

# FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

1º Semestre de 2025

06/03/2025

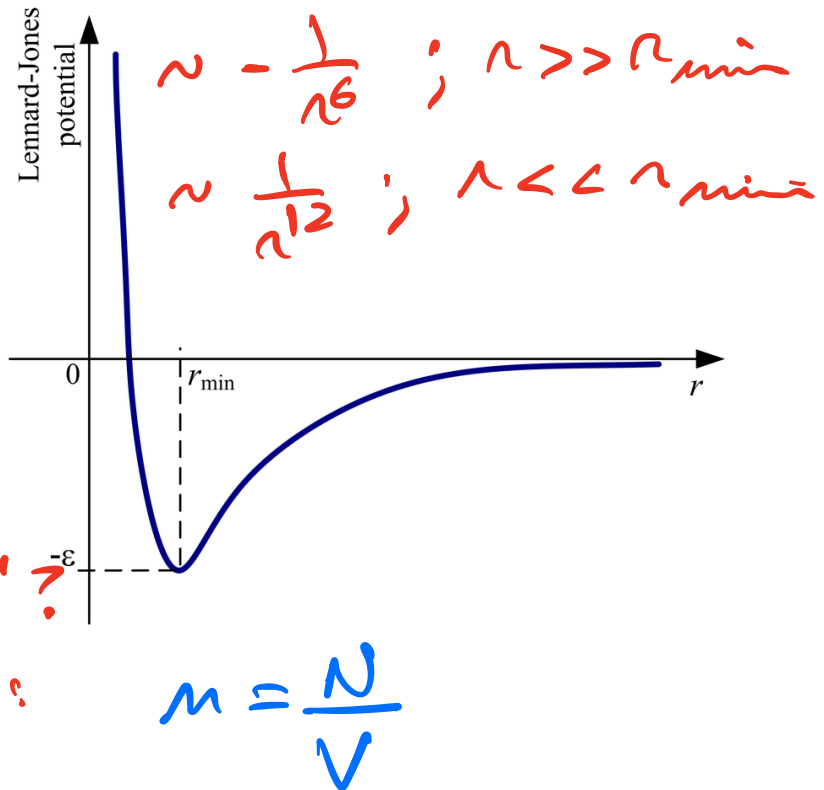
Aula 3

# O gás diluído de férmions com interação de curto alcance

- POTENCIAL DE CURTO ALCANCE
- POTENCIAL  $\bar{n}$  ADMITE ESTADOS LIGADOS
- INICIALMENTE ESTUDADO SENDO O  $^3\text{He}$  EM MENTE.

• QUAL É O "PARÂMETRO PEQUENO"?  
É A DILUIÇÃO, POR EXEMPLO:

$$n \bar{n}_{\min}^3 \ll 1$$



# O gás diluído de férmions com interação de curto alcance

Originalmente, para  $^3\text{He}$ : mas, nas condições habituais, o  $^3\text{He}$  nunca é diluído o suficiente para justificar o tratamento.

Mais recentemente, na área conhecida com o **átomos ultra-frios**, alguns átomos podem ser confinados em armadilhas ópticas em baixas densidades e baixíssimas temperaturas (da ordem de  $10^{-9}$  K).

Exemplos:  $^6\text{Li}$  (férmion) e  $^7\text{Li}$  (bóson)

$$H_{GF} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \sigma, \sigma'} U(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}\sigma}$$

$$U(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \quad \text{---} \quad U(r)$$

$$\frac{k_F^3}{3\pi^2} = n$$

- TODOS OS ESTADOS COM  $k < k_F$  ESTÃO OCUPADOS NO ESTADO FUNDAMENTAL
- EST. FUNDAMENTAL E ESTADOS EXCITADOS DE BAIXA ENERGIA ENVOLEM  $q \sim k_F \ll \frac{1}{r_{\text{min}}}$

$$\Rightarrow U(q \sim 0) \sim U(0) = \int d^3r U(r)$$

$$H_{GF} \approx \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{U(0)}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \\ \sigma, \sigma'}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}\sigma} \quad \times c_{20}$$

$$H_{\text{int}} = \frac{U(0)}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3, \vec{k}_4 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) a_{\vec{k}_3, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_4, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{k}_2, \sigma_2} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}$$

# Dinâmica de dois férmions

. POTENCIAL ESFÉRICO ADMITE SOLUÇÃO DOS ESTADOS DE ESPALHAMENTO PELO MÉTODO DAS ONDAS PARCIAIS.

DEFASAGENS ("PHASE SHIFTS"):  $\delta_l(k) \sim -(ka)^{2l+1}$

SE ESTOU INTERESSADO EM  $k$ 'S PEQUENOS:

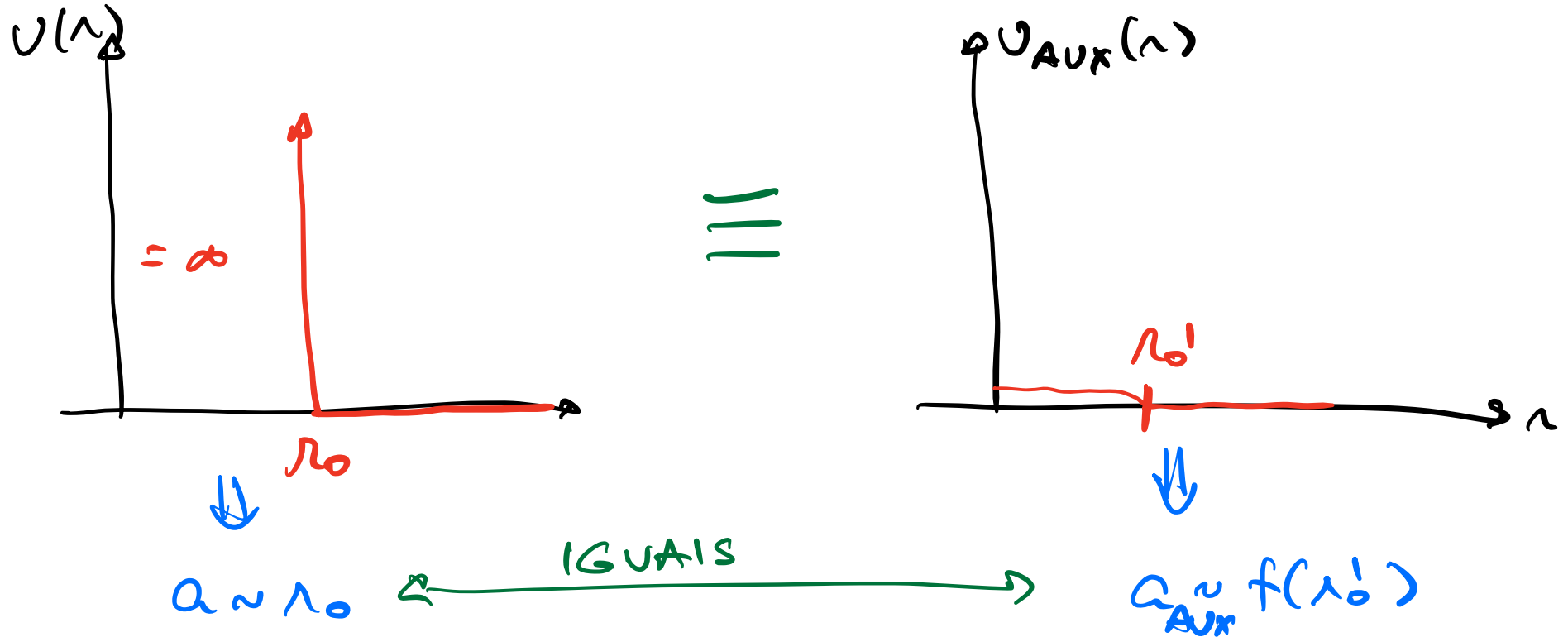
$$\delta_l(k) \approx -ka \quad ka \ll 1 \quad (\text{ONDAS})$$

$a$  = COMPRIMENTO DE ESPALHAMENTO

PARÂMETRO PEQUENO:  $ka \ll 1$

# Estratégia

SEJA UM POTENCIAL "ESFERA DURA"



RESULTADOS FINAIS PODEM SER ESCRITOS APENAS  
EM TERMOS DE  $a$ .

ESTRATÉGIA: 1) RESOLVER O PROBLEMA DE  $V_{AUX}(r)$   
PERTURBATIVAMENTE

2) ESCRIBO OS RESULTADOS FINAIS EM TERMOS DE  $Q_{AUX}$

3) ESSES RESULTADOS SÃO OS MESMOS DO PROBLEMA COM  $U(\wedge)$  INICIAL, DESDE QUE:

$$Q_{AUX} = Q$$

# Férmions de mesmo spin não interagem em primeira ordem

NO TERMO DE INTERAÇÃO  $H_{int}$ , PARA  $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} a_{\vec{k}_2, \sigma_1} = - \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} c_{\vec{k}_1, \sigma_1} c_{\vec{k}_2, \sigma_1}$$

$$(\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2) = - \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_2, \sigma_1} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} a_{\vec{k}_2, \sigma_1} = 0$$

FÉRMIONS DE MESMO SPIN NÃO INTERAGEM  
EM  $H_{int}$



FISICAMENTE, ISSO É PLAUSÍVEL PORQUE

$Q=0 \Rightarrow$  PARTE ESPACIAL DA FUNÇÃO DE ONDA DE 2 FÉRMIONS É SIMÉTRICA

$\Rightarrow$  PARTE DE SPIN TEM QUE SER

ANTI-SIMÉTRICA:

$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \Rightarrow$  SINGLET:  $S=0$

$\delta^{(2)}$  IMPLÍCITA

$$\Rightarrow H_{INT} = \frac{U(0)}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3, \vec{k}_4 \\ \sigma_1}} a_{\vec{k}_4, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_3, -\sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_2, -\sigma_1} a_{\vec{k}_1, \sigma_1}$$

$$= \frac{U(0)}{2V} \sum \left[ a_{4,+}^\dagger a_{3,-}^\dagger a_{2,-} a_{1,+} + a_{4,-}^\dagger a_{3,+}^\dagger a_{2,+} a_{1,-} \right]$$

$$\sum a_{3,+}^\dagger a_{4,-}^\dagger a_{1,-} a_{2,+}$$

$$H_{int} = \frac{U(0)}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3, \vec{k}_4}} a_{\vec{k}_4, +}^\dagger a_{\vec{k}_3, -}^\dagger a_{\vec{k}_2, -} a_{\vec{k}_1, +} \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)$$

# Tratamento perturbativo

$$H_{int} = \frac{U_{aux}(0)}{V} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \vec{k}_3, \vec{k}_4}} a_{\vec{k}_4, +}^\dagger a_{\vec{k}_3, -}^\dagger a_{\vec{k}_2, -} a_{\vec{k}_1, +} \delta^{(3)}(>$$

EM 1ª ORDEM DE TEORIA DE PERTURBAÇÃO

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \frac{3N}{5} E_F + \langle H_{int} \rangle_0$$

$$\begin{aligned} \langle \rangle_0 &= \frac{U_{aux}(0)}{V} \sum \langle a_{4+}^\dagger a_{3-}^\dagger a_{2-} a_{1+} \rangle \delta^{(3)} \\ &= \frac{U_{aux}(0)}{V} \sum \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \delta^{(3)} \langle a_{\vec{k}_2, +}^\dagger \overbrace{a_{\vec{k}_2, -}^\dagger a_{\vec{k}_2, -} a_{\vec{k}_2, +}}^{\hat{M}_{\vec{k}_2, -}^\dagger} \rangle \\ &= \frac{U_{aux}(0)}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \langle \hat{M}_{\vec{k}_2, +} \hat{M}_{\vec{k}_2, -} \rangle \begin{cases} \sum_{\vec{k}_2} \hat{M}_{\vec{k}_2, -}^\dagger = \hat{N}_- \\ \sum_{\vec{k}_2} \hat{M}_{\vec{k}_2, +} = \hat{N}_+ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\langle \rangle_0 = \frac{U_{\text{Aux}}(0)}{V} \underbrace{\langle \hat{N}_+ \hat{N}_- \rangle}_{\left(\frac{N}{2}\right)^2} = \underbrace{\frac{U_{\text{Aux}}(0)}{4V}}_{E_0^{(1)}} N^2$$

$$E_0^{(1)} = U_{\text{Aux}}(0) \frac{N}{4} \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

USANDO A APROXIMAÇÃO DE BORN (1ª ORDEM EM  $U(\mathbf{r})$ ), EM TERMOS DE ONDAS PARCIAIS:

$$a = \frac{m U_{\text{Aux}}(0)}{4\pi} \Rightarrow U_{\text{Aux}}(0) = \frac{4\pi}{m} a$$

$$\Rightarrow \frac{E_0^{(1)}}{N} = \frac{k_F^2}{3\pi m} (k_F a)$$

$$\frac{E_0}{N} \approx \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m} \left[ 1 + \frac{10}{9\pi} (k_F a) \right]$$

Energia até segunda ordem em  $(k_F a)$

K. Huang and C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 767 (1957)

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \left( \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) \left[ 1 + \frac{10}{9\pi} k_F a + \frac{4(11 - 2 \ln 2)}{21\pi^2} (k_F a)^2 \right]$$

Pressão:  $P_F (T = 0) = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{N, T=0} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{5m} n = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}$

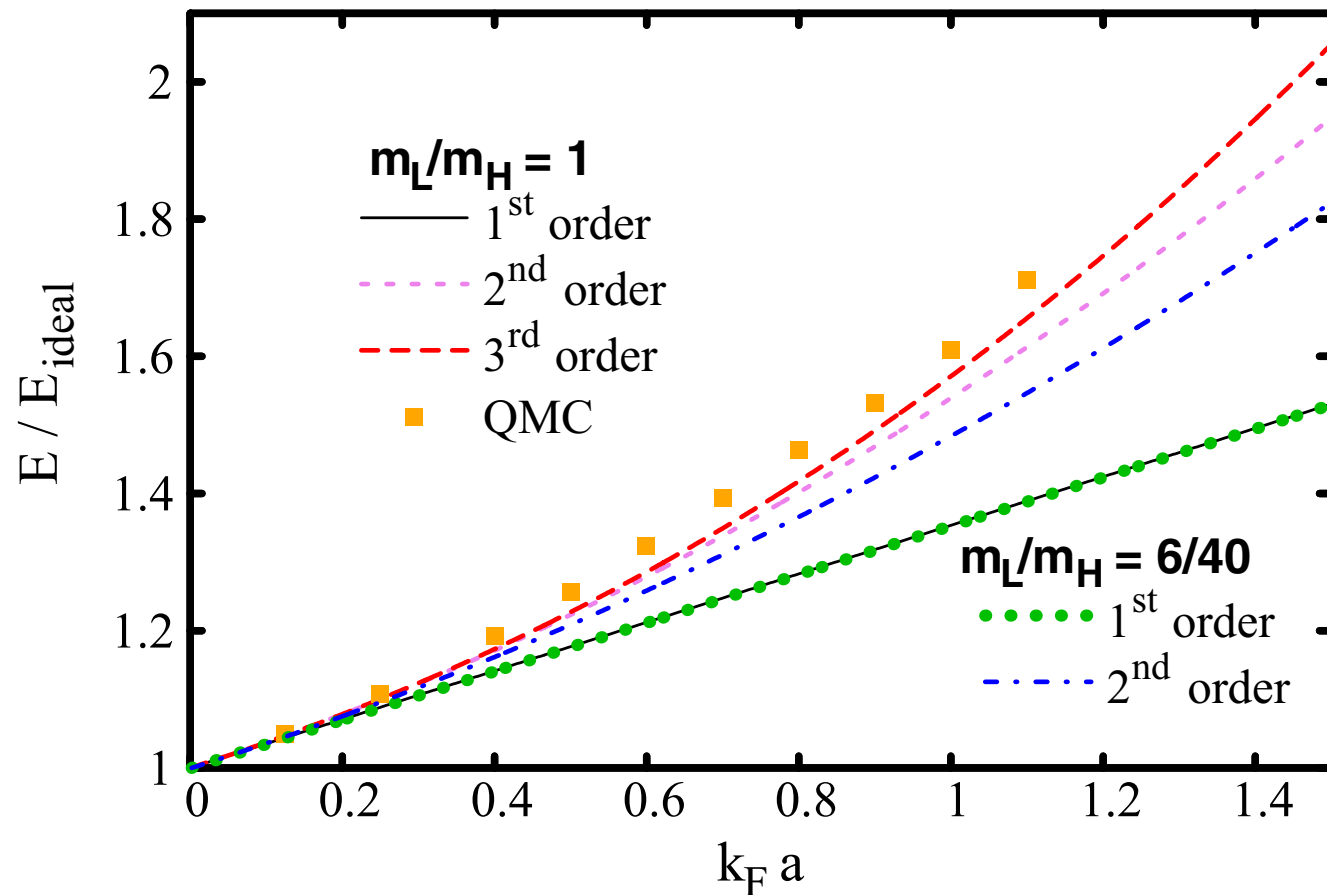
Potencial químico:  $\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = E_F \left[ 1 + \frac{4}{3\pi} k_F a + \frac{4(11 - 2 \ln 2)}{15\pi^2} (k_F a)^2 \right]$

Compressibilidade:  $\kappa = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_{T, N} = \frac{1}{V} \left( \left. \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right|_{T, N} \right)^{-1}$

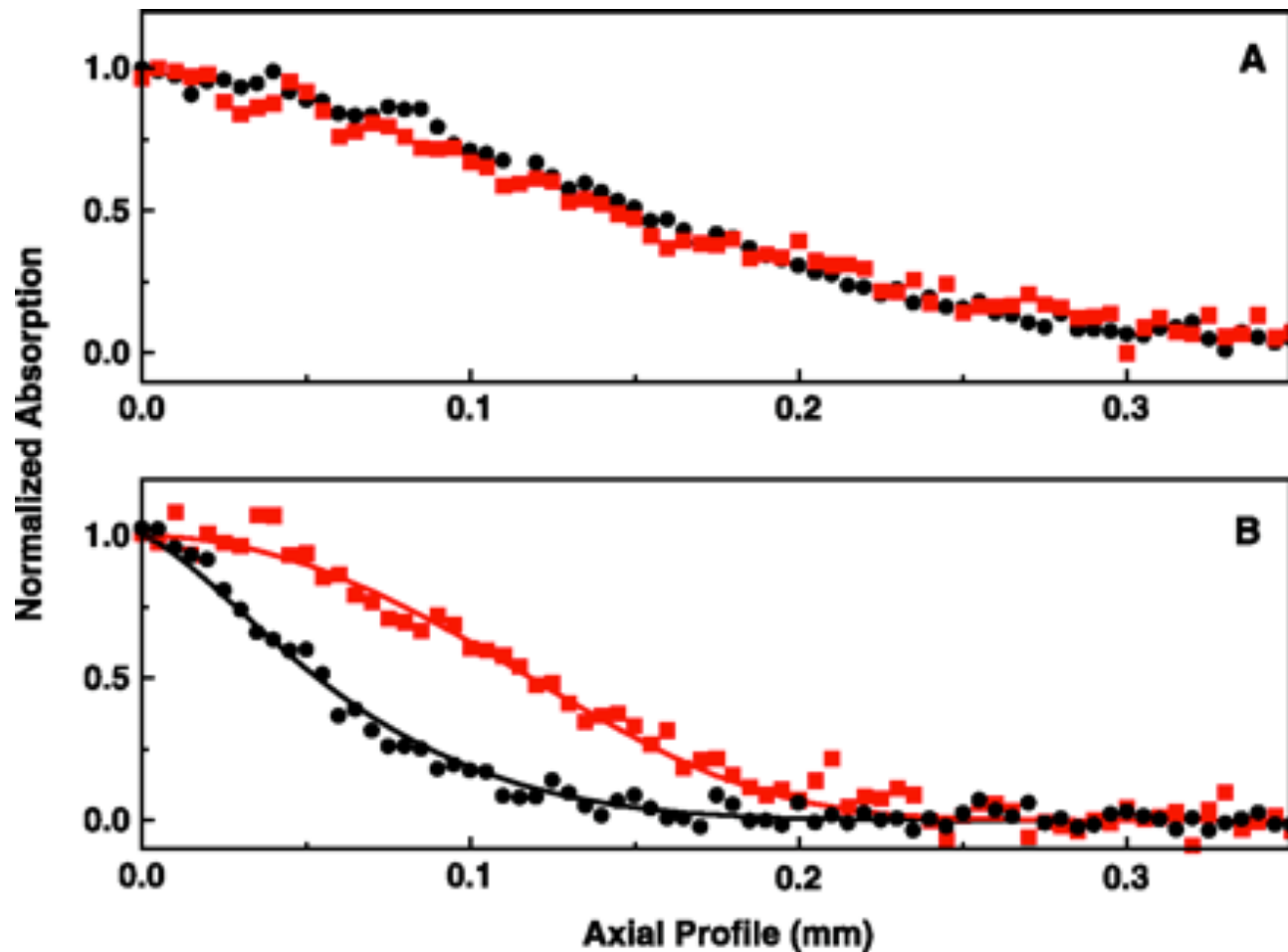
$$\kappa^{-1} = V \left. \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right|_{T, N} = \frac{N^2}{V} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial N^2} \right|_{T, V} = \frac{N^2}{V} \frac{\partial \mu}{\partial N} = n^2 \frac{\partial \mu}{\partial n}$$

$$\kappa^{-1} = \frac{N^2}{V} \frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{2n}{3} E_F \left[ 1 + \frac{2}{\pi} k_F a + \frac{8(11 - 2 \ln 2)}{15\pi^2} (k_F a)^2 \right]$$

# Estado fundamental para misturas com massas iguais e diferentes



E. Fratini and S. Pilati, Phys. Rev. A **90**, 023605 (2014)



$^7\text{Li}$  é um bóson

$^6\text{Li}$  é um férmion

Comparison of  $^6\text{Li}$  and  $^7\text{Li}$  atom cloud axial profiles. The red squares correspond to  $^6\text{Li}$ , and the black circles to  $^7\text{Li}$ . (A) Data from the top image of Fig. 1, corresponding to  $T/T_F = 1.0$  and  $T/T_c = 1.5$ . (B) Data from the lower image of Fig. 1, corresponding to  $T/T_F = 0.25$  and  $T/T_c = 1.0$ . The fits to the data are shown as solid lines.

*Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms,*  
A. G. Truscott *et al.*, Science **291**, 2570 (2001).

# Feshbach resonance

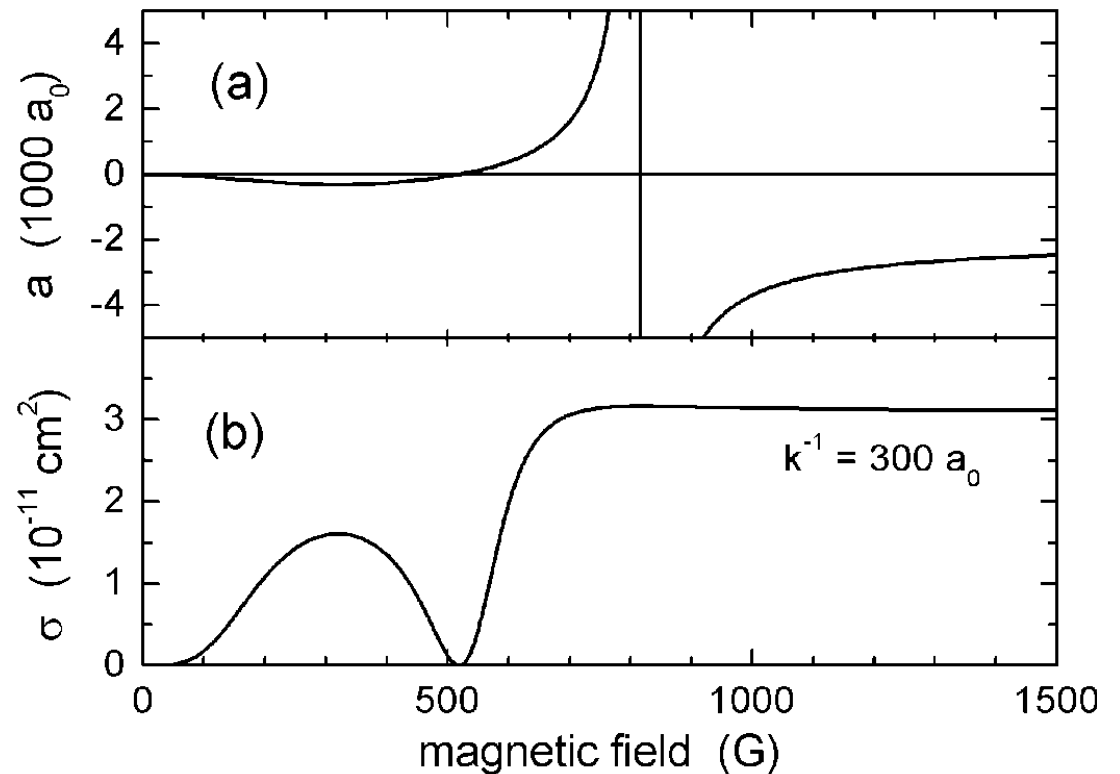
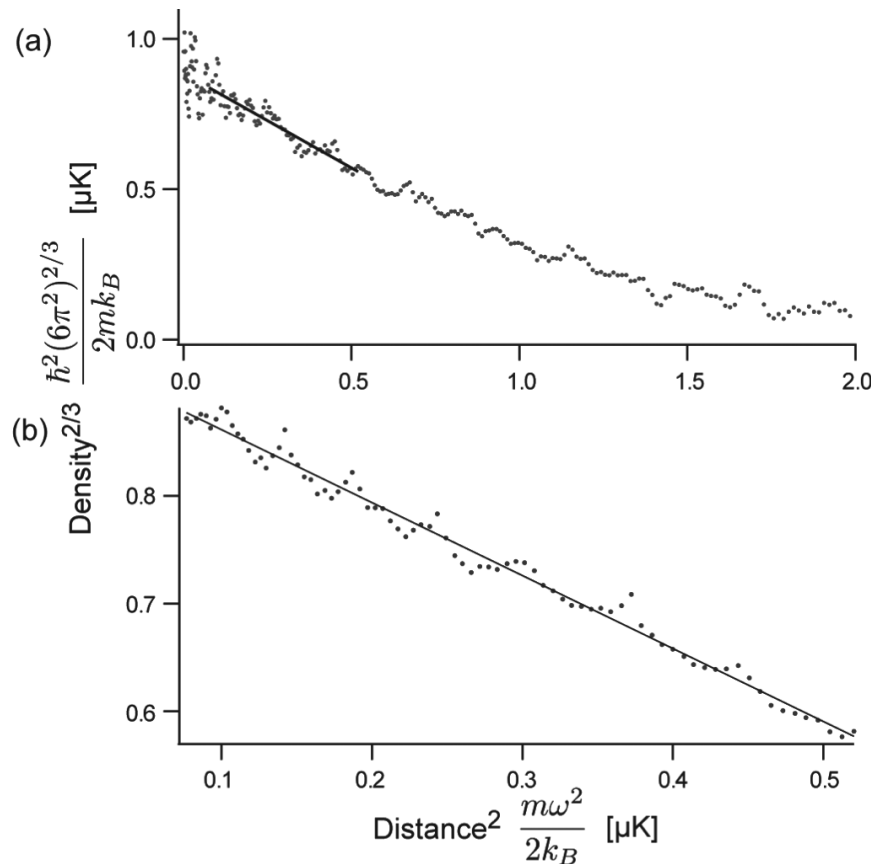


FIG. 1. (a) Model curve approximating the results of [13–15] for the  $s$ -wave scattering length of  $^6\text{Li}$  atoms in the two lowest spin states versus magnetic field. (b) Corresponding behavior of the scattering cross section at a finite collision energy with a relative wave number of  $k = (300a_0)^{-1}$ .

*Magnetic Field Control of Elastic Scattering in a Cold Gas of Fermionic Lithium Atoms, S. Jochim et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 273202 (2002).*



# Measured compressibility ( $^6\text{Li}$ )



$$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{\hbar^2 (6\pi^2)^{2/3}}{2m} \frac{\partial n^{2/3}}{\partial \mu}.$$

$$\kappa_0 = \frac{n^{1/3}}{n^2} \frac{3m}{\hbar^2 (6\pi^2)^{2/3}};$$

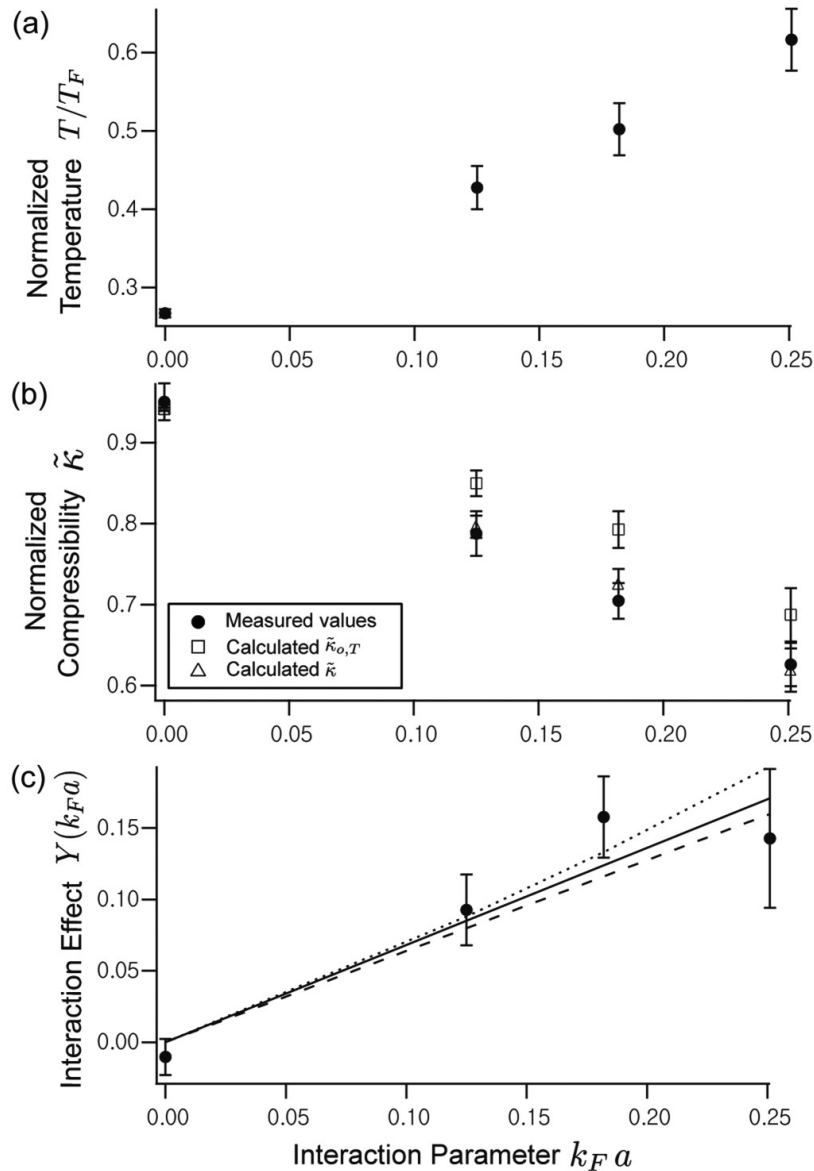
compressibilidade do gás não interagente

$$\mu = \mu_0 - m\omega^2 x^2 / 2,$$

Local density approximation

Ye-Ryoung Lee, *et al.* Phys. Rev. A **85**, 063615 (2012)

# Measured compressibility ( $^6\text{Li}$ )



$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{0,T}} + Y(k_F a).$$

$$\tilde{\kappa}_{0,T} = 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{T}{T_F} \right)^4 \right],$$

$$Y(k_F a) = \frac{2}{\pi} k_F a + \frac{8(11 - 2 \ln 2)}{15\pi^2} (k_F a)^2$$

Ye-Ryoung Lee, *et al.* Phys. Rev. A  
**85**, 063615 (2012)