FI 193 – Teoria Quântica de Sistemas de Muitos Corpos

2º Semestre de 2023

1~~6~~7/08/2023

Aula 5

O gás diluído de bósons com interação de curto alcance

$$H_{GB} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} U\left(\mathbf{q}\right) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} \qquad U\left(\mathbf{q}\right) = \int d^3 r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U\left(\mathbf{r}\right)$$

No caso não-interagente:

$$\begin{aligned} \left|\Phi_0\left(N\right)\right\rangle &= \frac{\left(a_{\boldsymbol{k}=0}^\dagger\right)^N}{\sqrt{N!}} \left|0\right\rangle \\ a_0^\dagger \left|\Phi_0\left(N\right)\right\rangle &= \sqrt{N+1} \left|\Phi_0\left(N+1\right)\right\rangle \\ a_0 \left|\Phi_0\left(N\right)\right\rangle &= \sqrt{N} \left|\Phi_0\left(N-1\right)\right\rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0,\, a_0^\dagger &\sim \sqrt{N} \\ \left[a_0,\, a_0^\dagger\right] &= 1 \ll \sqrt{N} \end{aligned}}$$

Resumo da aula passada

No caso interagente: $\Rightarrow a_{\mathbf{k}} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{N_0} & (\mathbf{k}=0) \\ a_{\mathbf{k}} & (\mathbf{k}\neq 0) \end{cases}$ $\quad N_0 = \mathcal{O}(N)$

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2}{2m} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{U(\mathbf{0})}{2V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{U(0)}{2V} N_0^2 + \frac{U(0)\,N_0}{2V} \left[4 \sum_{\mathbf{k}\neq 0} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} \left(a^\dagger_{\mathbf{k}} a^\dagger_{-\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right) \right]$$

$$\hat{N} \rightarrow N_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$$

$$H_B = \frac{U(0)\,N^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{U(0)\,N}{2V} \left[2 \sum_{\mathbf{k}\neq 0} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} \left(a^\dagger_{\mathbf{k}} a^\dagger_{-\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right) \right]$$

$$H_B = N\lambda + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left[(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\lambda)\, a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \lambda \left(a^\dagger_{\mathbf{k}} a^\dagger_{-\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right) \right]$$

$$\boxed{\lambda = \frac{U(0)\,N}{2V}}$$

Transformação de Bogoliubov

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} b^{\dagger}_{-\mathbf{k}} \\ a^{\dagger}_{\mathbf{k}} &= v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} a^{\dagger}_{-\mathbf{k}} \\ b^{\dagger}_{\mathbf{k}} &= -v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \end{aligned}}$$

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_{\mathbf{k}} = \cosh \varphi_{\mathbf{k}} \equiv \mathrm{c} \\ v_{\mathbf{k}} = \sinh \varphi_{\mathbf{k}} \equiv \mathrm{s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tanh(2\varphi_{\mathbf{k}}) &= -\frac{2\lambda}{2\lambda + \epsilon_{\mathbf{k}}} \in (-1, 1) \\ \sinh(2\varphi_{\mathbf{k}}) &= -\frac{2\lambda}{E_{\mathbf{k}}} \\ \cosh(2\varphi_{\mathbf{k}}) &= \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\lambda}{E_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k} = \sinh \varphi_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\lambda}{E_{\mathbf{k}}} - 1} < 0 \\ u_{k} = \cosh \varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\lambda}{E_{\mathbf{k}}} + 1} > 1 \\ E_{\mathbf{k}} &= \sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2} \end{aligned}$$

Resumo da aula passada

$$\boxed{H_B = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}}$$

$$E_0 = N\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(E_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - 2\lambda\right)$$

Em termos do comprimento de espalhamento a:

$$\frac{4\pi a}{m} = U(0) - \frac{m}{V}U^2(0)\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{1}{k^2} \Rightarrow U(0) = \frac{4\pi a}{m}\left(1 + \frac{4\pi a}{V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)$$

Energia do estado fundamental:

$$\boxed{\frac{E_0}{N} = \frac{2\pi n a}{m} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left[E_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - 2\lambda + \frac{(4\pi n a)^2}{m k^2}\right] = \frac{2\pi n a}{m}\left[1 + \frac{128}{15}\left(\frac{n a^3}{\pi}\right)^{1/2}\right]}$$

Pressão: $$P_B(T=0) = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{N,T=0} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}n^2$$

NO ESTADO FUNDAMENTAL:

$$\forall \vec{k} \quad \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle = 0 \iff \boxed{b_k |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_k a_{\vec{k}} |0\rangle = v_k a^\dagger_{-\vec{k}} |0\rangle}$$

Excitações

OS OPERADORES $b_{\vec{k}}^{\dagger}$ CRIAM EXCITAÇÕES ACIMA DO ESTADO FUNDAMENTAL:

$$b_k^{\dagger}|0\rangle \to \text{1 EXCITAÇÃO}$$

$$b_k^{\dagger} b_q^{\dagger}|0\rangle \to \text{2 EXCITAÇÕES}$$

EXCITAÇÕES SÃO CHAMADAS "BOGOLYUBONS".

CADA EXCITAÇÃO $b_{\vec{k}}^{\dagger}$ TEM ENERGIA

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{(\epsilon_{\vec{k}}+2\lambda)^2 - 4\lambda^2} = \sqrt{\epsilon_k^2 + 4\lambda\epsilon_{\vec{k}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + 4\lambda\frac{k^2}{2m}}$$

$$E_{\vec{k}} \cong \begin{cases} k \to 0: & \sqrt{\frac{2\lambda k^2}{m}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\, k = \left(\frac{4\pi a n}{m^2}\right)^{1/2} k \\ k \to \infty: & \frac{k^2}{2m} + 2\lambda = \frac{k^2}{2m} + \frac{4\pi a n}{m} \end{cases}$$

EM BAIXAS ENERGIAS, A ENERGIA É LINEAR EM k COMO FÔNONS. ESSE RESULTADO CONTINUA VÁLIDO MESMO FORA DO LIMITE DE VALIDADE DA TEORIA:

$$E_{\vec{k}} = c\, k \qquad c = \sqrt{\frac{4\pi a n}{m^2}}$$

EM ALTAS ENERGIAS, RECUPERAMOS A DISPERSÃO DE BÓSONS NÃO INTERAGENTES.

Energia interna e calor específico

TEMPERATURA FINITA $\underline{T}$: O NÚMERO DE BOGOLIUBONS NÃO É FIXO, MAS É DETERMINADO APENAS PELA TEMPERATURA T. DA FÍSICA ESTATÍSTICA TEMOS QUE OS BOGOLYUBONS OBEDECE A DISTRIBUIÇÃO DE PLANCK:

$$n(\vec{k}) = \langle b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \rangle_T = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}}} - 1} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$U(T) = E_0 + \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \langle b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \rangle_T$$

$$= E_0 + \sum_{\vec{k}} \frac{E_{\vec{k}}}{e^{\beta E_{\vec{k}}} - 1} = E_0 + \Delta U(T)$$

$$\Delta U(T) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_{\vec{k}}}{e^{\beta E_{\vec{k}}} - 1}$$

EM BAIXAS TEMPERATURAS: $E_k \sim ck$

$$\Delta U(T) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{ck}{e^{\beta ck} - 1}$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \frac{ck}{e^{\beta ck} - 1}$$

$$\beta ck = \frac{ck}{T} \equiv x$$

$$= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{T}{c}\right)^3 T \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\pi^4/15}$$

$$\Delta U(T) = \frac{\pi^2 V}{30 c^3} T^4$$

"STEFAN-BOLTZMANN"

$$\Rightarrow C_V(T) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V \sim T^3$$

Depleção do condensado

$$N = N_0 + \sum_{\vec{k}}{}' a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \Rightarrow N = N_0(T) + \sum_{\vec{k}}{}' \langle a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \rangle_T$$

$$\longrightarrow N = N_0(T) + \sum_{\vec{k}}{}' \langle \left[u_k^2\, b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + v_k^2\, b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + v_k^2 \right] \rangle_T$$

$$\langle (\,) \rangle_T = \frac{\mathrm{Tr}\left[(\,) e^{-\beta E_{\vec{k}}} \right]}{Z}$$

USANDO $u_k^2 - v_k^2 = 1$:

$$N = N_0(T) + \sum_{\vec{k}}{}' \left\{ \left(\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} \right) \langle b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \rangle_T + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} - 1 \right]}_{N - N_0(0)} \right\}$$

EM $T = 0$:

$$N = N_0(0) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}{}' \left[\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} - 1 \right]$$

FRAÇÃO DO CONDENSADO: $\frac{N_0}{N} = f$

DEPLEÇÃO DO CONDENSADO: $\Lambda = \frac{N - N_0}{N} = 1 - f$

$$\Lambda = \frac{8}{3}\left(\frac{m a^3}{\pi}\right)^{1/2}$$

O AUMENTO DA TEMPERATURA DIMINUI A FRAÇÃO DO CONDENSADO (AUMENTA A DEPLEÇÃO)

$$\cancel{N} = N_0(T) + \sum_{\vec{k}}{}' \left(\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}}\right) \langle b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \rangle_T + \cancel{N} - N_0(0)$$

$$N_0(T) = N_0(0) - \sum_{\vec{k}}{}' \left(\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}}\right) \langle b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \rangle_T$$

O SEGUNDO TERMO CRESCE COM T ATÉ ALCANÇAR $N_0(0)$ ONDE $N_0(T_c) = 0$ E O SISTEMA PASSA A SER UM FLUIDO NORMAL.

ESSE COMPORTAMENTO PODE SER CALCULADO.

VAMOS ANALISAR ESSE TERMO EM D DIMENSÕES, EM BAIXAS TEMPERATURAS:

$$N_0(T) = N_0(0) - \frac{V}{(2\pi)^D} \int d^D k \left\{ \left[\frac{E_k + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} \right] \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1} \right\}$$

EXPANDINDO PARA k PEQUENO:

$$\frac{E_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} \approx \frac{2\lambda}{ck} \qquad \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1} \approx \frac{1}{e^{\beta c k} - 1} \sim \frac{1}{\beta c k} = \frac{T}{ck}$$

$$2^{\circ} \text{ TERMO: } \propto \int \frac{k^{(D-1)}}{k^2} dk \sim \int_0 k^{(D-3)} dk$$

SE $D \leq 2$: $\displaystyle \int_0 k^{-1} dk \sim \ln(k)\Big|_0 \to \infty$

ISSO SUGERE QUE O CONDENSADO É DESTRUÍDO POR FLUTUAÇÕES TÉRMICAS PARA $D \leq 2$.

EMBORA ISSO TENHA SIDO APENAS SUGERIDO DENTRO DA APROXIMAÇÃO DE BOGOLIUBOV, ESSE É UM RESULTADO RIGOROSO:

TEOREMA DE MERMIN-WAGNER-HOHENBERG

A DIMENSÃO $2 = D_{\text{LOWER}}$ = DIMENSÃO CRÍTICA INFERIOR

MESMO EM T=0:

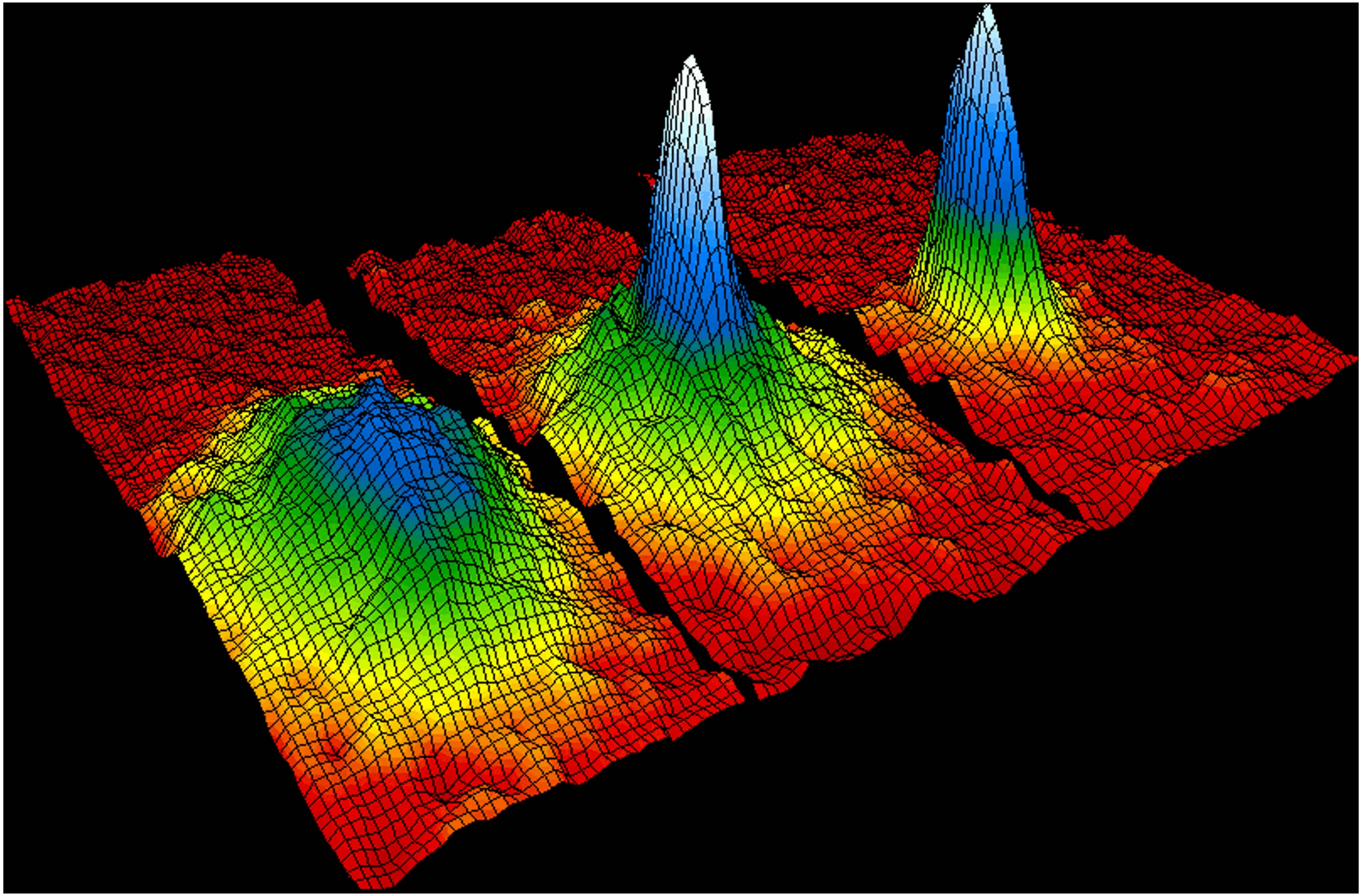
$$N = N_0(0) + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}{}' \left[\frac{\epsilon_{\vec{k}} + 2\lambda}{E_{\vec{k}}} - 1\right]$$

$$= N_0(0) + \frac{V}{(2\pi)^D}\frac{1}{2}\int \Gamma^D k^{(D-1)} dk \left[\frac{2\lambda}{ck} - 1\right]$$

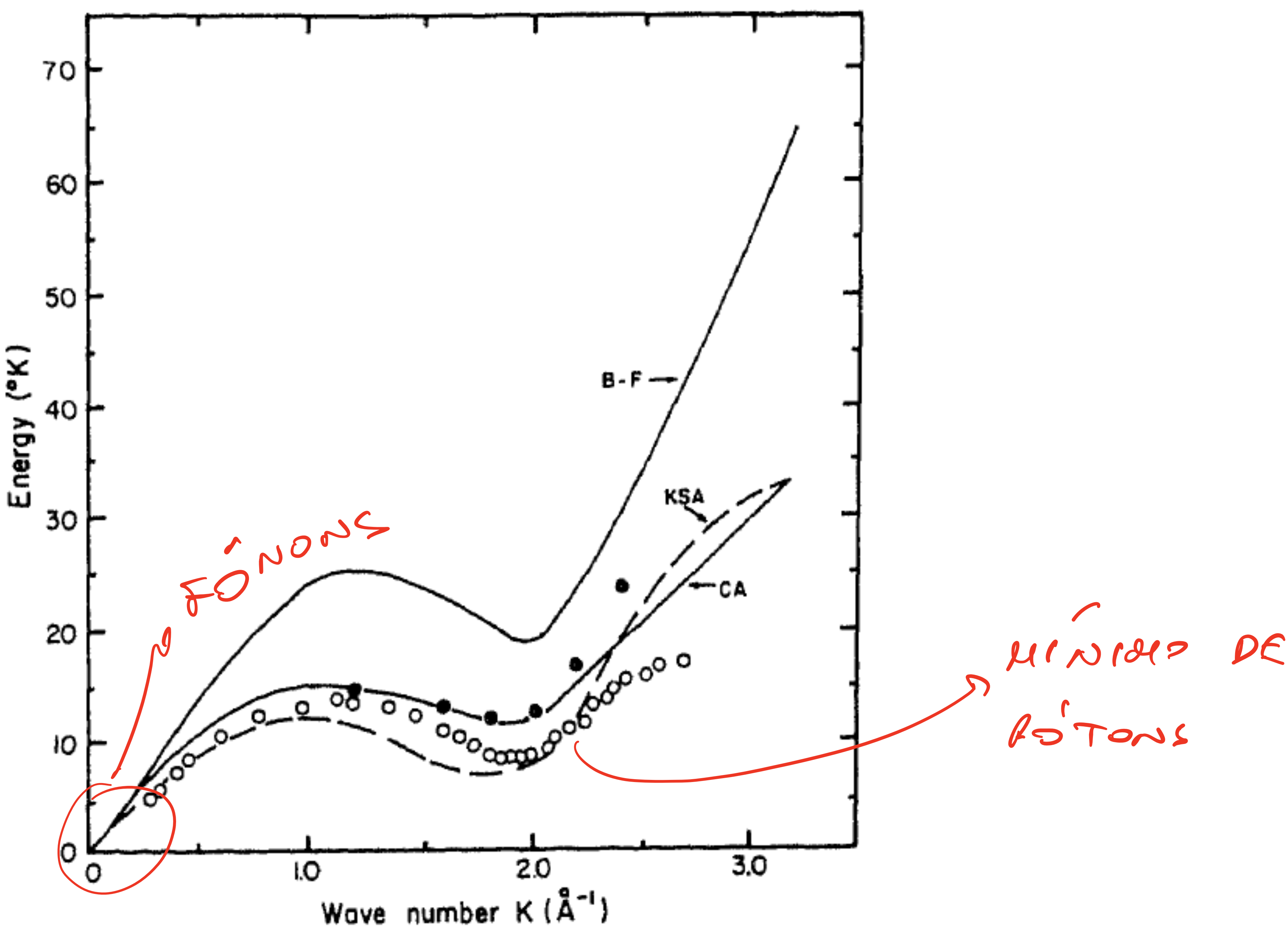
$$\int_0 \frac{k^{(D-1)}}{k} dk = \int_0 k^{(D-2)} dk = \begin{cases} D>1: & \text{CONVERGE} \\ D=1: & \ln(k)\big|_0 \to \infty \end{cases}$$

NESSE CASO, O CONDENSADO É DESTRUÍDO POR FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS EM D=1.

Condensação de Bose-Einstein de átomos de ^{87}Rb resfriados (E. A. Cornell, C. E. Wieman, 1995)
Cornell, Wieman e W. Ketterle receberam o prêmio Nobel em 2001 por suas observações



Espectro de excitações do ^4He, obtido por espalhamento de nêutrons



Vórtices num condensado de BE

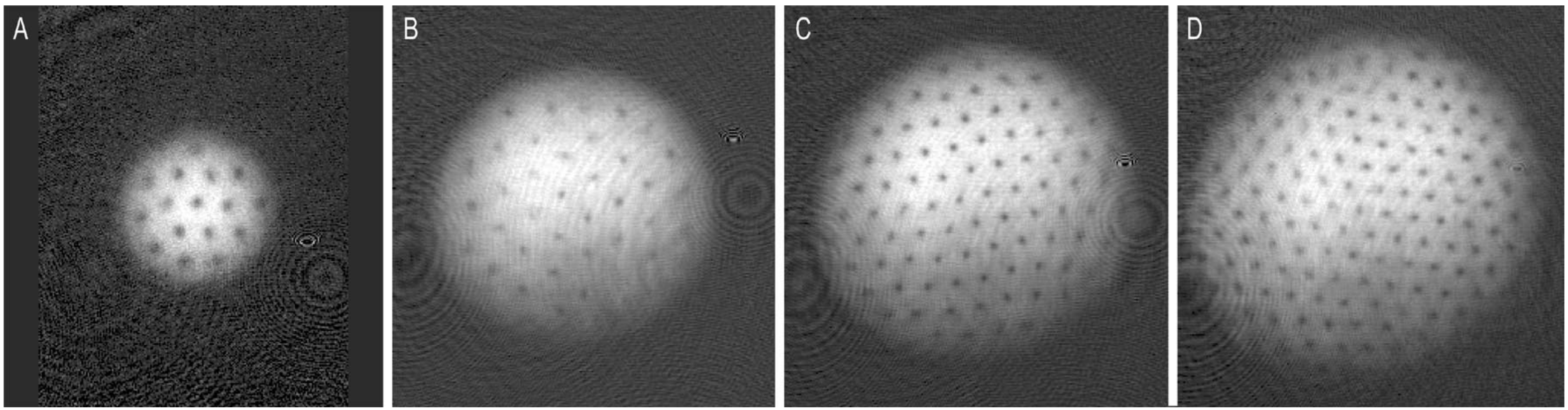


Fig. 1. Observation of vortex lattices. The examples shown contain approximately (**A**) 16, (**B**) 32, (**C**) 80, and (**D**) 130 vortices. The vortices have "crystallized" in a triangular pattern. The diameter of the cloud in (D) was 1 mm after ballistic expansion, which represents a magnification of 20. Slight asymmetries in the density distribution were due to absorption of the optical pumping light.

J. R. Abo-Shaer et al., Science **292**, 476 (2001)