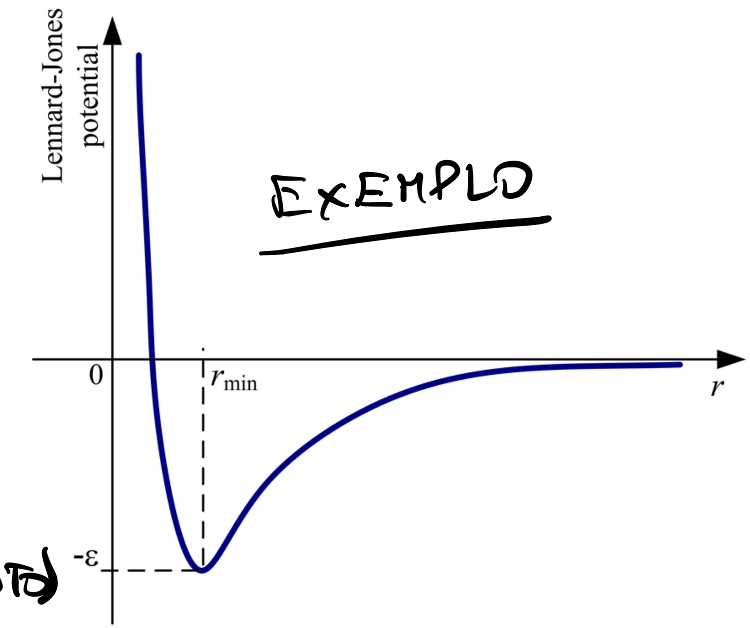
FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023
08/08/2023
Aula 3

O gás diluído de férmions com interação de curto alcance

- SISTEMA DE FÉRMIONS SPIN 1/2
- POTENCIAL DE INTERAÇÃO
  - ESFÉRICO
  - "CURTO" ALCANCE
  - SEM ESTADOS LIGADOS (SÓ ESTADOS DE ESPALHAMENTO)



EXEMPLO

- O PARÂMETRO PEQUENO SERÁ EFETIVAMENTE A DENSIDADE n:

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

n, SENDO DIMENSIONAL, É PEQUENO EM RELAÇÃO A QUÊ?

HISTORICAMENTE, ESSE TIPO DE MODELO FOI PENSADO TENDO EM MENTE O ^3He

SÓ QUE NAS CONDIÇÕES HABITUAIS O ^3He NÃO SATISFAZ AS CONDIÇÕES DE BAIXA DENSIDADE.

MAIS RECENTEMENTE, APARECERAM OS SISTEMAS DE ÁTOMOS FRIOS:

SISTEMAS QUE PODEM SER RESFRIADOS A $T \sim 10^{-5}$ K

$$H_{GF} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{k^2}{2m} a^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\sigma,\sigma'} U(\mathbf{q})\, a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma'} a_{\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}\sigma}$$

$$U(\mathbf{q}) = \int d^3 r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r})$$

BAIXAS DENSIDADES k_F PEQUENO E BAIXAS EXCITAÇÕES, APENAS $\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}$ MUITO PEQUENOS SERÃO IMPORTANTES:

$$U(\vec{q}) \simeq U(0) = \int d^3 r\, U(\vec{r})$$

$$H_{int} \simeq \frac{U(0)}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}'\vec{q} \\ \sigma,\sigma'}} a^+_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} a^+_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma'} a_{\vec{k}',\sigma'} a_{\vec{k},\sigma}$$

Dinâmica de dois férmions

ESPALHAMENTO DE 2 PARTÍCULAS PELO POTENCIAL $U(\vec{r})$: MÉTODO DAS ONDAS PARCIAIS.

TUDO É DESCRITO PELAS DEFASAGENS ("PHASE SHIFTS"):

$\delta_\ell(k)$

EM BAIXAS ENERGIAS: $\delta_\ell(k) \sim -(k a_\ell)^{(2\ell+1)}$

PARA $\vec{k}$'S PEQUENOS $\Rightarrow$ $\ell = 0$ (ONDA S)

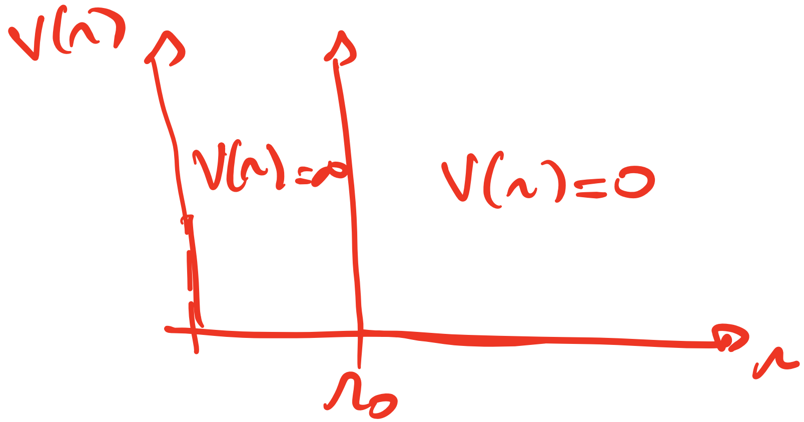
$\delta_0(k) = -ka \Rightarrow a =$ COMPRIMENTO DE ESPALHAMENTO

CONDIÇÃO DE BAIXA DENSIDADE:

$\boxed{k_F a \ll 1}$ PARÂMETRO PEQUENO

NOTEM QUE O POTENCIAL PODE SER MUITO INTENSO E O $\underline{a}$ MUITO PEQUENO:

POR EXEMPLO, "ESFERA DURA":



$\Longrightarrow \boxed{a = r_0}$

Estratégia

COMO $U(r)$ NÃO NECESSARIAMENTE SE PRESTA A UM TRATAMENTO PERTURBATIVO, FAREMOS O SEGUINTE:

CONSIDERE UM OUTRO POTENCIAL FRACO $U_{AUX}(r)$ QUE TENHA O MESMO COMPRIMENTO DE ESPALHAMENTO DE $U(r)$:

$$a_{AUX} = a$$

TRATE $U_{AUX}(r)$ PERTURBATIVAMENTE, EXPRESSE OS RESULTADOS FINAIS EM TERMOS DE a_{AUX}:

$$a_{AUX} \to a$$

Férmions de mesmo spin não interagem em primeira ordem

$$\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\,\sigma} a^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}\, a^{\dagger}_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma}\, a_{\vec{k}',\sigma}\, a_{\vec{k},\sigma} =$$

$$- \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\,\sigma} a^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}\, a^{\dagger}_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma}\, a_{\vec{k},\sigma}\, a_{\vec{k}'\sigma} \qquad (\text{TROCO } \vec{k} \to \vec{k}')$$

$$= - \sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q},\sigma} \underbrace{a^{\dagger}_{\vec{k}'+\vec{q},\sigma}}_{a^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}}\, \underbrace{a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q},\sigma}}_{a^{\dagger}_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma}}\, a_{\vec{k}'\sigma}\, a_{\vec{k}\sigma} \qquad (\vec{q} \to \vec{q} + \vec{k} - \vec{k}')$$

$$= - \sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q},\sigma} a^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}\, a^{\dagger}_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma}\, a_{\vec{k}',\sigma}\, a_{\vec{k}\sigma} = 0$$

FISICAMENTE, $r=0 \Rightarrow$ PARTE ESPACIAL DA FUNÇÃO DE ONDA É SIMÉTRICA $\Rightarrow$ PARTE DE SPIN É ANTI-SIMÉTRICA

$$\sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\\ \sigma}} a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}\, a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},-\sigma}\, a_{\vec{k}',-\sigma}\, a_{\vec{k},\sigma} =$$

$$= \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\uparrow}\, a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},\downarrow}\, a_{\vec{k}',\downarrow}\, a_{\vec{k},\uparrow} +$$

$$\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\downarrow}\, a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},\uparrow}\, a_{\vec{k}',\uparrow}\, a_{\vec{k},\downarrow} =$$

$$= 2\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\uparrow}\, a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},\downarrow}\, a_{\vec{k}',\downarrow}\, a_{\vec{k},\uparrow}$$

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} a^{+}_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{U(0)}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^{+}_{\vec{k}+\vec{q},\uparrow}\, a^{+}_{\vec{k}'-\vec{q},\downarrow}\, a_{\vec{k}',\downarrow}\, a_{\vec{k},\uparrow}$$

Tratamento perturbativo

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} a^\dagger_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{U(0)}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q},\downarrow} a_{\vec{k}',\downarrow} a_{\vec{k},\uparrow}$$

FOCAR NA ENERGIA DO EST. FUNDAMENTAL PERTURBATIVAMENTE:

$$E_0^{(0)} = \frac{3}{5} N E_F = \frac{3}{5} N \frac{k_F^2}{2m}$$

$$E_0^{(1)} = E_0^{(0)} + \frac{U(0)}{V} \left\langle \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}} a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q},\downarrow} a_{\vec{k}',\downarrow} a_{\vec{k},\uparrow} \right\rangle_0$$

OS DOIS BURACOS CRIADOS POR $a_{\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}\uparrow}$ TEM DE SER PREENCHIDOS POR $a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q}\downarrow}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{k} = \vec{k} + \vec{q} \\ \vec{k}' = \vec{k}' - \vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{q} = 0} \quad \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}\uparrow} \rangle_0$$

$$\sum_{\vec{k}\vec{k}'} \langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}\uparrow} \rangle_0 = \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \langle \hat{n}_{\vec{k}\uparrow} \hat{n}_{\vec{k}'\downarrow} \rangle$$

$$= \langle \underbrace{\left(\sum_{\vec{k}'} \hat{n}_{\vec{k}\uparrow} \right)}_{N_\uparrow} \underbrace{\left(\sum_{\vec{k}'} \hat{n}_{\vec{k}'\downarrow} \right)}_{N_\downarrow} \rangle = \left(\frac{N}{2} \right) \left(\frac{N}{2} \right) = \frac{N^2}{4}$$

$$E_0^{(1)} = \frac{3}{5} N \frac{k_F^2}{2m} + \frac{U(0)}{V} \frac{N^2}{4}$$

$$\frac{E_0^{(1)}}{N} = \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} + \frac{U(0)}{4} \left(\frac{N}{V} \right) = \frac{3}{5} \left(\frac{k_F^2}{2m} \right) + \frac{U(0)}{4} \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

$$= E_0^{(0)} \left[1 + \frac{U(0)}{4} \frac{k_F^3}{3\pi^2} \frac{5}{3} \frac{2m}{k_F^2} \right]$$

$$= E_0^{(0)} \left[1 + \frac{5}{2} \frac{U(0)}{9\pi^2} m k_F \right]$$

PERTURBATIVAMENTE (APROXIMAÇÃO DE BORN):

$$a = \frac{m\,U(0)}{4\pi} \Rightarrow U(0) = \frac{4\pi a}{m}$$

$$\Rightarrow E_0^{(1)} = E_0^{(0)}\left[1 + \frac{10}{9\pi}(k_F a)\right]$$

Energia até segunda ordem em $(k_{\mathrm{F}}a)$

K. Huang and C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 767 (1957)

$$\boxed{\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5}\left(\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\right)\left[1 + \frac{10}{9\pi}k_F a + \frac{4\,(11 - 2\ln 2)}{21\pi^2}\left(k_F a\right)^2\right]}$$

Pressão: $P_F\left(T=0\right) = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{N,T=0} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{5m} n = \frac{\hbar^2}{5m}\left(3\pi^2\right)^{2/3} n^{5/3}$

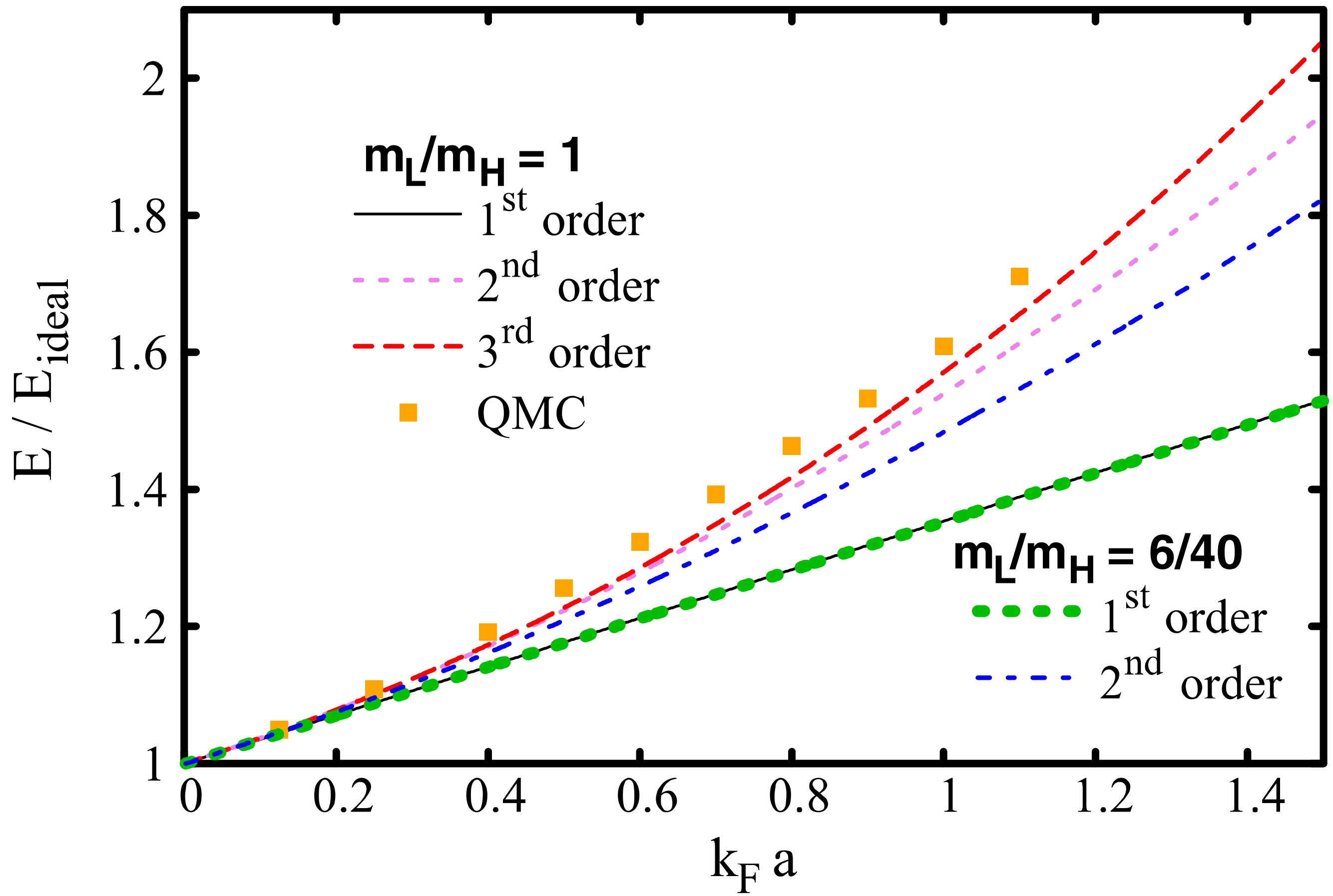
$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}$

Potencial químico e compressibilidade:

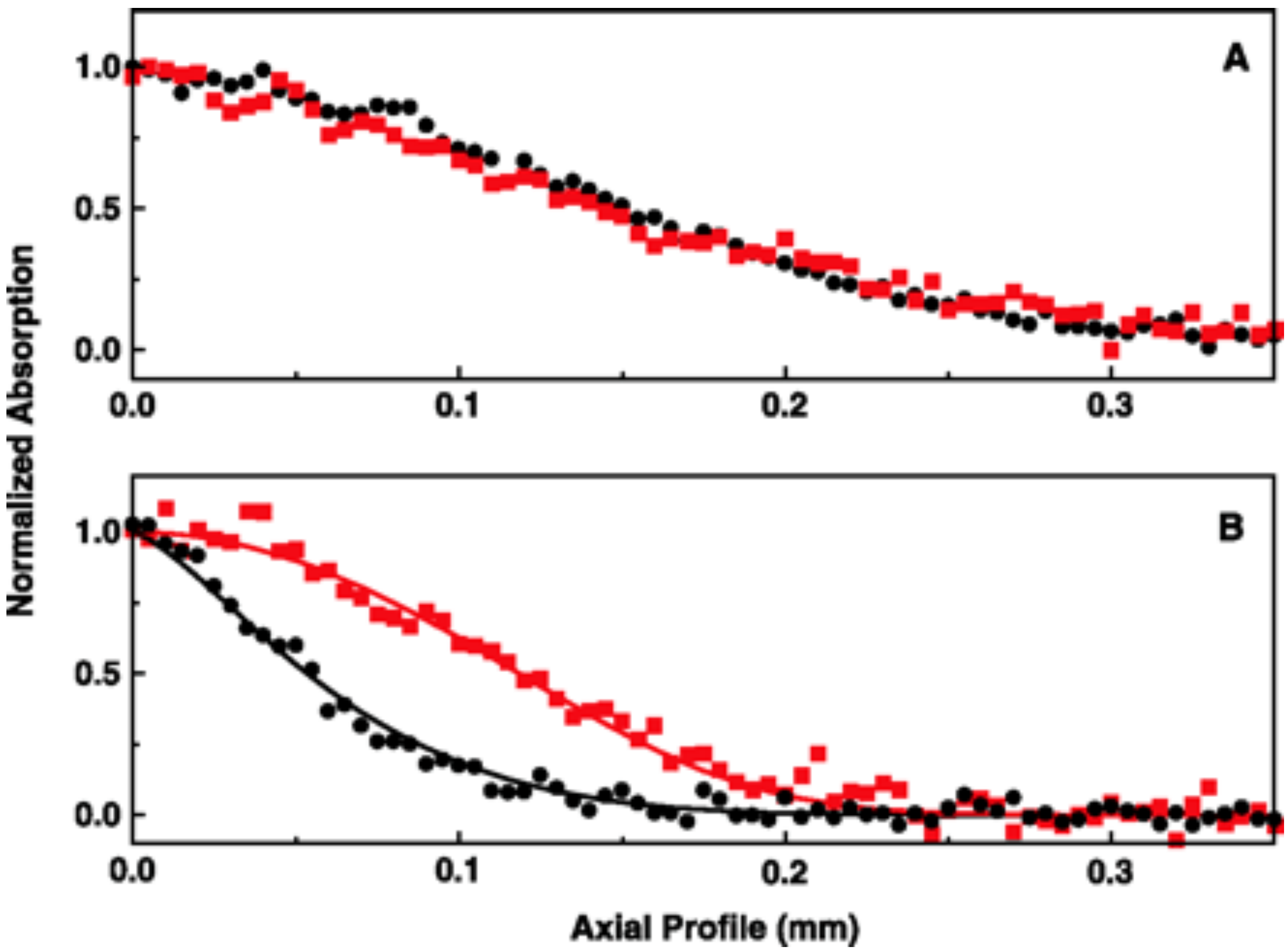
$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = E_F\left[1 + \frac{4}{3\pi}k_F a + \frac{4\,(11 - 2\ln 2)}{15\pi^2}\left(k_F a\right)^2\right]$$

$$\kappa^{-1} = \left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)^{-1} = \frac{N^2}{V}\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{2n}{3}E_F\left[1 + \frac{2}{\pi}k_F a + \frac{8\,(11 - 2\ln 2)}{15\pi^2}\left(k_F a\right)^2\right]$$

Estado fundamental para misturas com massas iguais e diferentes



E. Fratini and S. Pilati, Phys. Rev. A **90**, 023605 (2014)



^{7}Li é um bóson

^{6}Li é um férmion

Comparison of ^{6}Li and ^{7}Li atom cloud axial profiles. The red squares correspond to ^{6}Li, and the black circles to ^{7}Li. (A) Data from the top image of Fig. 1, corresponding to $T/T_F = 1.0$ and $T/T_c = 1.5$. (B) Data from the lower image of Fig. 1, corresponding to $T/T_F = 0.25$ and $T/T_c = 1.0$. The fits to the data are shown as solid lines.

Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms,
A. G. Truscott *et al.*, Science **291**, 2570 (2001).

Feshbach resonance

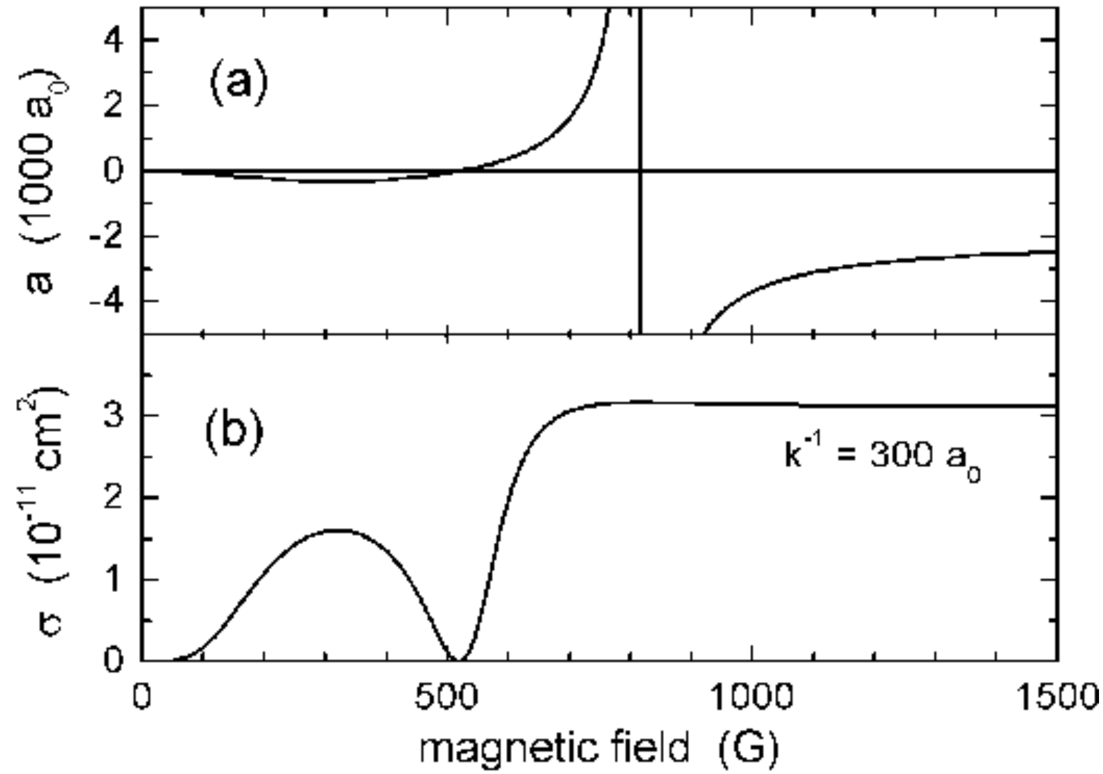
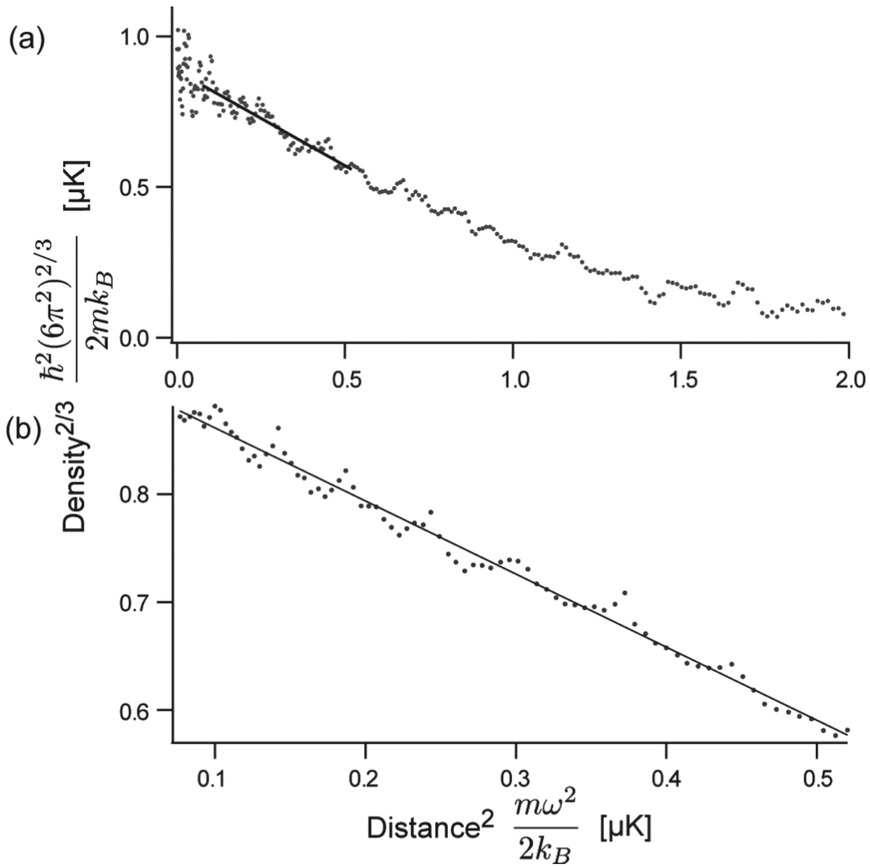


FIG. 1. (a) Model curve approximating the results of [13–15] for the s-wave scattering length of ^{6}Li atoms in the two lowest spin states versus magnetic field. (b) Corresponding behavior of the scattering cross section at a finite collision energy with a relative wave number of $k = (300a_0)^{-1}$.

Magnetic Field Control of Elastic Scattering in a Cold Gas of Fermionic Lithium Atoms, S. Jochim *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 273202 (2002).

Measured compressibility (^{6}Li)



$$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{\hbar^2(6\pi^2)^{2/3}}{2m}\frac{\partial n^{2/3}}{\partial \mu}.$$

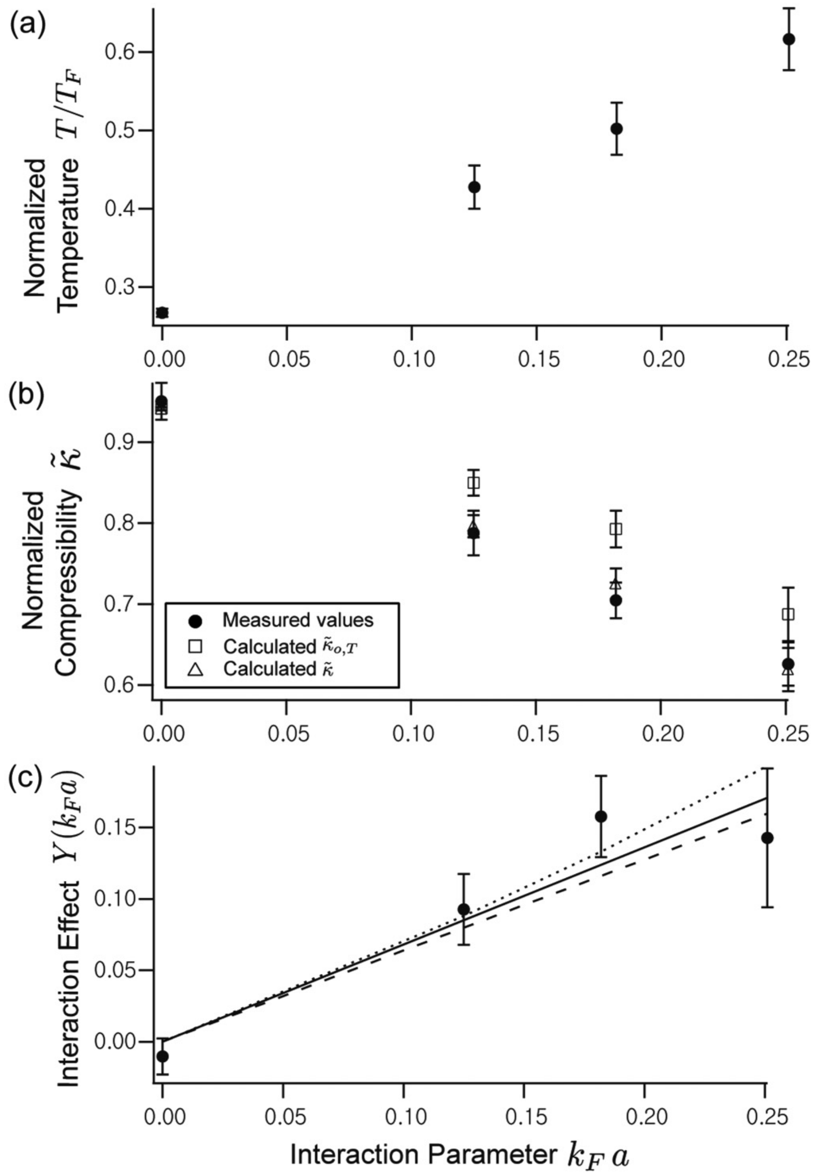
$$\kappa_0 = \frac{n^{1/3}}{n^2}\frac{3m}{\hbar^2(6\pi^2)^{2/3}}$$

$$\mu = \mu_0 - m\omega^2 x^2/2,$$

Local density approximation

Ye-Ryoung Lee, *et al*. Phys. Rev. A **85**, 063615 (2012)

Measured compressibility (^{6}Li)



$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{0,T}} + Y(k_F a).$$

$$\tilde{\kappa}_{0,T} = 1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + O\left[\left(\frac{T}{T_F}\right)^4\right],$$

$$Y\left(k_F a\right) = \frac{2}{\pi} k_F a + \frac{8\left(11 - 2\ln 2\right)}{15\pi^2}\left(k_F a\right)^2$$

Ye-Ryoung Lee, *et al*. Phys. Rev. A **85**, 063615 (2012)