrow} c_{\vec{k}_1, \downarrow} F(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q})$$

$F(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q})$ IMPOE QUE:

$$= 1 \quad \text{SE} \quad \begin{aligned} |E(\vec{k}_1)| &< \omega_D \\ |E(\vec{k}_2)| &< \omega_D \\ |E(\vec{k}_1 + \vec{q})| &< \omega_D \\ |E(\vec{k}_2 - \vec{q})| &< \omega_D \end{aligned}$$

= 0 DO CONTRÁRIO

$$\lambda < 0$$



ANÁLISE DIAGRAMÁTICA DA INSTABILIDADE DE COOPER:

- COOPER MOSTROU QUE:

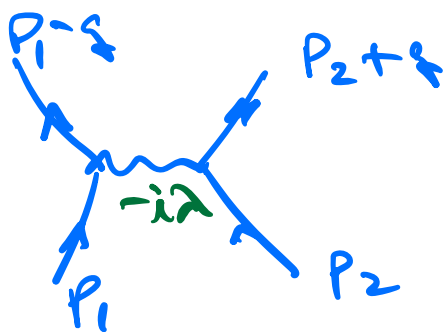
. 2 e^- 's COM INTERAÇÃO ATRATIVA

. NA PRESENÇA DE UM GÁS DE FERMI COM k_f CUJO ÚNICO EFEITO É "PROIBIR" A OCUPAÇÃO DOS ESTADOS COM $k < k_f$ PELOS 2 e^- 's.

ELE MOSTROU QUE, NÃO IMPORTA QUÃO FRACA SEJA A ATRAÇÃO, UM ESTADO LIGADO SEMPRE SE FORMARÁ!

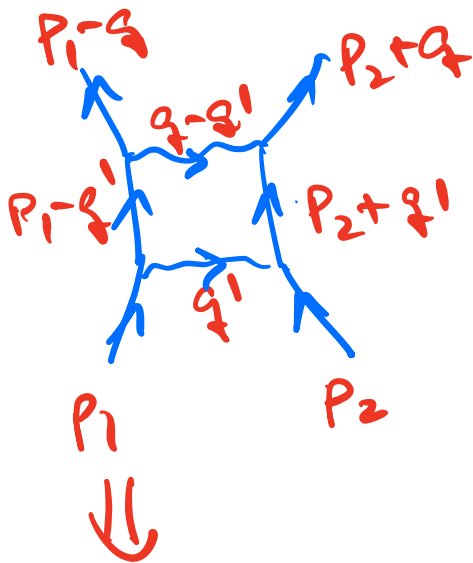
VAAMOS MOSTRAR O MESMO EFEITO APARECENDO NA FUNÇÃO DE GREEN DE 2 CORPOS ATRAVÉS DA ANÁLISE DO VÉRTICE DE INTERAÇÃO E SUAS CORREÇÕES PERTURBATIVAS. ($T=0$)

VERTICE BÁSICO:

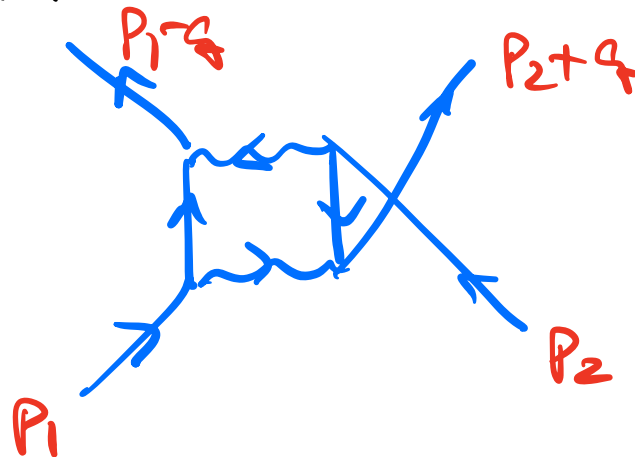


SPIN É ESPECTADOR

EM 2ª ORDEM: CANAL PARTÍCULA - PARTÍCULA



EXISTEM TAMBÉM DIAGRAMAS PARTÍCULA - BURACO:



$$-i\Gamma_a^{(2)} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 (i)^2 \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p_1 - q') G^{(0)}(p_2 + q')$$

$$q' \rightarrow q - p_2$$

$$\Gamma_a^{(2)}(p_1 + p_2) = \lambda + i\lambda^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G^{(0)}(q) G^{(0)}(p_1 + p_2 - q)$$

$k = p_1 + p_2$

$$G^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{k}} + i\eta \operatorname{sgn}(k - k_F)}$$

ESCREVENDO APENAS AS CONTRIBUIÇÕES COM POLOS

EM LADOS OPOSTOS DO EIXO REAL: ($q \rightarrow \vec{q}, \nu$)

$$I^{(2)}(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \left[\frac{\theta(k_F - q) \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|)}{(\nu - \epsilon_1 - i\eta)(\omega - \nu - \epsilon_2 - i\eta)} + \right.$$

$$\left. \frac{\theta(q - k_F) \theta(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F)}{(\nu - \epsilon_1 + i\eta)(\omega - \nu - \epsilon_2 + i\eta)} \right]$$

ONDE:

$$\epsilon_1 = \epsilon(\vec{q}) \approx v_F(q - k_F)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon(\vec{k} - \vec{q})$$

O VÍNCULO: $|\epsilon_1| < \omega_D$ E $|\epsilon_2| < \omega_D$ É IMPLÍCITO.

$$I^{(2)}(\vec{k}, \omega) = i \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\theta(k_F - q) \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|)}{\omega - \epsilon_1 - \epsilon_2 - i\eta} - \frac{\theta(q - k_F) \theta(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F)}{\omega - \epsilon_1 - \epsilon_2 + i\eta} \right]$$

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \int \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty q^2 dq \approx \frac{k_F^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq = \frac{k_F^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 q}{v_F} = (*)$$

ONDE: $\xi = v_F(q - k_F) \Rightarrow d\xi = v_F dq$ $v_F = \frac{\hbar v_F}{m}$

$$(*) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2\pi^2} \frac{m}{\hbar k_F} \int d^3 = \frac{m \hbar k_F}{2\pi^2} \int d\xi = \rho_F \int d\xi$$

ρ_F : DENSIDADE DE ESTADOS NA ENERGIA DE FERMI

QUEREMOS $I^{(2)}(\vec{k}, \omega)$ PARA $\omega \ll \omega_D$ E $v_F k \ll \omega_D$

O CÁLCULO COMPLETO É LONGO. PARA A NOSSA ANÁLISE, O VALOR DE k MAIS IMPORTANTE É $k=0$:

$$I^{(2)}(0, \omega). \quad \vec{k}=0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2$$

$$I^{(2)}(0, \omega) = i \rho_F \int d\xi \theta(\omega_D - |\xi|) \left[\frac{\theta(-\xi)}{\omega - 2\xi - i\eta} - \frac{\theta(\xi)}{\omega - 2\xi + i\eta} \right]$$

$$= i \rho_F \left[\int_{-\omega_D}^0 \frac{d\xi}{\omega - 2\xi - i\eta} - \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\omega - 2\xi + i\eta} \right]$$

$$\text{Im} I_d^{(2)}(0, \omega) = \frac{\beta_F}{2} \left[-\ln |2\beta - \omega| \Big|_{-\omega_D}^0 + \Big|_0^{\omega_D} \right]$$

$$-\text{Re} I_d^{(2)}(0, \omega) = \beta_F \left[\pi \int_{-\omega_D}^0 \delta(\omega - 2\beta) + \pi \int_0^{\omega_D} \delta(\omega - 2\beta) d\beta \right]$$

$$= \frac{\pi \beta_F}{2} \theta\left(\frac{\omega}{2} - \omega_D\right)$$

$$\text{Im} I_d^2(\omega) = \frac{\beta_F}{2} \left[\ln \left| \frac{2\omega_D + \omega}{\omega} \right| + \ln \left| \frac{2\omega_D - \omega}{\omega} \right| \right]$$

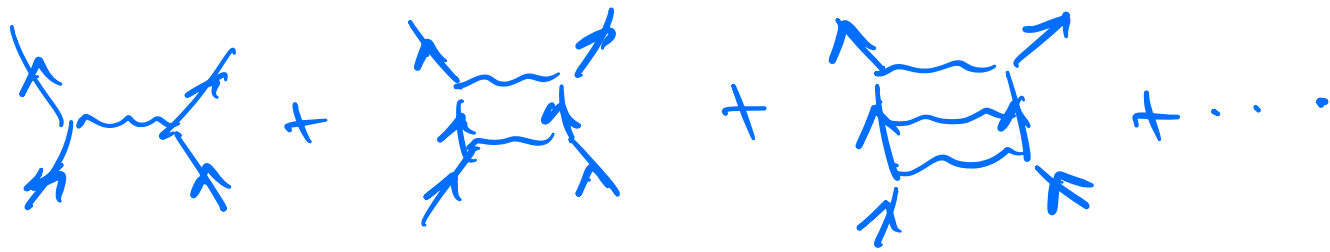
SE $\omega \ll \omega_D$

$$\text{Im} I_d^{(2)}(\omega) = \beta_F \ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega} \right|$$

$$\Rightarrow I_d^{(2)}(0, \omega) = i \beta_F \left[\ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega} \right| + i \frac{\pi}{2} \right]$$

LN DIVERGENTE EM $\omega \rightarrow 0$

\Rightarrow VAMOS INVESTIGAR SE TERMOS SUPERIORES "CORAM" A DIVERGÊNCIA



$$-i\Gamma_d = -i\lambda + (-i\lambda)^2 (i)^2 I_d^{(2)} + (-i\lambda)^3 (i)^4 [I_d^{(2)}]^2 + \dots$$

$$\Gamma_d = \lambda \left[1 + i\lambda I_d^{(2)} + [i\lambda I_d^{(2)}]^2 + \dots \right] \quad \rightarrow i$$

$$\Gamma_d = \frac{\lambda}{1 - i\lambda I_d^{(2)}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda Q_f \left[Q - \frac{2\omega D}{\omega} + i\frac{\Pi}{2} \right]}$$

SE $\lambda > 0$, A DIVERGÊNCIA É "CURADA" POIS
 Γ_d NÃO TERÁ DIVERGÊNCIA EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

SE $\lambda < 0$, NO ENTANTO, APARECE UM POLO NO
 PLANO COMPLEXO DE ω :

CONTINUANDO $\Gamma^{(2)}(0, \omega) \rightarrow \Gamma^{(2)}(0, z) \quad z \in \mathbb{C}$

$$\Gamma^{(2)}(0, z) = \frac{\lambda}{1 + \lambda s_F \left[\ln \left| \frac{2\omega_D}{z} \right| + i \frac{\pi}{2} - i \arg(z) \right]}$$

POLO \Rightarrow RAÍZ DO DENOMINADOR

$$|z_0| = 2\omega_D \exp \left[-\frac{1}{\lambda s_F} \right] \equiv \Omega_c$$

$$\arg(z_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = i\Omega_c$$

$$\Gamma^{(2)}(0, z) \approx -\frac{1}{s_F} \frac{i\Omega_c}{z - i\Omega_c} \quad (z \approx i\Omega_c)$$

ESSE VÉRTICE REPRESENTA UM POLO DA FUNÇÃO DE GREEN DE 2 CORPOS, QUE, POR SUA VEZ, SINALIZA UMA INSTABILIDADE DO EST. FUND. NÃO INTERAGENTE COM RELAÇÃO A INTERAÇÕES ATRATIVAS ENTRE OS FÉRMIONS.

A FORMA ANALÍTICA DE \mathcal{R}_c MOSTRA QUE A INSTABILIDADE É ESSENCIALMENTE NÃO PERTURBATIVA: \mathcal{R}_c NÃO É ANALÍTICA EM λ NÃO TEM UMA SÉRIE DE TAYLOR EM λ .

A INSTABILIDADE OCORRE NO CANAL PARTÍCULA-PARTÍCULA PARA ELÉTRONS COM \vec{p} , $-\vec{p}$

SE $|\vec{k}| \neq 0$: ($v_F k \ll \omega_D$)

$$\Gamma_d(\vec{k}, z) = -\frac{1}{g_F} \frac{i\Omega_c}{z - i\left[\Omega_c - \frac{v_F k^2}{6\Omega_c^2}\right]}$$

QUANDO $k > k_{\max} = \frac{e\Omega_c}{v_F} \Rightarrow v_F k_{\max} = \tilde{\omega}_{\max} = e\Omega_c$

○ POLO DESAPARECE, MAS, COMO VEREMOS:

$\Omega_c \sim T_c$ (TEMPERATURA CRÍTICA SUPERCONDUTORA)

RESULTA QUE $\tilde{\omega}_{\max} \ll \omega_D \ll E_F$. PORTANTO, O DESVIO k_{\max} DE 0 É MÍNUSCULO. É BASTANTE

ACURADO CONSIDERAR O "EMPARELHAMENTO" APENAS ENTRE ELÉTRONS CONTRA PROPAGANTES:

$\vec{k}, -\vec{k}$

Hamiltoniano BCS

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}, \sigma} - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}', \uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{p}', \downarrow}^\dagger a_{-\mathbf{p}, \downarrow} a_{\mathbf{p}, \uparrow} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv H_0 + H_1$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Theta(\omega_D - |\epsilon(\mathbf{p})|) \Theta(\omega_D - |\epsilon(\mathbf{p}')|)$$

“Casquinha” de “espessura” ω_D em torno da energia de Fermi.