

# Transições de fase e o grupo de renormalização

E. Miranda\*

*Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, Caixa Postal 6165, 13083-970, Campinas, SP, Brazil*

(Dated: 23 de maio de 2005)

## Contents

<b>I. Introdução</b>	2
<b>II. A transição ferromagnética</b>	3
<b>III. A solução de Onsager</b>	5
<b>IV. A transição líquido-gás</b>	5
<b>V. Outras transições e universalidade</b>	6
<b>VI. A teoria de Weiss do ferromagnetismo</b>	7
<b>VII. Modelo de Ising de alcance infinito</b>	10
<b>VIII. Teoria de Van der Waals da transição líquido-gás</b>	11
<b>IX. Teoria de Landau das transições de fase contínuas</b>	14
A. Derivação alternativa	17
<b>X. Flutuações e critério de Ginzburg</b>	18
<b>XI. Integração gaussiana</b>	19
<b>XII. Teoria de escala</b>	21
A. Expoentes críticos e análise dimensional	23
<b>XIII. Teoria fenomenológica de Landau</b>	24
<b>XIV. Somas parciais e variáveis de bloco</b>	26
<b>XV. Solução exata do modelo de ising unidimensional</b>	29
<b>XVI. Aplicação do grupo de renormalização ao modelo de Ising uni-dimensional</b>	32
<b>XVII. Aplicação do grupo de renormalização ao modelo de Ising bi-dimensional</b>	35
<b>XVIII. Outros resultados e operadores irrelevantes</b>	39
<b>XIX. Considerações gerais sobre os fluxos do GR</b>	41
<b>XX. Grupo de renormalização do modelo gaussiano</b>	46
<b>XXI. Expoentes gaussianos e operadores perigosamente irrelevantes</b>	48
<b>XXII. Grupo de renormalização do modelo de Landau e expansão em <math>\epsilon</math></b>	50
<b>Referências</b>	61

## I. INTRODUÇÃO

Sistemas de muitas partículas apresentam-se na natureza, quando em equilíbrio, em diversas **fases termodinâmicas**. Exemplos familiares são as fases gasosa, líquida e sólida das diversas substâncias. Mas existem também outros exemplos:

- (i) os compostos podem assumir várias fases magnéticas como paramagnetismo, ferromagnetismo (em que os spins se alinham numa determinada direção dando origem a uma magnetização líquida), antiferromagnetismo (em que os spins se alinham de maneira alternada de modo que não haja magnetização líquida), ferrimagnetismo (em que há tanto uma magnetização líquida quanto uma alternada) e vidros de spin (em que os spins se congelam em direções aleatórias);
- (ii) vários metais apresentam uma fase supercondutora a baixas temperaturas, em que o composto conduz corrente elétrica sem dissipação;
- (iii) ferroeletricidade, em que existe uma polarização elétrica (momentos de dipolo elétrico) permanente;
- (iv) superfluidez a baixas temperaturas, fenômeno análogo à supercondutividade, em que alguns líquidos (geralmente, os isótopos  $^3\text{He}$  e  $^4\text{He}$ , mas mais recentemente alguns gases armadilhados) fluem sem viscosidade por capilares;
- (v) ondas de densidade de carga (“charge density waves” ou CDW’s), em que a densidade eletrônica adquire um padrão periódico incomensurado com a rede cristalina que quebra a simetria de translação;
- (vi) cristais líquidos, cujas moléculas alongadas se alinham de modo a quebrar a simetria de rotação sem que haja quebra de simetria de translação como num sólido.

Cada uma dessas fases apresenta uma fenomenologia bem característica que as torna única e diferente das outras. Por isso, a transição entre uma fase e outra num mesmo sistema, quando mudamos parâmetros externos como temperatura, pressão, volume, campo magnético ou elétrico, se dá geralmente de maneira abrupta, ou seja, num ponto, linha ou superfície bem definidos no espaço de fase. Em alguns casos, em que as duas fases têm simetrias distintas, a transição é *necessariamente* abrupta, já que uma simetria ou está presente ou não está. Um exemplo típico de uma transição acompanhada de mudança de simetria é a transição de solidificação ou fusão. Enquanto o líquido é invariante por uma translação qualquer do sistema de coordenadas, o sólido cristalino quebra a simetria de translação (um vidro como o “vidro de janela” é uma exceção pois é um sólido amorfo, em que **não** há quebra de simetria translacional, embora ele compartilhe com os sólidos cristalinos a propriedade de oferecer resistência ao cisalhamento - módulo de cisalhamento finito -, sendo, portanto, diferente dos líquidos). Sempre que a passagem de uma fase a outra ocorra de maneira abrupta, ou seja, para valores bem definidos dos parâmetros externos (temperatura, pressão, etc.) dizemos que se trata de uma **transição de fase**. Um contra-exemplo ocorre na transição líquido-gás, em que se pode fazer a transformação de um em outro com ou sem a ocorrência de uma transição de fase. Isso ocorre porque não há uma distinção entre essas duas fases em termos de simetria.

Transições de fase podem ser classificadas como sendo **contínuas** ou **descontínuas**, conforme as primeiras derivadas da energia livre sejam contínuas ou descontínuas, respectivamente. Lembrando que,

$$S = - \left. \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T} \right|_{V, N} = - \left. \frac{\partial G(T, P, N)}{\partial T} \right|_{P, N},$$

$$V = \left. \frac{\partial G(T, P, N)}{\partial P} \right|_{T, N},$$

$$M = - \left. \frac{\partial F(T, H, N)}{\partial H} \right|_{T, N},$$

onde  $F(T, V, N)$  e  $G(T, P, N)$  são as energias livres de Helmholtz e Gibbs, respectivamente, já escritas como funções de suas variáveis naturais, vemos que uma transição de fase descontínua é acompanhada de um salto descontínuo da entropia, que é o calor latente, e de uma variação descontínua do volume (como nas transições sólido-líquido ou líquido-gás) ou da magnetização, no caso de sistemas magnéticos. Segue, portanto, que uma transição de fase contínua não apresenta calor latente ou descontinuidades de volume (ou, equivalentemente, densidade) ou magnetização. Na nomenclatura antiga, devida a Ehrenfest, as transições de fase eram classificadas como sendo de ordem  $N$ , caso a  $N$ -ésima derivada da energia livre apresentasse uma descontinuidade. Nesse caso, transições descontínuas seriam de primeira ordem e, acreditava-se, as transições contínuas seriam de segunda ordem. Entretanto, estas últimas, na verdade, apresentam uma *divergência* nas derivadas segundas (como o calor específico  $C = -T\partial^2 F/\partial T^2$ , a compressibilidade  $\kappa = -(1/V)\partial^2 G/\partial P^2$  ou a susceptibilidade magnética  $\chi = -\partial^2 F/\partial H^2$ ) e não uma descontinuidade. Por isso, a nomenclatura de Ehrenfest não é a mais adequada, embora até hoje se use o termo “transição de fase de segunda ordem” para se referir às transições contínuas.

Nesse curso, estaremos particularmente interessados no caso das transições contínuas. Estas apresentam um **comportamento universal** (como veremos a seguir), em contraste com as transições descontínuas. Comportamento universal aqui quer dizer que sistemas muito diferentes se comportam da mesma maneira na região próxima a uma transição de fase contínua (desde que algumas características simples como a dimensionalidade e o número de componentes do parâmetro de ordem sejam as mesmas, como veremos).

Vamos olhar com mais detalhes alguns sistemas paradigmáticos.

## II. A TRANSIÇÃO FERROMAGNÉTICA

Vários sistemas com elementos dos metais de transição ou das terras raras apresentam uma magnetização espontânea abaixo de uma temperatura crítica  $T_c$  chamada de temperatura de Curie. Os exemplos mais familiares entre os elementos são Fe, Co e Ni. Em alguns desses compostos a magnetização tem sua origem no alinhamento dos momentos magnéticos (geralmente de spin) de elétrons que residem em orbitais localizados nas proximidades dos sítios da rede (magnetismo localizado). Esse **não** é o caso de Fe, Co e Ni, pois nesses materiais o magnetismo ocorre nos elétrons itinerantes. Sabemos que um modelo microscópico importante para a descrição de vários desses compostos é o modelo de Heisenberg

$$H_H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (2.1)$$

onde as constantes de troca  $J_{ij}$  são positivas, favorecendo o alinhamento dos spins. Efeitos relativísticos (interação spin-órbita) podem fazer com que os spins tendam a se alinhar ao longo de direções preferenciais do cristal. Em particular, em alguns compostos, como  $\text{YFeO}_3$ ,  $\text{CrBr}_3$  ou  $\text{LiHoF}_4$ , os spins só podem apontar em uma direção, digamos  $z$ , no sentido de  $z$  positivo ou negativo (ferromagnetos uniaxiais ou de eixo fácil). Nesse caso, o modelo de Heisenberg simplifica-se e se torna o modelo de Ising

$$H_I = - \sum_{i,j} J_{ij} S_{zi} S_{zj}. \quad (2.2)$$

Em outros casos, os spins podem apontar em qualquer direção num plano, digamos  $xy$ , e temos então o chamado modelo  $XY$  (mais corretamente, o modelo  $XX$ , pois as duas direções no plano são equivalentes)

$$H_{XY} = - \sum_{i,j} J_{ij} (S_{xi} S_{xj} + S_{yi} S_{yj}). \quad (2.3)$$

Em todos esses casos, abaixo de  $T_c$  o sistema apresenta uma magnetização espontânea

$$\mathbf{M} = \sum_i \langle \mathbf{S}_i \rangle \neq 0 \text{ se } T < T_c,$$

para os valores esperados das componentes apropriadas do spin. A magnetização de um ferromagneto é um exemplo de um **parâmetro de ordem**, cuja característica principal é ser nulo acima da temperatura crítica e não-nulo abaixo dela. O conceito do parâmetro de ordem (introduzido por Landau, ver Seção IX) é extremamente importante na teoria das transições de fase. Ele representa uma nova variável termodinâmica necessária para a descrição da fase ordenada (ferromagnética no caso acima).

Note que a transição ferromagnética é acompanhada por uma quebra da simetria de reversão temporal (lembre que  $\mathbf{S}_i \rightarrow -\mathbf{S}_i$  sob reversão temporal). Esse é um exemplo de uma **quebra espontânea de simetria**, pois os Hamiltonianos (2.1-2.3) são invariantes sob reversão temporal. O estado termodinâmico do sistema abaixo de  $T_c$  é que não é simétrico sob essa operação de simetria ( $\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}$ ). Discutiremos brevemente mais adiante o importante conceito de quebra espontânea de simetria.

À medida que a temperatura vai se aproximando de  $T_c$  a partir de valores mais baixos, a magnetização espontânea vai diminuindo até que ela se anula exatamente em  $T_c$  (Fig. 1). É exatamente o fato de que  $M$  cresce a partir de zero para  $T < T_c$  que caracteriza a transição como contínua. Se  $M$  tivesse um salto em  $T_c$  a transição seria de primeira ordem ou descontínua. Próximo de  $T_c$  o comportamento de  $M$  tem a seguinte forma

$$M \sim (T_c - T)^\beta, \quad (2.4)$$

onde o sinal  $\sim$  deve ser lido como “vai com a temperatura da seguinte forma” (ou seja, estamos mais interessados na lei de potência que no coeficiente do termo do lado direito). O expoente  $\beta$  é um exemplo de um expoente crítico. Para sistemas com simetria Ising, o valor experimental  $\beta \approx 0.31 - 0.33$ . O conceito de universalidade vem do fato de que o valor de  $\beta$  parece ser o mesmo (dentro da incerteza experimental) para *todos* os sistemas magnéticos com simetria Ising! Como veremos a seguir,

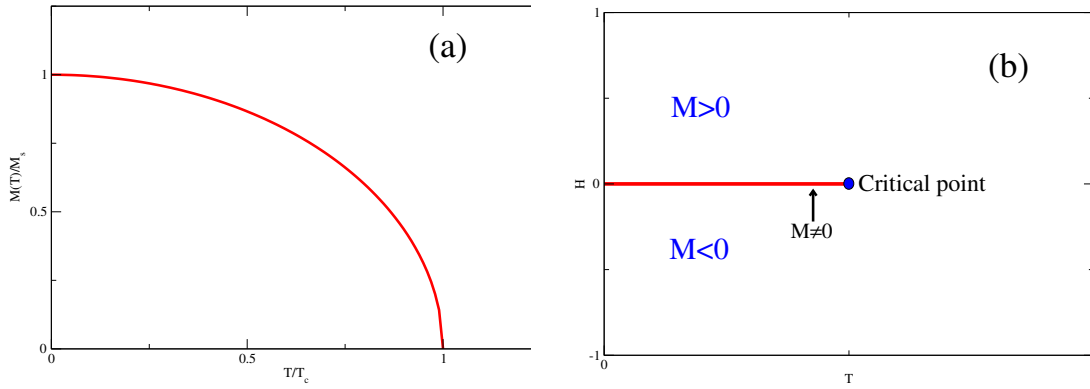


Figura 1: (a) Magnetização de um ferromagneto como função da temperatura; (b) Diagrama de fase do ferromagneto no plano  $H - T$ . A linha vermelha representa magnetização espontânea.

até sistemas não-magnéticos, como a transição líquido-gás, parecem apresentar o mesmo expoente crítico. Já se o sistema for melhor descrito pelo Hamiltoniano de Heisenberg, Eq. (2.1), o expoente será diferente (embora no caso particular de  $\beta$  o valor não seja tão diferente).

Consideremos agora outras quantidades físicas. Próximo de  $T_c$ , tanto acima quanto abaixo desse valor, o calor específico apresenta uma fraca divergência

$$C(T) \sim t^{-\alpha}, \quad (2.5)$$

onde introduzimos a notação conveniente  $t \equiv |T - T_c|/T_c$ . É comum também fazer a distinção entre os expoentes críticos acima ( $\alpha$ ) e abaixo ( $\alpha'$ ) de  $T_c$ , embora os valores sejam iguais dentro da resolução experimental,  $\alpha \approx 0.1$  (para simetria Ising).

A dependência da magnetização com o campo magnético aplicado (suposto pequeno) exatamente em  $T = T_c$  também define um expoente crítico

$$M(H, T = T_c) \sim H^{1/\delta}. \quad (2.6)$$

Experimentalmente, para simetria Ising,  $\delta \approx 5$ .

A susceptibilidade crítica, medida com  $H \rightarrow 0$ , também é divergente

$$\chi(T) \sim \begin{cases} t^{-\gamma}, & T > T_c, \\ t^{-\gamma'}, & T < T_c. \end{cases} \quad (2.7)$$

Para sistemas Ising, observa-se  $\gamma \approx \gamma' \approx 1.23 - 1.25$ .

Mais dois expoentes críticos podem ser definidos. Eles envolvem o comportamento da função correlação entre spins distantes entre si. Podemos definir a **função correlação** (conectada) da seguinte maneira

$$G(\mathbf{r}) = \langle [\mathbf{S}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle] \cdot [\mathbf{S}(\mathbf{0}) - \langle \mathbf{S}(\mathbf{0}) \rangle] \rangle, \quad (2.8)$$

onde usamos a coordenada contínua  $\mathbf{r}$  para rotular a posição do spin. Note que os valores esperados  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{S}(\mathbf{0}) \rangle$  são nulos para  $T > T_c$  e não nulos do contrário. Claramente,  $G(\mathbf{r})$  mede a correlação entre spins distantes de  $\mathbf{r}$  e deve ser uma função decrescente do módulo de  $\mathbf{r}$ , pelo menos para  $|\mathbf{r}|$  suficientemente grande. Observa-se que, se  $T \neq T_c$  existe um comprimento característico  $\xi(T)$ , chamado de **comprimento de correlação**, que determina a escala de decaimento de  $G(\mathbf{r})$  para longas distâncias ( $d$  é a dimensionalidade do sistema, *não* do parâmetro de ordem)

$$G(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{\xi^{d-2}} \frac{e^{-r/\xi(T)}}{(r/\xi)^{(d-1)/2}} \quad (r \gg \xi). \quad (2.9)$$

Dessa forma, spins separados de uma distância  $\gg \xi$  estarão descorrelacionados. Exatamente em  $T = T_c$ , a função de correlação obedece uma lei de potência

$$G(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (2.10)$$

que define o expoente crítico  $\eta$ , também chamado de **dimensão anômala**. A forma da função de correlação (2.10) também é válida suficientemente próximo de  $T_c$  se  $r \ll \xi$ . A função de correlação pode ser medida através de experimentos de espalhamento de nêutrons. Para sistemas Ising, o valor de  $\eta \approx 0.01 - 0.04$ . Seu pequeno valor faz com que ele seja extremamente difícil de ser determinado. Observa-se também que

$$\xi(T) \sim \begin{cases} t^{-\nu}, & T > T_c, \\ t^{-\nu'}, & T < T_c. \end{cases} \quad (2.11)$$

O expoente  $\nu \approx \nu' \approx 0.63$  para sistemas Ising. Exatamente em  $T = T_c$  o comprimento de correlação é infinito. A divergência do comprimento de correlação é uma das características principais das transições de segunda ordem, pois ele não diverge nas transições de primeira ordem. Veremos mais adiante que isso está intimamente ligado ao fenômeno da universalidade.

Definimos, portanto, 6 expoentes críticos diferentes. Veremos adiante que eles não são todos independentes e existem 4 relações entre eles, de modo que há apenas 2 expoentes a determinar. Em todos os casos acima, observa-se o mesmo valor dos expoentes em diversos sistemas físicos. Estes parecem depender apenas do número de componentes do parâmetro de ordem  $e$ , como veremos, da dimensionalidade do sistema (todos os sistemas magnéticos acima são tri-dimensionais; entretanto, comportamento bi- ou uni-dimensional pode ser observado em sistemas fortemente anisotrópicos). O objetivo de uma teoria geral dos fenômenos críticos é entender a origem da universalidade, do que ela depende e calcular os valores dos expoentes críticos.

### III. A SOLUÇÃO DE ONSAGER

É interessante observar os resultados obtidos em um dos poucos sistemas em que existe solução exata: o modelo de Ising bi-dimensional, cuja solução por Onsager em 1944 (para  $H = 0$ ) é um dos maiores feitos de física teórica do século XX. Nesse caso, obtemos

$$\begin{cases} \alpha = 0(\log), \\ \beta = 1/8, \\ \delta = 15, \\ \gamma = 7/4, \\ \nu = 1, \\ \eta = 1/4. \end{cases} \quad (3.1)$$

O expoente  $\alpha = 0$  significa que o calor específico diverge logaritmicamente, como indicado, pois

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1 - t^{-\alpha}}{\alpha} \right) = \ln t.$$

É interessante notar que os expoentes críticos são todos números racionais. Isso não se repete (aparentemente) para outros sistemas.

### IV. A TRANSIÇÃO LÍQUIDO-GÁS

Outra transição de fase importante é a transição líquido-gás. O diagrama de fases típico de uma transição como essa é o da água (Fig. 2). No plano  $P - T$  (Fig. 2(a)), ao longo da linha de coexistência líquido-gás, para uma dada pressão e uma dada temperatura, há vários volumes possíveis para o sistema (considerando  $N$  fixo), correspondentes às frações volumétricas variáveis de líquido e gás. O que é importante notar é que a linha de transições de fase termina em um ponto bem definido ( $T_c, P_c, V_c$ ), chamado de ponto crítico, em que os volumes do gás e do líquido são idênticos. O entendimento pode ser mais aprofundado com a análise no plano  $P - V$ . O diagrama de fases correspondente no plano  $P - V$  (Fig. 2(b)) mostra claramente que, ao longo da linha de transições, existe uma diferença entre os volumes da água líquida e do vapor d'água para um número fixo de moléculas, ou seja, uma diferença de volumes específicos ou de densidades. Essa diferença, como já dito, se anula no ponto crítico.

Pode-se tomar a diferença entre a densidade do gás  $\rho_g$  (ou do líquido  $\rho_l$ ) e  $\rho_c = N/V_c$  ao longo da linha de coexistência como parâmetro de ordem da transição. Ela diminui à medida que  $T \rightarrow T_c$  e é zero exatamente em  $T = T_c$ . Dessa forma, as transições ao longo da linha são todas de primeira ordem, enquanto que exatamente em  $T = T_c$  a transição é contínua. Isso é confirmado pela presença de calor latente ao longo da linha de coexistência, que se anula no ponto crítico.

Vale ressaltar aqui que a evolução do sistema a partir de seu estado líquido até seu estado gasoso pode se dar continuamente, **sem nenhuma transição de fase**, como se pode observar no diagrama de fases no plano  $P - T$ . Isso acontece porque não há

Figura 2: Diagrama de fases da água, nos planos (a)  $P - T$  e (b)  $P - V$ , mostrando a transição líquido-gás. A linha de transições de primeira ordem termina num ponto crítico de segunda ordem (transição contínua).

Quantidade física	Índice	d=2 (exato)	d=3	Campo médio	Heisenberg
Calor específico	$\alpha$	0(log)	0.104	0(descont.)	-0.1
Parâmetro de ordem	$\beta$	1/8	0.325	1/2	0.33
Susceptibilidade	$\gamma$	7/4	1.234	1	1.33
Parâmetro de ordem	$\delta$	15	5.2	3	4.2
Comprimento de correlação	$\nu$	1	0.625	1/2	0.7
Função de correlação	$\eta$	1/4	0.024-0.028	0	0.067

Tabela I: Valores dos expoentes críticos para a classe de universalidade de Ising em  $d = 2$  e  $d = 3$ .

uma diferença de simetria entre essas duas fases, ao contrário da fase sólida, em que há quebra da simetria de translação. Como já foi dito, uma simetria ou está presente ou não está e não se pode ir de uma situação à outra “gradualmente”. Nesse sentido, a transição líquido-gás é diferente da transição ferromagnética.

A maneira segundo a qual a diferença de densidades vai a zero à medida que  $T_c$  se aproxima define o expoente  $\beta$

$$\rho_l - \rho_c \propto \rho_c - \rho_g \sim t^\beta. \quad (4.1)$$

Analogamente, o calor específico a volume constante em  $V = V_c$  diverge com a aproximação de  $T_c$ , definindo o expoente  $\alpha$

$$C_V(T) \sim t^{-\alpha}. \quad (4.2)$$

O análogo da susceptibilidade magnética é a compressibilidade isotérmica

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 G}{\partial P^2}. \quad (4.3)$$

Ela diverge no ponto crítico (note a tangente horizontal no ponto crítico no plano  $P - V$ ), definindo o expoente  $\gamma$

$$\kappa_T \sim t^{-\gamma}. \quad (4.4)$$

É interessante notar que

$$C_P - C_V = -T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial P}. \quad (4.5)$$

Portanto, a diferença entre  $C_P$  e  $C_V$  é proporcional à compressibilidade. Como o expoente  $\gamma > \alpha$ , a divergência da compressibilidade é dominante e determina a divergência de  $C_P$ . Ao longo da isoterma crítica  $T = T_c$ , temos que

$$\rho_l - \rho_c \sim (P - P_c)^{1/\delta}. \quad (4.6)$$

A função de correlação densidade-densidade, é definida como

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho^2} \langle [\rho(\mathbf{r}) - \rho] [\rho(\mathbf{0}) - \rho] \rangle. \quad (4.7)$$

A partir dela, definem-se os expoentes restantes  $\nu$  e  $\eta$  em total analogia com o caso ferromagnético (ver Seção II).

O mais interessante é que os valores observados experimentalmente para os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$  e  $\nu$  são os mesmos, dentro da resolução experimental, que os observados em sistemas ferromagnéticos de simetria Ising. Isso sugere uma forte analogia entre esses dois sistemas e uma universalidade ainda maior do que se pudesse supor, pois engloba não apenas diferentes sistemas magnéticos, mas até transições de fase diferentes.

## V. OUTRAS TRANSIÇÕES E UNIVERSALIDADE

Outras transições de fase foram estudadas em seu comportamento crítico. Dignas de nota são a transição superfluida do  $^4\text{He}$ , transições antiferromagnéticas, transições de ordenamento em ligas binárias, etc. Observa-se nelas também o fenômeno

da universalidade, ou seja, sistemas muito diferentes apresentam o mesmo comportamento crítico. Sabe-se hoje (e veremos adiante) que o comportamento crítico depende apenas de algumas poucas propriedades da transição, como a dimensionalidade do sistema, o número de componentes do parâmetro de ordem e se as interações são de longo ou de curto alcance. Todos os outros detalhes, como o tipo de rede cristalina, as interações microscópicas (desde que sejam todas de igual alcance), e outras não afetam o comportamento crítico, ou seja, são irrelevantes para a determinação dos valores dos expoentes críticos. Foi um dos grandes triunfos do grupo de renormalização explicar a origem dessa universalidade.

Os exemplos dos modelos de Heisenberg, XY e Ising é interessante como ilustração de três situações que diferem pelo número de componentes do parâmetro de ordem. Cada um desses modelos, em um dada dimensão, é caracterizado por um conjunto de expoentes críticos. O fato da transição líquido-gás ser descrita por um escalar  $e$ , portanto, por um parâmetro de ordem com apenas uma componente explica, através do grupo de renormalização, porque os expoentes críticos de Ising são os mesmos dessa transição. Analogamente, a transição superfluida do  $^4\text{He}$  (e também a supercondutora) é descrita por um parâmetro de ordem complexo, essencialmente o valor esperado do operador de destruição bosônico em  $\mathbf{k} = 0$

$$\Psi = \langle b_{\mathbf{k}=0} \rangle. \quad (5.1)$$

Como ele tem duas componentes, segue que a transição superfluida tem os mesmos expoentes críticos que o modelo XY tridimensional. No jargão, diz-se que pertencem à mesma **classe de universalidade**.

Vale a pena também chamar a atenção para o fato de que um outro tipo de transição de fase contínua tem atraído muito a atenção dos pesquisadores nos últimos anos. Trata-se da chamada **transição de fase quântica**. São transições de fase que acontecem em sistemas a  $T = 0$  como função de um parâmetro externo como a pressão ou o campo magnético. Como o sistema está em seu estado fundamental em  $T = 0$ , trata-se de transições entre estados fundamentais do sistema à medida que o parâmetro externo é variado. É claro que o zero absoluto de temperatura nunca é atingido, mas vimos que grande parte do interesse das transições contínuas está na vizinhança do ponto crítico e é esse que é estudado nas transições quânticas.

Vale a pena tentar explicar a razão do nome. Uma das características mais importantes das chamadas transições contínuas térmicas (ou seja, aquelas que acontecem a uma temperatura finita) é a presença de um comprimento de correlação divergente. Isso quer dizer que os graus de liberdade importantes para a transição são aqueles correspondentes a comprimentos de onda longos e, conseqüentemente, baixas energias. A uma temperatura finita, a ocupação desses modos de baixas energias é essencialmente clássica (Maxwell-Boltzmann). Já no caso das transições a  $T = 0$ , esses modos obedecem a uma estatística intrinsecamente quântica (Bose-Einstein ou Fermi-Dirac), daí o nome da transição. As transições quânticas ainda não são totalmente compreendidas e são objeto de intensa investigação.

Finalmente, deve-se mencionar a questão da desordem. A presença de desordem é quase sempre inevitável nos sistemas e sua influência na natureza do comportamento crítico pode ser dramática. Em particular, alguns tipos de transição são geradas pela desordem. Um exemplo importante e central são os sistemas chamados de vidros de spin. Trata-se de sistemas magnéticos que apresentam o que parece ter todas as características de uma transição de fase contínua, mas em que os spins na fase “ordenada” não assumem nenhum padrão ordenado espacialmente, mas apenas “se congelam” numa configuração aleatória. O entendimento desses sistemas também é bastantes controverso e eles representam um campo de fronteira na pesquisa em matéria condensada.

## VI. A TEORIA DE WEISS DO FERROMAGNETISMO

O estudo de fenômenos críticos é fortemente baseado no estudo de modelos. Embora esses possam parecer super-simplificados, o fenômeno da universalidade sugere que não importa muito qual modelo é utilizado pois ele deverá levar aos expoentes críticos corretos (claro, desde que “não se jogue fora o bebê com o banho”). Ao final da análise, esperamos poder justificar a utilização de modelos simplificados.

O modelo mais importante que estudaremos é o modelo de Ising. Como dissemos, ele deve ser capaz de descrever o comportamento crítico de ferromagnetos uniaxiais (de “eixo fácil”), assim como o ponto crítico da transição líquido-gás. Vamos reescrevê-lo aqui, supondo apenas interação entre primeiros vizinhos

$$H_I = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \quad (6.1)$$

onde o símbolo  $\langle ij \rangle$  indica primeiros vizinhos. Por simplicidade, omitimos o sub-índice  $z$ . Vamos tentar supor por enquanto que a rede é uma rede hiper-cúbica (quadrada em 2D, cúbica em 3D, etc.).

Um importante tratamento do modelo de Ising é a **teoria de campo médio de Weiss**. Cada spin da rede interage apenas com seus  $z = 2d$  primeiros vizinhos (não confundir com a direção  $z$ ). A teoria de Weiss parte da suposição de que cada spin pode ser escrito como seu valor médio mais flutuações em torno da média

$$S_i = \langle S_i \rangle + \delta S_i. \quad (6.2)$$

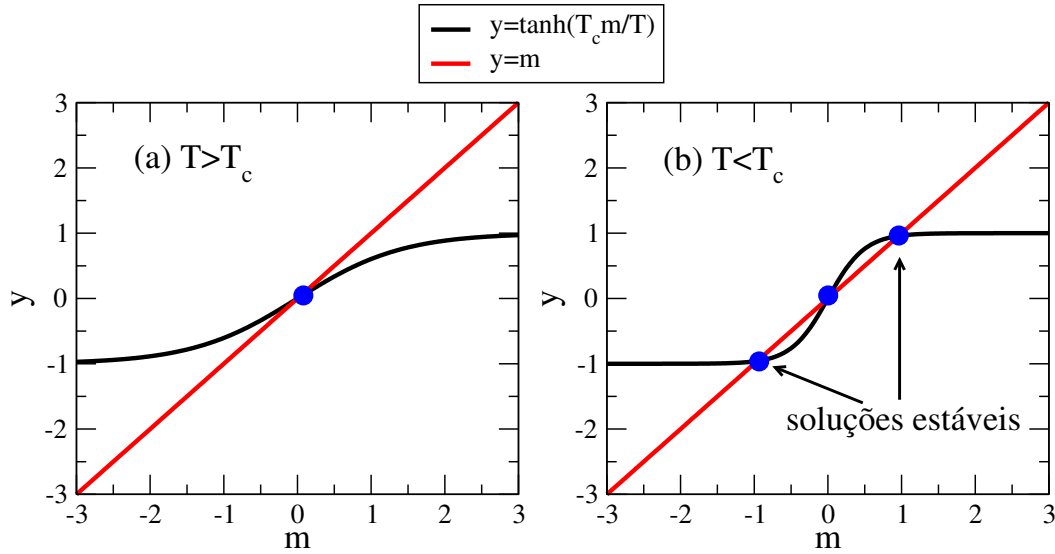


Figura 3: Solução gráfica da equação da teoria de campo médio de Weiss ( $h = 0$ ) para (a)  $T > T_c = zJ$  (uma solução estável em  $m = 0$ ) e (b)  $T < T_c$  (duas soluções estáveis com  $m \neq 0$  e uma instável em  $m = 0$ ).

Cada par de primeiros vizinhos  $i$  e  $j$ , portanto, interagirá através de

$$S_i S_j = [\langle S_i \rangle + \delta S_i] [\langle S_j \rangle + \delta S_j] = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \delta S_i \langle S_j \rangle + \langle S_i \rangle \delta S_j + \mathcal{O}[\delta S^2], \quad (6.3)$$

e desprezam-se os termos quadráticos na interação. Re-escrevendo a Eq. (6.3) em termos das variáveis de spin originais

$$S_i S_j \approx -\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + S_i \langle S_j \rangle + \langle S_i \rangle S_j.$$

Vamos nos concentrar primeiramente no caso uniforme, em que  $\langle S_j \rangle = m$ , independente do sítio  $j$ . Nesse caso,

$$H_W = N \frac{Jz}{2} m^2 - h_W \sum_i S_i, \quad (6.4)$$

$$h_W = zJm. \quad (6.5)$$

Fisicamente, a magnetização média dos vizinhos age como um campo magnético efetivo  $h_W$ , chamado de **campo efetivo de Weiss**. Se existe um campo magnético externo  $H_I \rightarrow H_I - h \sum_i S_i$ , o campo de Weiss é acrescido dele  $h_W = zJm + h$ . O Hamiltoniano (6.4) é agora de trivial solução

$$Z(T, h) = \text{Tr} [e^{-\beta H_W}] = e^{-N\beta Jz m^2/2} 2^N \cosh^N(\beta h_W), \quad (6.6)$$

$$f(T, h) = -\frac{1}{\beta N} \ln Z(h) = \frac{Jz}{2} m^2 - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta h_W)], \quad (6.7)$$

onde a segunda expressão nos dá a energia livre por spin, segundo a formulação usual de mecânica estatística. O próximo passo consiste em achar a magnetização por sítio

$$m(T, h) = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial h} = \tanh(\beta h_W) = \tanh[\beta h + \beta zJm(T, h)], \quad (6.8)$$

que é uma equação **auto-consistente** para a magnetização  $m$ . Note que a mesma equação pode ser obtida, supondo  $m$  um parâmetro variacional e minimizando a energia livre em relação a  $m$  (ver adiante mais detalhes). O método mais fácil de solução dessa equação é o método gráfico. Basta plotar as curvas  $y = m$  e  $y = \tanh(\beta h + \beta zJm)$  como funções de  $m$  e procurar pela(s) interseção(ões), ver Fig. 3

O caso  $h = 0$  é bem simples. Se  $\beta zJ < 1$ , ou seja,  $T > zJ \equiv T_c$ , a inclinação da tangente hiperbólica em  $m = 0$  é menor que 1 e há apenas uma solução:  $m = 0$ . Essa solução é estável, no sentido de que é um mínimo da energia livre (prove isso). Já

se  $\beta z J > 1$  ou  $T < T_c$ , 3 soluções aparecem: a solução  $m = 0$ , que passa a ser instável, e duas soluções em  $m = \pm m_W \neq 0$ , que são estáveis. Isso parece ter a fenomenologia correta de um ferromagneto. À medida que  $T \rightarrow T_c^-$ , as 3 soluções acima se juntam em  $m = 0$ . Podemos expandir a Eq. (6.8) para  $m$  pequeno, ainda em  $h = 0$ , usando

$$\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}, \quad (6.9)$$

obtemos

$$m(T, h = 0) \approx \sqrt{3 \frac{(T_c - T)}{T_c}} \sim t^{1/2}. \quad (6.10)$$

Assim, a teoria de Weiss prevê  $\beta = 1/2$ . Analogamente, em  $T = T_c$  ( $\beta = \beta_c = 1/(zJ)$ ) para  $h$  e  $m$  pequenos

$$\begin{aligned} m(T_c, h) &= \tanh[\beta_c h + m(T_c, h)] \\ m(T_c, h) &\approx \beta_c h + m(T_c, h) - \frac{1}{3}[\beta_c h + m(T_c, h)]^3 \\ \Rightarrow m(T_c, h) &\approx (3\beta_c h)^{1/3} - \beta_c h \approx (3\beta_c h)^{1/3} \sim h^{1/3}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Obtemos assim  $\delta = 3$  pela teoria de Weiss. A susceptibilidade é obtida diferenciando a Eq. (6.8) em relação a  $h$  e fazendo  $h = 0$ , sem esquecer da dependência implícita de  $m$  com  $h$

$$\begin{aligned} \chi(T, h = 0) &= \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{\beta + \frac{\beta}{\beta_c} \chi}{\cosh^2(\beta m / \beta_c)}, \\ \chi &= \frac{\beta \beta_c}{\beta_c \cosh^2(\beta m / \beta_c) - \beta}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para  $T > T_c$ ,  $m = 0$ , e como  $\beta_c - \beta \approx \beta_c t$

$$\chi(T, h = 0) \approx \frac{\beta_c}{t}, \quad (6.13)$$

e  $\gamma = 1$ . Para  $T < T_c$ , usando a Eq. (6.10)

$$\cosh^2(\beta m / \beta_c) \approx \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)^2 \approx 1 + m^2 \approx 1 + 3t, \quad (6.14)$$

e como  $\beta_c - \beta \approx -\beta_c t$

$$\chi(T, h = 0) \approx \frac{\beta \beta_c}{\beta_c (1 + 3t) - \beta} \approx \frac{\beta_c^2}{2\beta_c t} = \frac{\beta_c}{2t}, \quad (6.15)$$

que nos dá  $\gamma' = \gamma = 1$ . O cálculo do expoente do calor específico dá uma descontinuidade em  $T_c$  ( $\alpha = 0$ ) e é deixado como exercício. Assim, obtemos os 4 primeiros expoentes da Tabela I.

Para obtermos os expoentes  $\eta$  e  $\nu$  é preciso introduzir flutuações espaciais. Essas podem ocorrer devido a flutuações térmicas ou devido a um campo externo variável no espaço

$$H_I \rightarrow H_I - \sum_i h_i S_i. \quad (6.16)$$

Nesse caso, devemos admitir a possibilidade de que  $\langle S_j \rangle = m_j$  varie no espaço. Assim

$$h_{iW} = J \sum_{j=1}^z m_j + h_i, \quad (6.17)$$

e

$$m_i = \tanh \left( \beta J \sum_{j=1}^z m_j + \beta h_i \right). \quad (6.18)$$

Vamos tentar uma abordagem no contínuo, em que as variações espaciais na escala do parâmetro de rede são muito pequenas. Nesse caso,  $i \rightarrow \mathbf{x}$  e

$$m(\mathbf{x}) = \tanh \left( \beta J \sum_{j=1}^z m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}_j) + \beta h(\mathbf{x}) \right), \quad (6.19)$$

onde os unitários  $\boldsymbol{\delta}_j$  conectam o sítio  $i$  aos seus  $z$  primeiros vizinhos. Expandindo nas derivadas espaciais

$$m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}_j) \approx m(\mathbf{x}) + \delta_{j\alpha} \nabla_\alpha m(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \delta_{j\alpha} \delta_{j\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta m(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (6.20)$$

Os termos de primeira ordem em  $\delta$  e os termos cruzados de segunda ordem se anulam por simetria na soma sobre primeiros vizinhos e obtemos

$$\sum_{j=1}^z m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}_j) \approx z m(\mathbf{x}) + \delta^2 \nabla^2 m(\mathbf{x}),$$

donde

$$m(\mathbf{x}) = \tanh \left( \beta J z m(\mathbf{x}) + \beta J \delta^2 \nabla^2 m(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x}) \right). \quad (6.21)$$

Expandindo para pequenos valores do argumento

$$(\beta z J - 1) m - \frac{1}{3} (\beta z J m)^3 + \beta J \delta^2 \nabla^2 m(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.22)$$

Vamos explorar essa equação mais tarde em conexão com a teoria de Landau (Seção IX).

## VII. MODELO DE ISING DE ALCANCE INFINITO

A teoria de campo médio de Weiss pode ser obtida rigorosamente em dois limites equivalentes:

1. No limite que a dimensão da rede vai a infinito.
2. No limite em que cada spin interage igualmente com todos os outros da rede (alcance infinito).

Fica claro porque esses limites fazem a aproximação de campo médio exata. Em ambos os casos, cada spin vê um número infinito de outros spins. Pelo teorema do limite central, as flutuações em torno da média de uma soma de  $N$  termos aleatórios cresce com  $\sqrt{N}$  e, portanto, a variação relativa cai com  $N^{-1/2}$ , sendo desprezível quando o número de termos vai a infinito. É interessante averiguar em detalhe como isso acontece no modelo de Ising. Vamos considerar o caso 2 acima. Nesse caso

$$H_I = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j} S_i S_j - h \sum_i S_i, \quad (7.1)$$

em que dividimos pelo número total de spins  $N$  para que Hamiltoniano seja extensivo (a soma tem  $N^2$  termos) ou, equivalentemente, para que o campo efetivo de Weiss seja intensivo. A função partição é

$$Z(T, h) = \text{Tr} (e^{-\beta H_I}).$$

Considere agora a seguinte identidade

$$\exp \left( \frac{\beta J}{2N} x^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} dy \exp \left( -\frac{N\beta J}{2} y^2 + \beta J x y \right). \quad (7.2)$$

Segue que

$$\begin{aligned} Z(T, h) &= \text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} dy \exp \left[ -\frac{N\beta J}{2} y^2 + \beta (Jy + h) \sum_i S_i \right] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} dy \exp \left[ -\frac{N\beta J}{2} y^2 \right] \text{Tr} \left\{ \prod_i \exp [\beta (Jy + h) S_i] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} dy \exp \left[ -\frac{N\beta J}{2} y^2 \right] \{2 \cosh [\beta (Jy + h)]\}^N \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} dy \exp [-N\beta L(y)], \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde

$$L(y) = \frac{J}{2}y^2 - \frac{1}{\beta} \ln \{2 \cosh [\beta (Jy + h)]\}. \quad (7.4)$$

A integral na Eq. (7.3) pode ser calculada pelo método do ponto de sela no limite  $N \rightarrow \infty$ . Para isso, precisamos achar o ponto  $y_0$  de derivada nula da função  $L(y)$ . Derivando, obtemos

$$y_0 = \tanh [\beta (Jy_0 + h)], \quad (7.5)$$

que é a equação da teoria de campo médio de Weiss, se identificarmos  $y_0 \rightarrow m$ . A temperatura crítica é  $T_c = J$  (o reescalamento com  $N$  no Hamiltoniano modifica ligeiramente a expressão de  $T_c$  em relação à teoria da Seção VI). A expressão da função partição é dada por

$$Z(T, h) \approx \exp [-N\beta L(y_0)], \quad (7.6)$$

onde  $y_0$  é o ponto de mínimo global de  $L(y)$ . A energia livre por spin é

$$f(T, h) \approx L(y_0). \quad (7.7)$$

Compare com a Eq. (6.7). Note, como antecipamos na Seção VI, que a teoria pode ser obtida por minimização em relação a  $m$ , tomado como parâmetro variacional. A magnetização por spin é

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{\partial L(y_0)}{\partial h} = \tanh [\beta (Jy_0 + h)] = y_0, \quad (7.8)$$

que é o resultado antecipado. Os outros resultados são imediatos.

### VIII. TEORIA DE VAN DER WAALS DA TRANSIÇÃO LÍQUIDO-GÁS

A teoria de Van der Waals para a transição líquido-gás tem o mesmo papel que a teoria de Weiss do modelo de Ising. Ambas representam teorias de campo médio para as respectivas transições. Vamos recordar os principais elementos da teoria de Van der Waals.

A equação de estado dos gases ideais é uma boa aproximação para gases reais a altas temperaturas e baixas densidades

$$P = \frac{T}{v}, \quad (8.1)$$

onde  $v = V/N$  é o volume específico (lembrando que usamos unidades tais que  $k_B = 1$ ). Se nos referirmos à Fig. 2(b), veremos que a Eq. (8.1) aproxima bem as isotermas hiperbólicas a altas temperaturas. A baixas temperaturas, discrepâncias começam a aparecer. Van der Waals propôs as seguintes modificações para a equação dos gases ideais (elas podem ser justificadas a partir da expansão virial: para maiores detalhes, ver *Statistical Physics*, L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 3rd. Edition, Pergamon, Oxford, 1980, Cap. 76):

1. Fazer  $v \rightarrow v - b$ , devido ao “volume excluído” resultante da repulsão de curto alcance entre os átomos.
2. Adicionar um termo  $-a/v^2$  ao lado direito da Eq. (8.1), devido à atração de longo alcance entre os átomos (interação de Van der Waals).

A justificativa para o segundo termo vem de supor uma diminuição da energia livre por partícula, devido à atração, proporcional à densidade (“campo médio”):  $-\Delta f \propto 1/v$ . Como  $P = -\partial f / \partial v$ , temos o segundo termo. A **equação de Van der Waals** fica então

$$P = \frac{T}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \quad (8.2)$$

Vamos analisar as conseqüências imediatas da equação de Van der Waals. Ela fornece uma equação de terceiro grau em  $v$

$$v^2(v - b) = \frac{T}{P}v^2 - \frac{a}{P}(v - b) \Rightarrow v^3 - \left(b + \frac{T}{P}\right)v^2 + \frac{a}{P}v - \frac{ab}{P} = 0. \quad (8.3)$$

Essa equação tem, em geral, 3 soluções. Para temperaturas suficientemente altas, apenas uma solução é real, enquanto que para temperaturas mais baixas, as 3 soluções são reais (ver Fig. 4). Quando há 3 soluções reais, na região entre a primeira e a segunda

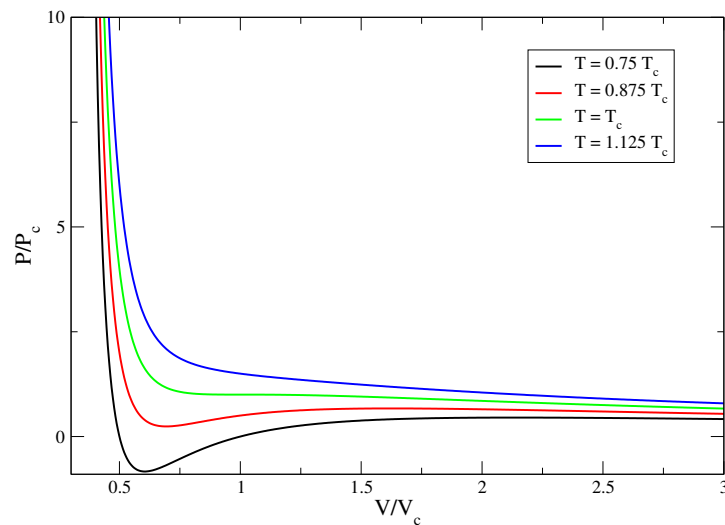


Figura 4: Isotermas derivadas da equação de Van der Waals (8.2), para vários valores de  $T$ .

a pressão aumenta com o aumento do volume. Isso implica uma compressibilidade negativa, o que é termodinamicamente proibido. Obviamente, isso ocorre porque a função  $P(v)$  para  $T$  fixa derivada da Eq. (8.2) é analítica e não é capaz de gerar o comportamento não analítico da região de coexistência líquido-gás da Fig. 2(b). Isso pode ser remediado através da chamada **construção de Maxwell**: a região de coexistência, em que  $P$  permanece constante entre  $v_l$  e  $v_g$  é determinada de tal forma que a diferença entre o segmento horizontal e a equação de Van der Waals tenha área total nula (contando a área abaixo do segmento horizontal como sendo negativa). Essa construção pode ser justificada através da imposição do equilíbrio térmico, mecânico e de troca de partículas entre as fases (ver *Statistical Physics*, L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 3rd. Edition, Pergamon, Oxford, 1980, Cap. 84).

O ponto crítico da transição ocorre quando as 3 soluções reais coalescem numa só raiz tripla. Nesse caso, a Eq. (8.3) se reduz a

$$v^3 - \left(b + \frac{T}{P}\right)v^2 + \frac{a}{P}v - \frac{ab}{P} = (v - v_c)^3 = 0. \quad (8.4)$$

Como isso ocorre em  $T_c$  e  $P_c$ , obtemos

$$3v_c = b + \frac{T_c}{P_c}, \quad 3v_c^2 = \frac{a}{P_c}, \quad v_c^3 = \frac{ab}{P_c}. \quad (8.5)$$

Resolvendo as 3 equações para 3 incógnitas

$$v_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27b}. \quad (8.6)$$

Uma das conseqüências de (8.6) é que

$$\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8}. \quad (8.7)$$

A concordância dessa razão universal com a experiência não é de todo ruim, pois os valores ficam em torno de 0.3, o que é surpreendente já que se trata de uma descrição tão simples. Além disso, podemos reescrever (8.2) em termos de quantidades adimensionais

$$\bar{P} \equiv \frac{P}{P_c}, \quad (8.8)$$

$$\bar{T} \equiv \frac{T}{T_c}, \quad (8.9)$$

$$\bar{v} \equiv \frac{v}{v_c}, \quad (8.10)$$

e obtemos uma equação universal

$$\bar{P} = \frac{8\bar{T}}{3\bar{v} - 1} - \frac{3}{\bar{v}^2}. \quad (8.11)$$

Essa é a chamada **lei dos estados correspondentes**.

O comportamento crítico pode também ser extraído da equação de Van der Waals. Expandindo (8.11) quando suas variáveis são próximas de 1 e definindo

$$\bar{T} = 1 + t, \quad (8.12)$$

$$\bar{v} = 1 + \theta, \quad (8.13)$$

obtemos

$$\bar{P} = 1 + 4t - 6t\theta - \frac{3}{2}\theta^3, \quad (8.14)$$

onde levamos a expansão até  $\mathcal{O}(t^{3/2})$ , supondo que  $\theta_g \sim \sqrt{|t|}$  como é o resultado de campo médio e como será mostrado a seguir. Note que  $t \geq 0$  se  $T \geq T_c$ . Os volumes do gás e do líquido coexistentes,  $\theta_g > 0$  e  $\theta_l < 0$ , são obtidos pela construção de Maxwell para  $t < 0$

$$\oint v dP = 0. \quad (8.15)$$

Podemos ver que as isotermas obtidas a partir da Eq. (8.14), correspondem a uma função ímpar de  $\theta$  em relação ao ponto  $\bar{P}_0 = 1 + 4t$ . Portanto, a construção de Maxwell fornece volumes  $\theta_g$  e  $\theta_l$  localizados simetricamente em relação a zero, ou seja,  $\theta_g = -\theta_l$ .

Além disso

$$\bar{P}(\theta_g) = \bar{P}(\theta_l) = \bar{P}(-\theta_g), \quad (8.16)$$

donde, usando (8.14),

$$\theta_g^2 = -4t, \quad (8.17)$$

que nos dá o expoente  $\beta = 1/2$  e confirma o comportamento de campo médio assumido no início. Na temperatura crítica  $t = 0$  e de (8.14)

$$\bar{P} - 1 = \frac{3}{2}\theta^3 \Rightarrow \frac{P - P_c}{P_c} = \frac{3}{2} \left( \frac{v - v_c}{v_c} \right)^3, \quad (8.18)$$

que nos dá  $\delta = 3$ , também típico de campo médio. A divergência da compressibilidade isotérmica pode ser obtida de

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} = -\frac{1}{v_c P_c} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{P}}. \quad (8.19)$$

De (8.14),

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} = -6t - \frac{9}{2}\theta^2. \quad (8.20)$$

Tanto para  $T > T_c$  (ao longo de  $\theta = 0$ ), quanto para  $T < T_c$  ( $\theta_g^2 = -4t$ )

$$\kappa_T \sim t^{-1}, \quad (8.21)$$

que dá  $\gamma = \gamma' = 1$ , de novo confirmando a natureza de campo médio da teoria. O cálculo do calor específico requer suposições sobre a dependência da entropia com a temperatura e vai além da mera equação de Van der Waals, assim como os outros expoentes que dizem respeito às variações espaciais das correlações. Esses ficarão mais claros a partir da teoria mais geral de Landau.

## IX. TEORIA DE LANDAU DAS TRANSIÇÕES DE FASE CONTÍNUAS

A natureza das transições de fase contínuas é posta em bases mais sólidas e gerais pela teoria de Landau. A filosofia dessa teoria é escrever um funcional (**funcional de Landau**) do parâmetro de ordem, cujo mínimo funcional nos dá o valor de equilíbrio do parâmetro de ordem e a energia livre do sistema. O funcional de Landau pode ser deduzido no caso de teorias de campo médio específicas, como a teoria de Weiss, Van der Waals ou BCS da supercondutividade. No caso geral, ele deve ser encarado como uma descrição dos graus de liberdade de longos comprimentos de onda de uma teoria, uma vez que a física de curto alcance (curtos comprimentos de onda) tenha sido “integrada”. Nesse sentido mais amplo, em que não estamos interessando apenas na minimização do funcional mas incorporamos também suas flutuações, a teoria de Landau vai além da teoria de campo médio e define uma teoria de campos que servirá como base para os nossos desenvolvimentos futuros do grupo de renormalização.

O funcional de Landau é construído, supondo-se a proximidade do ponto crítico de tal modo que o parâmetro de ordem seja pequeno em algum sentido. Nesse caso, podemos tentar expandir o funcional em potências do parâmetro de ordem e/ou de suas derivadas. O funcional deve ser consistente com as **simetrias** do problema. No caso, vamos supor por simplicidade que haja simetria de rotação (tratamento do contínuo, em que desprezamos efeitos de rede) e translação. A expansão se fará em termos de potências inteiras do parâmetro de ordem e de suas derivadas, de forma a preservar a natureza **analítica** do funcional. Assim, para um parâmetro de ordem  $\phi_\alpha$ , que supomos um vetor de  $n$  componentes, o funcional de Landau pode ser expandido como

$$L\{\phi_\alpha, \partial_i \phi_\alpha, \partial_i \partial_j \phi_\alpha, \dots\} = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) \cdot [r - \nabla^2] \phi(\mathbf{x}) + \frac{u}{4} [\phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})]^2 - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}) + \dots \right\}. \quad (9.1)$$

A expressão acima retém os termos principais para obtermos uma teoria compatível com as teorias das Seções anteriores, mas em outras situações pode ser necessário manter outros termos. O último termo quebra a simetria de rotação e deve ser encarado como análogo ao campo magnético. Vamos calcular a derivada funcional de  $L$  com relação ao campo  $\phi_\alpha$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x})} = (r - \nabla^2) \phi(\mathbf{x}) + u [\phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})] \phi(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.2)$$

Essa é a mesma Eq. (6.22) que obtivemos na teoria de Weiss generalizada para situações com dependência espacial (para o caso de um parâmetro de ordem escalar). O mínimo do funcional quando o campo aplicado é uniforme  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = h\mathbf{e}_h$  ocorre para um parâmetro de ordem uniforme

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 \mathbf{e}_h, \quad (9.3)$$

tal que

$$r\phi_0 + u\phi_0^3 = h, \quad (9.4)$$

que é o mínimo do potencial

$$V(\phi) = \frac{r}{2} \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}) + \frac{u}{4} [\phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})]^2 - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}). \quad (9.5)$$

O caso  $h = 0$  é instrutivo. Nesse caso, se  $r > 0$ ,  $\phi_0 = 0$ . Entretanto, se  $r < 0$ ,

$$\phi_0^2 = -\frac{r}{u}. \quad (9.6)$$

Note que necessariamente devemos ter  $u > 0$ , do contrário o potencial (9.5) é ilimitado inferiormente. Está claro que para fazer contato com as teorias de campo médio anteriores, precisamos supor que ( $u > 0$ )

$$r = at. \quad (9.7)$$

Dessa forma, da Eq. (9.6) segue que  $\beta = 1/2$ , como queremos. O potencial  $V(\phi)$  para um parâmetro de ordem escalar e vários valores dos parâmetros  $r$  e  $h$  é mostrado na Fig. 5.

Os outros expoentes também são imediatos. Fazendo  $r = 0$  na Eq. (9.4), obtemos

$$\phi_0 = \frac{1}{u} h^{1/3}, \quad (9.8)$$

e  $\delta = 3$ . Inserindo  $\phi_0$  no funcional obtemos a (densidade de) energia livre de Landau

$$f = \frac{L}{V} = \frac{r}{2} \phi_0^2 + \frac{u}{4} \phi_0^4 - h\phi_0. \quad (9.9)$$

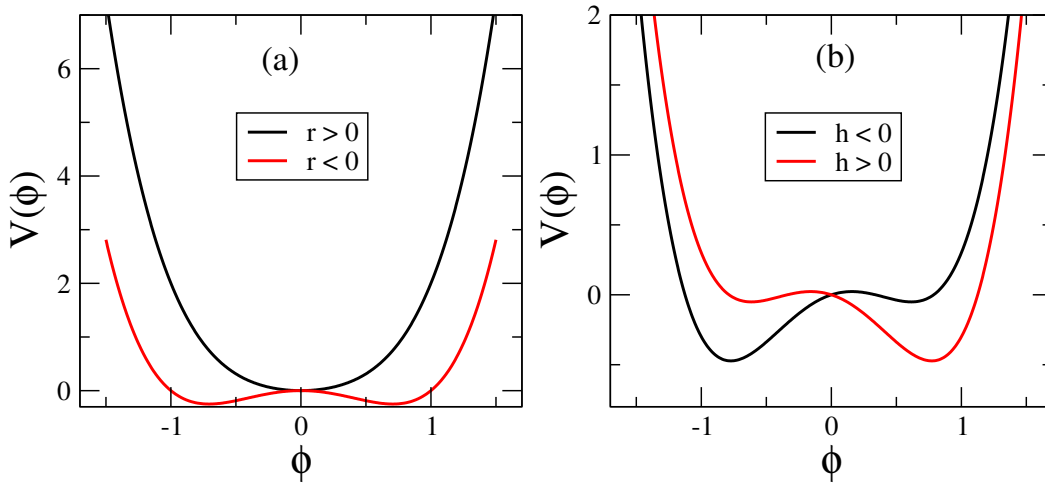


Figura 5: Potencial de Landau  $V(\phi)$  (Eq. 9.5) para um parâmetro de ordem escalar e para (a)  $h = 0$ ,  $r > 0$  e  $r < 0$  e (b)  $r < 0$ ,  $h > 0$  e  $h < 0$ .

A susceptibilidade e o calor específico podem ser obtidos das derivadas segundas em relação a  $h$  e  $T$  (ou  $t$ ) da energia livre. Os parâmetros  $r$  e  $u$  tem dependências com  $h$  e  $t$ , mas a única dependência importante é a de  $r$  com  $t$ : as outras são supostas suaves e não críticas. Assim, para  $h = 0$ ,

$$f(t, h = 0) = \begin{cases} 0 & t > 0, \\ -\frac{\alpha^2}{4u}t^2 & t < 0, \end{cases} \quad (9.10)$$

e o calor específico apresenta uma descontinuidade em  $T_c$

$$c(t) = \begin{cases} 0 & t > 0, \\ \frac{\alpha^2}{2u}T_c & t < 0, \end{cases} \quad (9.11)$$

dando  $\alpha = 0$ . Analogamente,

$$-\frac{\partial f}{\partial h} = \phi_0 - \frac{\partial f}{\partial \phi_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial h}, \quad (9.12)$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{\partial \phi_0}{\partial h} - \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_0 \partial h} \frac{\partial \phi_0}{\partial h} - \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_0^2} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial h} \right)^2, \quad (9.13)$$

já que  $\partial f / \partial \phi_0 = 0$ . Derivando (9.4) em relação a  $h$

$$r \frac{\partial \phi_0}{\partial h} + 3u\phi_0^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial h} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \phi_0}{\partial h} = \frac{1}{r + 3u\phi_0^2} = \begin{cases} \frac{1}{at} & t > 0, \\ -\frac{1}{2at} & t < 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_0 \partial h} = -1, \quad (9.15)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_0^2} = r + 3u\phi_0^2 = \begin{cases} at & t > 0, \\ -2at & t < 0. \end{cases} \quad (9.16)$$

Assim

$$\chi = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{1}{r + 3u\phi_0^2} = \begin{cases} \frac{1}{at} & t > 0, \\ -\frac{1}{2at} & t < 0. \end{cases} \quad (9.17)$$

Obtemos, portanto,  $\gamma = \gamma' = 1$ .

Note que o funcional de Landau é perfeitamente analítico e as não-analiticidades da transição de fase aparecem da condição de minimização.

Vamos analisar agora as flutuações espaciais da teoria. Para isso, voltemos à Eq. (9.1), especializada para o caso de um parâmetro de ordem uniforme. Podemos expandir o integrando até ordem quadrática em torno do mínimo  $\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 + \delta(\mathbf{x})$ , supondo que o campo externo é nulo

$$\phi^2(\mathbf{x}) = [\phi_0 + \delta(\mathbf{x})]^2 = \phi_0^2 + 2\phi_0\delta(\mathbf{x}) + \delta^2(\mathbf{x}), \quad (9.18)$$

$$\phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \phi_0 \nabla^2 \delta(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}) \nabla^2 \delta(\mathbf{x}), \quad (9.19)$$

$$\phi^4(\mathbf{x}) = [\phi_0 + \delta(\mathbf{x})]^4 = \phi_0^4 + 4\phi_0^3\delta(\mathbf{x}) + 6\phi_0^2\delta^2(\mathbf{x}) + \mathcal{O}[\delta^3(\mathbf{x})], \quad (9.20)$$

de tal forma que  $L = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x})$ , onde (o termo de primeira ordem em  $\delta$  é nulo no mínimo funcional)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx \frac{r}{2}\phi_0^2 + \frac{u}{4}\phi_0^4 + \delta(\mathbf{x}) \left[ \frac{(r - \nabla^2)}{2} + \frac{3u\phi_0}{2} \right] \delta(\mathbf{x}) \\ &= f_0(T) + \frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}) (\xi^{-2} - \nabla^2) \delta(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.21)$$

onde

$$\xi^{-2} = r + 3u\phi_0^2 = \begin{cases} r & t > 0, \\ -2r & t < 0. \end{cases} \quad (9.22)$$

A razão para a definição de  $\xi$  ficará mais clara a seguir. Assim

$$Z[T, j(\mathbf{x})] = e^{-f_0(T)} + \int \mathcal{D}\delta \exp \int d\mathbf{x} \left[ -\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}) (\xi^{-2} - \nabla^2) \delta(\mathbf{x}) + j(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}) \right], \quad (9.23)$$

que deve ser entendida como uma integral funcional sobre as flutuações  $\delta(\mathbf{x})$  do parâmetro de ordem e onde introduzimos um termo de fonte  $j(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x})$  que é útil para tomar derivadas funcionais. A função de correlação do parâmetro de ordem é

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &\equiv \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{0}) \rangle - \phi_0^2 \\ G(\mathbf{x}) &= \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{0}) \rangle. \end{aligned} \quad (9.24)$$

É fácil ver que

$$\frac{\delta \ln Z[T, j(\mathbf{x})]}{\delta j(\mathbf{0})} = \frac{1}{Z[T, j(\mathbf{x})]} \text{Tr} [\delta(\mathbf{0})] = \langle \delta(\mathbf{0}) \rangle, \quad (9.25)$$

$$\frac{\delta^2 \ln Z[T, j(\mathbf{x})]}{\delta j(\mathbf{x}) \delta j(\mathbf{0})} \Big|_{j(\mathbf{x})=0} = \frac{1}{Z[T, j(\mathbf{x})]} \text{Tr} [\delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{0})] \Big|_{j(\mathbf{x})=0} - \frac{1}{Z^2[T, j(\mathbf{x})]} \{ \text{Tr} [\delta(\mathbf{0})] \}^2 \Big|_{j(\mathbf{x})=0} \quad (9.26)$$

$$= \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{0}) \rangle = G(\mathbf{x}). \quad (9.27)$$

É conveniente trabalhar no espaço de Fourier devido à invariância translacional do funcional ( $d$  é a dimensão do sistema)

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}), \text{ etc.}, \quad (9.28)$$

onde usaremos o mesmo símbolo para uma função e sua transformada de Fourier, a distinção ficando óbvia pelo argumento. Obtém-se

$$L = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (\xi^{-2} + k^2) |\delta(\mathbf{k})|^2 + j(-\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}) \right], \quad (9.29)$$

onde usamos que  $\delta(-\mathbf{k}) = \delta^*(\mathbf{k})$  para  $\delta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ . Segue que, para  $j = 0$  (ver Seção XI)

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{q}) \rangle = \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \quad (9.30)$$

e

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle. \quad (9.31)$$

O valor esperado acima provém de uma integral gaussiana simples e

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{\xi^{-2} + k^2}. \quad (9.32)$$

Esse é o resultado central procurado. Ele é conhecido pelo nome de função de correlação de Ornstein e Zernicke. Para analisá-lo melhor é importante transformar de volta para o espaço real

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\xi^{-2} + k^2}. \quad (9.33)$$

A integral acima pode ser feita analiticamente (ver o livro do Goldenfeld) e obtemos (para  $d \geq 2$ )

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\pi^{(1-d)/2}}{2^{(1+d)/2}} \frac{1}{\xi^{d-2}} \frac{e^{-r/\xi}}{(r/\xi)^{(d-1)/2}}, \quad T \neq T_c, \quad (9.34)$$

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d-2}}, \quad T = T_c, \quad (9.35)$$

que é o resultado anunciado anteriormente nas Eqs. (2.9) e (2.10). Da comparação pode-se ver que a teoria de campo médio de Landau prevê  $\eta = 0$ . Além disso, confirmamos que o símbolo  $\xi$  é realmente o comprimento de correlação como definido anteriormente. De (9.22), obtemos finalmente que  $\nu = 1/2$ . Isso completa a determinação dos expoentes críticos de campo médio anunciados na Tabela I. É interessante notar e fica como exercício derivar a função de correlação (9.33) diretamente da Eq. (9.37) (ou equivalentemente de (6.22)) através de derivação funcional

$$G(\mathbf{x}) = \left. \frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta h(\mathbf{0})} \right|_{\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{0}}, \quad (9.36)$$

(ver Eqs. (9.25-9.27)). Isso ilustra também porque  $G(\mathbf{x})$  é também chamada de função de Green.

### A. Derivação alternativa

Vamos rederivar a expressão acima, usando derivação funcional e generalizando para o caso de um parâmetro de ordem real com  $n$  componentes. Vamos primeiro re-escrever a equação de Landau em componentes

$$(r - \nabla^2) \phi_i(\mathbf{x}) + u \left[ \sum_{k=1}^n \phi_k^2(\mathbf{x}) \right] \phi_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.37)$$

e vamos definir

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\delta\phi_i(\mathbf{x})}{\delta h_j(\mathbf{0})} \right|_{\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{0}}. \quad (9.38)$$

Derivando implicitamente a Eq. (9.37) em relação a  $h_j(\mathbf{0})$  temos

$$(r - \nabla^2) G_{ij}(\mathbf{x}) + u \left[ \sum_{k=1}^n \phi_k^2(\mathbf{x}) \right] G_{ij}(\mathbf{x}) + u\phi_i(\mathbf{x}) \left[ 2 \sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) G_{kj}(\mathbf{x}) \right] = \delta_{ij} \delta^{(d)}(\mathbf{x}). \quad (9.39)$$

Quando  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , para  $T > T_c$ ,  $\phi_i = 0$  enquanto que para  $T < T_c$

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_0 \delta_{i,1}, \quad (9.40)$$

onde escolhemos arbitrariamente a direção  $i = 1$  como sendo aquela em que parâmetro de ordem se congela. Assim

$$(r + u\phi_0^2 + 2u\phi_0^2\delta_{i,1} - \nabla^2) G_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \delta^{(d)}(\mathbf{x}). \quad (9.41)$$

Como a matriz que multiplica  $G_{ij}(\mathbf{x})$  é diagonal, sua inversa também é. Assim obtemos no espaço de Fourier

$$G_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} [\delta_{i,1} G_l(\mathbf{k}) + (1 - \delta_{i,1}) G_t(\mathbf{k})], \quad (9.42)$$

onde

$$G_l(\mathbf{k}) = \frac{1}{\xi_l^{-2} + k^2}, \quad (9.43)$$

$$G_t(\mathbf{k}) = \frac{1}{\xi_t^{-2} + k^2}, \quad (9.44)$$

e

$$\xi_l^{-2} = r + 3u\phi_0^2 = \begin{cases} r & t > 0, \\ -2r & t < 0, \end{cases} \quad (9.45)$$

$$\xi_t^{-2} = r + u\phi_0^2 = \begin{cases} r & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (9.46)$$

O resultado para a função de correlação longitudinal é o mesmo obtido anteriormente no caso  $n = 1$ , mas a função de correlação transversal é um resultado novo. Embora  $\xi_l = \xi_t$  para  $T > T_c$ , o comprimento de correlação transversal é nulo para  $T < T_c$ . Esse resultado, específico de parâmetros de ordem contínuos ( $n > 1$ ), reflete o fato de que as flutuações transversais do parâmetro de ordem com comprimentos de onda  $\lambda \rightarrow \infty$  têm energias nulas (teorema de Goldstone).

## X. FLUTUAÇÕES E CRITÉRIO DE GINZBURG

Podemos determinar a validade da teoria de campo médio dentro da própria teoria. Vamos fazer isso de duas maneiras. Vimos que a hipótese básica da teoria de campo médio está em desprezar as flutuações em torno do valor médio do parâmetro de ordem. Podemos usar a função de correlação para estimar essas flutuações. Sabemos que

$$G(\mathbf{x}) = \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{0}) \rangle - \phi_0^2 \quad (10.1)$$

e que, pela Eq. (9.34), o comprimento de correlação  $\xi$  determina a escala além da qual o parâmetro de ordem se descorrelaciona. Assim, estimamos a variância de  $\phi$  como

$$\sigma_\phi^2 \approx G(|\mathbf{x}| = \xi) \sim \xi^{2-d} \sim t^{(d-2)/2}. \quad (10.2)$$

Devemos compará-la com  $\phi_0^2 \sim t$  e exigir que as flutuações sejam pequenas

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\phi_0^2} \sim t^{(d-4)/2} \ll 1. \quad (10.3)$$

Esse é o chamado **critério de Ginzburg**. Ele é extremamente importante porque ele determina a região de validade da teoria de Landau. Vejamos suas conseqüências. Para  $d > 4$ , o critério (10.3) é sempre satisfeito suficientemente próximo da transição ( $t \ll 1$ ). A teoria de Landau, portanto, descreve bem o comportamento crítico. Para  $d < 4$ , entretanto, a variação relativa do parâmetro de ordem diverge à medida que nos aproximamos do ponto crítico. Isso mostra que a teoria de Landau é inválida como descrição do comportamento crítico para  $d < 4$ . Os resultados da teoria, no entanto, podem ainda ser utilizados para  $d < 4$ , fora da chamada região crítica, ou seja, para

$$t^{(d-4)/2} \gg 1. \quad (10.4)$$

É importante notar que ainda assim é possível satisfazer a condição de que  $\phi_0 = \sqrt{-r/u} = \sqrt{at/u} \ll 1$ , necessária para a validade da expansão do funcional de Landau. A dimensão  $d_{uc} = 4$ , acima da qual a teoria de Landau é válida mesmo na região crítica é chamada de **dimensão crítica superior**. Nossa tarefa será tentar ir além da teoria de Landau em dimensões abaixo da dimensão crítica superior.

A divergência das flutuações abaixo de 4 dimensões pode também confirmada através do cálculo das correções do calor específico devido às flutuações. A correção à energia livre devido às flutuações é obtida diretamente de (9.29) (ver Seção XI)

$$\Delta f = -\ln(\det G^{-1})^{-1/2} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln G = -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln \left( \frac{1}{\xi^{-2} + k^2} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln(\tilde{a}t + k^2), \quad (10.5)$$

onde  $\tilde{a}$  pode ser obtido de (9.22). Note que estamos desprezando a dependência com  $\beta \approx \beta_c$ , que é uma quantidade não crítica. Assim

$$\Delta C \propto -\frac{\partial^2 \Delta f}{\partial t^2} \propto \frac{\tilde{a}^2}{2} \int_0^\Lambda \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\xi^{-2} + k^2)^2}, \quad (10.6)$$

onde introduzimos um “cutoff” para vetores de onda grandes, que reflete o parâmetro de rede. Para analisar essa integral, vamos escrever a variável de integração como uma quantidade adimensional  $\mathbf{q} = \xi \mathbf{k}$

$$\Delta C \propto \xi^{4-d} \frac{\tilde{a}^2}{2} \int_0^{\Lambda \xi} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(1 + q^2)^2}. \quad (10.7)$$

Quando  $T \rightarrow T_c$ , o comprimento de correlação diverge e com ele o limite superior da integral em (10.7). O integrando nessa região se comporta como

$$\int^{\Lambda \xi} \frac{q^{d-1}}{q^4} dq \sim (\Lambda \xi)^{d-4}, \quad (10.8)$$

que converge quanto  $\xi \rightarrow \infty$  se  $d < 4$ . Nesse caso,

$$\Delta C \propto \xi^{4-d} \sim t^{-(4-d)/2}. \quad (10.9)$$

Vemos assim que as correções devido às flutuações divergem na região crítica e mostram que as flutuações invalidam a teoria de Landau para  $d < 4$ . É interessante notar que, tomado como um modelo da transição, o modelo acima (chamado de modelo gaussiano, por incorporar apenas as flutuações quadráticas) fornece o expoente crítico

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}. \quad (10.10)$$

Note que se  $d > 4$ , a integral não converge no limite superior, o que apenas nos diz que não podemos fazer a troca de variáveis  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q} = \xi \mathbf{k}$ . De fato, podemos fazer  $\xi^{-2} = 0$  em (10.6) e

$$\int_0^\Lambda \frac{k^{d-1}}{k^4} dk \sim k^{d-4} \Big|_0^\Lambda, \quad (10.11)$$

que converge no limite inferior se  $d > 4$ . É importante notar que a divergência de  $\Delta C$  para  $d < 4$  ocorre devido ao limite inferior da integral em (10.6), apesar de sua aparição no limite superior da integral *re-escalada*. Isso fica claro fazendo  $\xi^{-2} = 0$  em (10.6) e notando que a integral diverge no limite inferior. As flutuações divergentes são flutuações de longos comprimentos de onda.

## XI. INTEGRAÇÃO GAUSSIANA

Vamos fazer uma digressão matemática para estabelecer as fórmulas das integrais gaussianas, que aparecem freqüentemente em nosso desenvolvimento. Consideremos primeiramente uma variável apenas. Nesse caso

$$\begin{aligned} I(a, j) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 + jx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{a}{2}\left(x - \frac{j}{a}\right)^2 + \frac{j^2}{2a}\right] \\ &= e^{j^2/2a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = e^{j^2/2a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 + jx\right) = \frac{\partial^2 I(a, j)}{\partial j^2} \Big|_{j=0} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \quad (11.2)$$

Considere agora que há  $N$  coordenadas  $x_i$  e que

$$I[A_{ij}, j_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp\left(-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + j_i x_i\right), \quad (11.3)$$

onde  $A_{ij}$  é uma matriz real simétrica positivo-definida (seus autovalores são positivos) e onde usamos a convenção de Einstein de que índices repetidos são somados. Seja  $S_{ij}$  a matriz ortogonal ( $S^{-1} = S^T$ ) que diagonaliza  $A_{ij}$

$$S_{ik} A_{kl} S_{lj}^{-1} = a_i \delta_{ij}, \quad (11.4)$$

onde  $a_i > 0$  são os auto-valores de  $A_{ij}$ . Se  $y_i = S_{ij} x_j$ , então  $x_i A_{ij} x_j = y_i S_{ik} A_{kl} S_{lj}^{-1} y_j = a_i y_i^2$ . Além disso,  $j_i x_i = j_i S_{ij}^{-1} y_j \equiv h_j y_j$ , onde  $h_i = S_{ij} j_j$ . Levando em conta que o Jacobiano da troca de variáveis  $x_i \rightarrow y_i$  é  $\det S = 1$ , então

$$\begin{aligned} I[A_{ij}, j_i] &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dy_i \exp\left(-\frac{1}{2} a_i y_i^2 + h_i y_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^N e^{h_i^2/2a_i} \sqrt{\frac{2\pi}{a_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\prod_{i=1}^N a_i}} \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{2a_i}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\sum_{i,j,k=1}^N \frac{S_{ij} j_j S_{ik} j_k}{2a_i}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N j_j B_{jk} j_k\right), \end{aligned}$$

onde

$$B_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{S_{ij} S_{ik}}{a_i} = \sum_{i=1}^N S_{ji}^{-1} \left(\frac{1}{a_i}\right) S_{ik} = A_{jk}^{-1}.$$

Assim

$$I[A_{ij}, j_i] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N j_j A_{jk}^{-1} j_k\right). \quad (11.5)$$

Generalizando para integrais funcionais, onde  $i \rightarrow \mathbf{x}$ , etc., temos

$$\begin{aligned} Z[j(\mathbf{x})] &= \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x} j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})\right] \\ &= [\det A(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} j(\mathbf{x}) A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) j(\mathbf{y})\right]. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Em (11.6), o determinante geralmente é calculado depois de diagonalizado o “operador”  $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . O operador inverso de  $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é, por definição

$$\int d\mathbf{z} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (11.7)$$

Note que, se definimos

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \mathcal{O}(\mathbf{x}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})\right]}{\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})\right]}, \quad (11.8)$$

onde  $\mathcal{O}(\mathbf{x})$  é qualquer operador local, então

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \left. \frac{\delta \ln Z[j(\mathbf{x})]}{\delta j(\mathbf{x})} \right|_{j(\mathbf{x})=0} \quad (11.9)$$

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle_{con} = \left. \frac{\delta^2 \ln Z[j(\mathbf{x})]}{\delta j(\mathbf{y}) \delta j(\mathbf{x})} \right|_{j(\mathbf{x})=0}. \quad (11.10)$$

onde  $\langle AB \rangle_{con} \equiv \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ . Segue que

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \int d\mathbf{y} A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) j(\mathbf{y}) \quad (11.11)$$

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle_{con} = A^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (11.12)$$

## XII. TEORIA DE ESCALA

Antes do desenvolvimento da teoria do grupo de renormalização, alguns pesquisadores perceberam que na região crítica as quantidades físicas tinham um comportamento mais simples como função dos parâmetros externos, como temperatura e campo magnético no caso dos ferromagnetos. Um dos primeiros a notar essa simplificação foi Ben Widom<sup>1,2</sup> (outros também perceberam, como Patashinskii e Pokrovskii<sup>3</sup>). Essa simplificação leva o nome de **teoria de escala** (ou de escalamento, “scaling theory”). Uma das conseqüências mais importantes da teoria de escala é mostrar que os expoentes críticos não são independentes, mas satisfazem algumas relações (**leis de escala**). Partindo de considerações termodinâmicas, essas relações haviam sido demonstradas antes da teoria de escala como desigualdades. Por exemplo, mostrou-se que

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2. \quad (12.1)$$

A teoria de escala demonstrou que elas eram satisfeitas como igualdades, ou seja, que

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (12.2)$$

A teoria do grupo de renormalização irá demonstrar a validade da teoria de escala.

A teoria de escala pode ser escrita em várias formas. Vamos considerar primeiro a densidade de energia livre de um ferromagneto, na região crítica, como função de  $h$  e  $T$ , mais precisamente sua parte singular. A teoria de escala parte da suposição simples (**hipótese de escala**) de que  $f$  depende de  $h$  e  $T$  numa combinação bem definida

$$f(T, h) = t^{2-\alpha} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right), \quad (12.3)$$

onde o expoente  $\Delta$  é chamado de “**expoente do gap**”. Os expoentes  $\alpha$  e  $\Delta$  e a função  $\Phi$  (chamada de **função de escala**) são todos universais (mas que variam com a dimensão e o número de componentes do parâmetro de ordem, ou seja, com a classe de universalidade). Vamos examinar as conseqüências da hipótese de escala.

O calor específico é dado por

$$\begin{aligned} C &= -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \sim -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \sim -\frac{\partial}{\partial t} \left[ (2-\alpha) t^{1-\alpha} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) - \frac{h\Delta}{t^{\Delta+1}} t^{2-\alpha} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) \right] \\ &\sim - \left[ (2-\alpha)(1-\alpha) t^{-\alpha} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) - (2-\alpha) t^{1-\alpha} \frac{h\Delta}{t^{\Delta+1}} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) \right. \\ &\quad \left. - h\Delta(1-\alpha-\Delta) t^{-\alpha-\Delta} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) + \frac{(h\Delta)^2}{t^{2(\Delta+1)}} t^{2-\alpha} \Phi''\left(\frac{h}{t^\Delta}\right) \right] \\ &\sim -(2-\alpha)(1-\alpha) \Phi(0) t^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

em que fizemos  $h = 0$  ao final. Obtemos assim a divergência esperada do calor específico com o expoente adequado, que foi a razão para a escolha do coeficiente de  $\Phi$ . Se agora derivarmos em relação a  $h$  podemos obter a magnetização

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = t^{2-\alpha-\Delta} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right). \quad (12.5)$$

Tomando  $h \rightarrow 0$  devemos obter a magnetização espontânea para  $T < T_c$  (supomos que  $t = |T - T_c|/T_c$  acima). Assim,

$$m \sim \Phi'(0) t^{2-\alpha-\Delta} \sim t^\beta. \quad (12.6)$$

Assim, deduzimos que

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta. \quad (12.7)$$

Derivando (12.5) mais uma vez em relação a  $h$  obtemos a susceptibilidade

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = t^{2-\alpha-2\Delta} \Phi''(0) \sim t^{-\gamma}, \quad (12.8)$$

donde se deduz

$$\gamma = 2\Delta + \alpha - 2. \quad (12.9)$$

Podemos agora eliminar a variável desconhecida  $\Delta$  de (12.7) e (12.9) para obter

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (12.10)$$

que é a **relação de Rushbrooke** (ou Essam-Fisher), já mencionada. Além disso, podemos fazer  $t \rightarrow 0$  em (12.5) para obter a equação de estado no ponto crítico e com isso o expoente  $\delta$ . Entretanto, parece haver um problema nesse caso, pois o argumento de  $\Phi$  tende ao infinito. Nesse ponto, precisamos perceber que, para que a equação não dependa de  $t$  ao final, é preciso que quando  $x \rightarrow \infty$

$$\Phi(x) \sim x^{(2-\alpha-\Delta)/\Delta}, \quad (12.11)$$

de tal forma que os fatores de  $t$  se cancelem. Nesse caso,

$$m \sim h^{(2-\alpha-\Delta)/\Delta} \sim h^{1/\delta}. \quad (12.12)$$

Assim

$$\delta(2 - \alpha - \Delta) = \delta\beta = \Delta. \quad (12.13)$$

De (12.7),  $\Delta = 2 - \alpha - \beta$  e de (12.2),  $\alpha + \beta = 2 - \gamma - \beta$ , donde

$$\Delta = \beta + \gamma. \quad (12.14)$$

Finalmente, de (12.13) e (12.14)

$$\beta\delta = \beta + \gamma, \quad (12.15)$$

que é a segunda igualdade de expoentes que obtemos.

Para derivarmos as outras leis de escala precisamos analisar a função de correlação. Sabemos que na região crítica, ela depende de  $r$  e  $\xi$ . Assim a hipótese de escala pode ser escrita

$$G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \Gamma\left(\frac{r}{\xi}\right), \quad (12.16)$$

onde introduzimos uma nova função de escala  $\Gamma$ . Claramente,  $\Gamma(x) \sim \text{const.}$  quando  $x \rightarrow 0$ , a fim de recuperarmos a expressão crítica da função de correlação. Para relacionar essa expressão com outros expoentes é preciso lembrar que a integral de  $G(r)$  sobre todo o espaço nos dá a susceptibilidade

$$\chi \sim \int d\mathbf{x} G(r) \sim \int_0^\infty r^{d-1} dr G(r). \quad (12.17)$$

Assim

$$\chi \sim \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{r^{d-2+\eta}} \Gamma\left(\frac{r}{\xi}\right) dr \sim \int_0^\infty r^{1-\eta} \Gamma\left(\frac{r}{\xi}\right) dr \sim \xi^{2-\eta} \int_0^\infty y^{1-\eta} \Gamma(y) dy, \quad (12.18)$$

onde re-escalamos a variável de integração  $r = y\xi$ . Como  $\xi \sim t^{-\nu}$

$$\chi \sim t^{-(2-\eta)\nu} \int_0^\infty y^{1-\eta} \Gamma(y) dy \sim t^{-\gamma}, \quad (12.19)$$

donde

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (12.20)$$

É importante frisar que essas leis de escala envolvendo os expoentes são independentes da dimensão (embora os valores dos expoentes variem com a dimensão). De fato, além de valerem em 3 dimensões, é fácil checar a partir da Tabela I que elas também são válidas em 2 dimensões. Existe uma última lei de escala, entretanto, que depende da dimensionalidade e tem, por isso, um status ligeiramente diferente. Ela parte da suposição (como sempre, a ser justificada mais adiante com o grupo de renormalização) de que a divergência da densidade de energia livre é uma consequência direta da divergência do comprimento de correlação. Na verdade, *todas* as divergências críticas têm essa origem. A densidade de energia livre se relaciona com a função partição através de

$$f \sim \frac{1}{L^d} \ln Z \quad (12.21)$$

e tem, portanto, dimensão de  $L^{-d}$  já que  $Z$  é adimensional. Segue que a dependência singular de  $f$  na região crítica será governada por  $\xi$  da seguinte forma

$$f \sim \xi^{-d}. \quad (12.22)$$

Para  $h = 0$ ,  $\xi \sim t^{-\nu}$ , logo

$$f \sim t^{\nu d} \sim t^{2-\alpha}, \quad (12.23)$$

onde, na última passagem, utilizando a Eq. (12.3) para  $h = 0$ . Assim obtemos uma **lei de hiper-escala** (“*hyperscaling law*”)

$$2 - \alpha = \nu d, \quad (12.24)$$

que é a última relação procurada e que depende diretamente da dimensão  $d$ . Observe como também ela é obedecida pelo modelo de Ising bi-dimensional. As leis de hiper-escala são obedecidas por sistemas que se encontram *abaixo* de sua dimensão crítica superior ( $d_{uc} = 4$  para as classes de universalidade de Ising, XY e Heisenberg), mas são *violadas* acima dessa dimensão. Com efeito, os expoentes de campo médio, que são sabidos exatos para  $d > 4$ , *não* obedecem à Eq. (12.24) ( $\alpha = 0$ ,  $\nu = 1/2$  e  $d$  variável), exceto exatamente em  $d = 4$ . É interessante perguntar como e se a Eq. (12.3) é compatível com a hipótese subjacente à lei de hiper-escala. A resposta é que ela é compatível sim, já que o próprio comprimento de correlação obedece a uma relação de escala como função de  $T$  e  $h$

$$\xi \sim t^{-\nu} X \left( \frac{h}{t^\Delta} \right), \quad (12.25)$$

donde a Eq. (12.3) segue de (12.22) com  $\Phi(x) = X^{-d}(x)$ .

Um comentário adicional deve ser feito. Já frisamos anteriormente que os expoentes que podem ser definidos acima e abaixo do ponto crítico ( $\alpha$  e  $\alpha'$ ,  $\gamma$  e  $\gamma'$  e  $\nu$  e  $\nu'$ ) são na verdade iguais. Nós fomos um tanto descuidados com a região acima e abaixo de  $T_c$  na discussão acima e *a priori* deveríamos ter definido funções de escala acima e abaixo de  $T_c$  como, por exemplo, (usando agora  $t = (T - T_c)/T_c$ )

$$f(T, h) = \begin{cases} t^{2-\alpha} \Phi^+ \left( \frac{h}{t^\Delta} \right), & t > 0, \\ (-t)^{2-\alpha} \Phi^- \left( \frac{h}{(-t)^\Delta} \right), & t < 0. \end{cases} \quad (12.26)$$

Entretanto, pode-se mostrar que (ver *Modern Theory of Critical Phenomena*, Shang-Keng Ma, Westview Press, Colorado, 2000, pp. 112-113), como não existe singularidade em  $f(T, h)$  em  $T = T_c$  para  $h \neq 0$ , as funções  $\Phi^+$  e  $\Phi^-$  podem ser analiticamente continuadas uma na outra, permitindo provar que  $\alpha = \alpha'$ ,  $\gamma = \gamma'$  e  $\nu = \nu'$ . Além disso, isso nos permite mostrar que a razão dessas quantidades físicas acima e abaixo de  $T_c$  é universal.

As 4 Eqs. (12.10), (12.15), (12.20) e (12.24) para os 6 expoentes críticos definem uma teoria a 2 parâmetros independentes. Assim, com a demonstração a ser feita da validade da teoria de escala pelo grupo de renormalização, tudo que restará será a determinação de 2 entre os 6 expoentes.

#### A. Expoentes críticos e análise dimensional

É interessante se perguntar que tipo de informação a análise dimensional nos fornece no contexto de fenômenos críticos. Vamos considerar primeiramente a função de correlação crítica

$$G(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (T = T_c). \quad (12.27)$$

Vimos que a teoria de Landau nos fornece

$$G_{Landau}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{r^{d-2}} \quad (T = T_c). \quad (12.28)$$

O resultado da teoria de Landau pode ser intuído por análise dimensional. Com efeito, o funcional de Landau é uma quantidade adimensional, pois ele aparece num expoente no cálculo da função partição, como na Eq. (9.23). Portanto, do termo que envolve o Laplaciano, vemos que

$$[\phi(\mathbf{x})] = L^{(2-d)/2}, \quad (12.29)$$

onde  $[O]$  denota a dimensão do campo  $O$ . Da mesma maneira, podemos deduzir que

$$[r] = L^{-2}, \quad (12.30)$$

$$[u] = L^{d-4}. \quad (12.31)$$

Da própria definição da função de correlação, esperamos portanto que

$$[G] = L^{2-d}. \quad (12.32)$$

Realmente, da Eq. (9.33) ou da Eq. (9.41) esse é o resultado esperado. Assim, a dependência obtida no ponto crítico (12.28) é a mais natural. Entretanto, a dependência realmente observada é a da Eq. (12.27), onde aparentemente há uma violação da análise dimensional (daí o nome **dimensão anômala**). A explicação desse aparente paradoxo está em que *outra escala de comprimento deve necessariamente estar envolvida*. Como o comprimento de correlação é infinito no ponto crítico, ele não pode fornecer a escala procurada. A única saída é apelar para um comprimento de onda microscópico, como o parâmetro de rede, que já entrou na teoria quando introduzimos o *cutoff*  $1/\Lambda \equiv a$ . Assim, a Eq. (12.27) deve na verdade ser escrita

$$G(\mathbf{x}) \sim \frac{a^\eta}{r^{d-2+\eta}} \quad (T = T_c), \quad (12.33)$$

de tal forma que ela tenha a dimensão esperada. Vemos assim que as chamadas dimensões anômalas só podem aparecer devido a uma combinação especial envolvendo um comprimento *microscópico*. Note que na região crítica pode haver uma larga separação entre as escalas de  $a$  e  $\xi$ , de várias ordens de grandeza. Normalmente em Física, quando há uma grande separação de escalas as quantidades físicas têm uma dependência simples, pois geralmente podemos desprezar a menor delas. Entretanto, fenômenos críticos fornecem um contra-exemplo importante desse tipo de raciocínio, pois não podemos simplesmente fazer  $a \rightarrow 0$  na teoria crítica. Na verdade, **toda a riqueza e a própria existência de expoentes críticos não triviais provém justamente dessa impossibilidade**.

Note que ao deduzirmos as leis de hiper-escala, implicitamente utilizamos a análise dimensional *ingênua* (ver as Eqs. (12.21) e (12.22)), enquanto que não o fizemos em (12.16). Em fenômenos críticos, é necessário ficar atento para a possibilidade de quantidades físicas adquirirem dimensões anômalas. Saber se e quando uma determinada quantidade adquire ou não dimensão anômala é também uma pergunta respondida pela teoria do grupo de renormalização.

### XIII. TEORIA FENOMENOLÓGICA DE LANDAU

O modelo de Landau foi motivado por nós através da teoria de campo médio. Além disso, vimos que era natural considerar flutuações em torno do campo médio como sendo governadas pela ação que é obtida da teoria de Landau através de sua expansão até ordem quadrática. A ação quadrática define o chamado **modelo gaussiano**, que serve de ponto de partida para nossa exposição. Existe, entretanto, uma outra maneira de motivar o modelo de Landau que será ilustrativa e importante para nossos desenvolvimentos. Ela consiste na introdução de novas variáveis de configuração.

Seja, por exemplo, o modelo de Ising. A generalização para parâmetros de ordem com mais componentes é trivial. Sabemos que próximo do ponto crítico, o comprimento de correlação  $\xi$  é muito longo. Portanto, regiões  $R$  de dimensão linear menor que  $\xi$  estarão fortemente correlacionadas, ou seja, o valor da variável de spin  $S_i$  assumirá, com grande probabilidade, valores que não variarão muito dentro da região  $R$ . Isso nos motiva a introduzir variáveis de “grossa granulação” (“**coarse-grained**”) que nos darão o valor médio ou mais provável de  $S_i$  para  $i \in R$ . Seja  $R(\mathbf{x})$  uma região hipercúbica de lado  $ba$  centrada em  $\mathbf{x}$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede e  $b$  é um número inteiro maior que 1. Então, definimos

$$\phi(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{x}}(\{S_i\}), \quad (13.1)$$

onde  $F$  é uma função das variáveis  $S_i$  tais que  $i \in R(\mathbf{x})$ . Existe uma certa liberdade na definição de  $F$ . Uma escolha possível é a média em  $R(\mathbf{x})$

$$F_{\mathbf{x}}(\{S_i\}) = \frac{1}{b^d} \sum_{i \in R(\mathbf{x})} S_i. \quad (13.2)$$

Essa escolha não preserva a normalização original dos spins  $S_i = \pm 1$ . De maneira geral, a fim de se “controlar” (não deixar que ela divirja ou se anule) a normalização das novas variáveis  $\phi(\mathbf{x})$ , usa-se

$$F_{2\mathbf{x}}(\{S_i\}) = \frac{\zeta(b)}{b^d} \sum_{i \in R(\mathbf{x})} S_i. \quad (13.3)$$

Outra possibilidade é a chamada “regra da maioria”

$$F_{3\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left( \sum_{i \in R(\mathbf{x})} S_i \right), \quad (13.4)$$

que preserva a normalização original. Se o número de spins em  $R(\mathbf{x})$  é par é preciso uma regra para “quebra de empates”, em que a soma dos spins na região dá zero. Uma possibilidade é tomar o valor de um dos spins da região tomado aleatoriamente, ou então, tomar o valor de um spin numa posição fixa na célula (no canto  $[1, 1, \dots, 1]$ , por exemplo). O importante é perceber que existe uma grande arbitrariedade na escolha da função  $F_{\mathbf{x}}$ . Uma vez feita essa escolha, definimos a ação com granulação grossa (“coarse-grained action”) ou ação efetiva  $L[\phi(\mathbf{x})]$  como sendo

$$e^{-\beta L[\phi(\mathbf{x})]} = \text{Tr}_{S_i} \left\{ e^{-\beta H_I[S_i]} \prod_{\mathbf{x}} \delta[\phi(\mathbf{x}) - F_{\mathbf{x}}(\{S_i\})] \right\}, \quad (13.5)$$

onde o sub-índice do traço denota a variável sobre a qual a soma é feita. Claramente, a nova ação  $L[\phi(\mathbf{x})]$  tem configurações definidas numa rede cujo parâmetro de rede é agora  $ba > a$ . A função partição é dada por

$$Z = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{x})} \left\{ e^{-\beta L[\phi(\mathbf{x})]} \right\}, \quad (13.6)$$

que é idêntica à função partição obtida através do traço sobre os spins com o Hamiltoniano original, como pode ser facilmente comprovado da Eq. (13.5) e das propriedades da função delta. Assim, o funcional de Landau pode ser entendido a partir da suposição de que a ação efetiva  $L[\phi(\mathbf{x})]$  tem uma expansão, próximo o suficiente do ponto crítico, da forma que postulamos na teoria de Landau. Nesse caso, o status da teoria de Landau fica claro. Trata-se de uma aproximação em que calculamos a função partição através da ação efetiva  $L[\phi(\mathbf{x})]$  pelo método do ponto de sela. A teoria das flutuações que definimos (modelo gaussiano), por outro lado, pode ser compreendida como derivada da expansão da ação efetiva em torno do ponto de mínimo até ordem quadrática. No entanto, a teoria completa, que deve descrever corretamente a transição de fase contínua, inclusive os expoentes críticos, provém de um traço completo sobre a ação efetiva de Landau, que re-escrevemos aqui

$$L[\phi(\mathbf{x})] = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) [r - \nabla^2] \phi(\mathbf{x}) + \frac{u}{4} [\phi(\mathbf{x})]^4 - h(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right\}. \quad (13.7)$$

Essa ação define uma teoria de campos em dimensão  $d$  que é equivalente a uma teoria quântica de campos em  $d - 1$  dimensões espaciais mais uma dimensão temporal no espaço Euclidiano (em que o tempo entra simetricamente em relação às outras dimensões espaciais, diferentemente do espaço de Minkowski, em que a “assinatura” da dimensão temporal tem sinal trocado). Essa teoria é uma teoria “interagente” no sentido de que o termo quártico em  $u$  introduz interações entre os modos livres do modelo gaussiano, descrito essencialmente por uma teoria em  $u = 0$ , e que é exatamente solúvel (ver Seções IX e X).

Outra maneira de definirmos a teoria efetiva é no espaço de momentos. Essa forma será especialmente importante mais adiante. Nesse caso, definimos as transformadas de Fourier como antes e escrevemos

$$e^{-\beta L[\phi(\mathbf{k})]} = \text{Tr}_{S_i} \left\{ e^{-\beta H_I[S_i]} \prod_{|\mathbf{k}| > \Lambda} \delta[\phi(\mathbf{k}) - F_{\mathbf{k}}(\{S_i\})] \right\}, \quad (13.8)$$

onde

$$F_{\mathbf{k}}(\{S_i\}) = \frac{1}{N} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} S_i. \quad (13.9)$$

Note que nesse caso, introduzimos um corte nas somas sobre momentos  $\Lambda$ , que é o cutoff natural da teoria. Para que a transformada de Fourier faça sentido, é preciso trabalhar com “spins” que assumam qualquer valor real  $\in (-\infty, \infty)$ . Para isso, geralmente é preciso adicionar ao Hamiltoniano original, uma “função peso” que “controle” o tamanho de  $S_i$ . Uma possibilidade que é muito usada é um termo quártico

$$H_I[S_i] \rightarrow H_I[S_i] + \sum_i \frac{u}{4} S_i^4, \quad (13.10)$$

que tem uma inspiração parecida com o termo quártico do funcional de Landau. O cutoff  $\Lambda$  na Eq. (13.8) “soma” sobre as configurações de curtos comprimentos de onda ( $\lambda < 2\pi/\Lambda$ ) de tal forma que a ação efetiva  $L[\phi(\mathbf{k})]$  é definida para modos  $|\mathbf{k}| < \Lambda$

$$Z = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{k}), |\mathbf{k}| < \Lambda} \left\{ e^{-\beta L[\phi(\mathbf{k})]} \right\}. \quad (13.11)$$

Supõe-se (é muito difícil provar exatamente isso, mas as conseqüências dessa suposição são todas comprovadas na prática) que a ação efetiva  $L[\phi(\mathbf{k})]$ , quando devidamente transformada de volta para o espaço real (ou seja, quando escrita em termos de  $\phi(\mathbf{x})$ ), também tenha a forma de Landau, Eq. (13.7).

É interessante examinar essa teoria mais detalhadamente. Nossa primeira tentação seria resolvê-la através de teoria de perturbação em  $u$ . Entretanto, é interessante re-escrever a teoria em termos de quantidades adimensionais. Vimos na Seção XII A, as dimensões das várias quantidades que aparecem na ação efetiva. Como  $[r] = L^{-2}$ , podemos usar  $r^{-1/2}$  como unidade de escala de comprimento e definir novas variáveis adimensionais

$$\mathbf{y} = r^{1/2} \mathbf{x}, \quad (13.12)$$

$$\varphi(\mathbf{y}) = r^{(2-d)/4} \phi(\mathbf{x}), \quad (13.13)$$

$$g = r^{(d-4)/2} u, \quad (13.14)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}}^2 = \frac{\nabla^2}{r}, \quad (13.15)$$

$$H(\mathbf{y}) = r^{(2+d)/4} h(\mathbf{x}) \quad (13.16)$$

de forma que

$$L[\varphi] = \int d\mathbf{y} \left\{ \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{y}) [1 - \nabla_{\mathbf{y}}^2] \varphi(\mathbf{y}) + \frac{g}{4} [\varphi(\mathbf{y})]^4 - H(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \right\}. \quad (13.17)$$

O termo de interação tem  $g = r^{(d-4)/2} u$  como constante de acoplamento. Lembrando que  $r \propto t$ , vemos que

$$g \propto t^{(d-4)/2} u \rightarrow \infty \text{ se } d < 4. \quad (13.18)$$

Vemos assim que a constante de acoplamento da teoria re-escalada tende a infinito à medida que nos aproximamos do ponto crítico, se  $d < 4$ . Aí reside a dificuldade da região crítica: trata-se de uma teoria de **acoplamento forte** abaixo da dimensão crítica superior.

#### XIV. SOMAS PARCIAIS E VARIÁVEIS DE BLOCO

Vamos agora introduzir a idéia do grupo de renormalização através das chamadas variáveis de bloco. Essas variáveis foram introduzidas por L. P. Kadanoff<sup>4</sup>. Kadanoff fez algumas suposições simples partindo das mesmas somas parciais que apareceram na teoria fenomenológica da Landau. A idéia principal consiste em abdicar de fazer uma soma completa sobre as variáveis de configuração  $\phi(\mathbf{x})$ . Ao invés disso, iremos realizar uma “granulação” adicional da ação efetiva (Eqs. (13.5) ou (13.8)) para variáveis definidas com uma resolução ainda menor e descobrir como a ação efetiva muda sob essa transformação.

Portanto, seja uma teoria definida numa rede de parâmetro  $a$  governada pela ação efetiva de Landau, Eq. (13.7) (redefinimos a rede da Seção XIII, de tal forma que o parâmetro agora é  $a$ ). A ação (13.7) é caracterizada pelos parâmetros  $(r, u, h)$  (supomos um campo magnético uniforme). Vamos fazer a “granulação” para uma nova rede de parâmetro  $ba$ ,  $b > 1$ . Isso pode ser feito através de qualquer uma das prescrições descritas na Seção XIII. Por exemplo, podemos usar a média na região  $R(\mathbf{x})$

$$e^{-\beta L'[\phi'(\mathbf{x})]} = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{y})} \left\{ e^{-\beta L[\phi(\mathbf{y})]} \prod_{\mathbf{x}} \delta \left[ \phi'(\mathbf{x}) - \frac{1}{b^d} \sum_{\mathbf{y} \in R(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{y}) \right] \right\}, \quad (14.1)$$

Como explicado antes, existe uma grande arbitrariedade na definição dessa função de “granulação”. É importante que ela não viole nenhuma simetria do problema e que represente uma espécie de média do parâmetro de ordem numa região de dimensão linear  $ba$ . Estamos também assumindo que o parâmetro de ordem assume valores no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . A nova teoria é escrita em termos de “**variáveis de bloco**”  $\phi'(\mathbf{x})$ , sendo que a nova rede é definida nos pontos espaciais  $\mathbf{x} = (n_1 ba, n_2 ba, \dots, n_d ba)$ . Gostaríamos de definir uma teoria numa rede igual à rede original. Para isso, fazemos uma **mudança na escala de comprimento**

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/b, \quad (14.2)$$

de tal forma que a rede dos pontos  $\mathbf{x}'$  continua a ter o parâmetro de rede anterior. Se a rede inicial tinha um total de  $N$  sítios, a nova rede tem  $N/b^d$  sítios. Além disso, para compensar a “perda de resolução” muitas vezes é importante também re-escalar o novo parâmetro de ordem por um fator  $\Lambda_b^\phi$  (você pode imaginar que o novo campo precisa ser “intensificado” para que o não haja perda de qualidade na “imagem”). Esse fator de re-escalamo já apareceu anteriormente na Seção XIII (Eq. (13.3)), onde dissemos que ele é importante para “controlar” a distribuição das variáveis com nova granulação. Esse fator deverá ser escolhido apropriadamente, como veremos a seguir. Assim, o novo campo é redefinido segundo

$$\phi'(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda_b^\phi \phi(\mathbf{x}') = \Lambda_b^\phi \phi(\mathbf{x}/b), \quad (14.3)$$

onde revertemos para a notação anterior do parâmetro de ordem. Note que nem sempre esse fator é necessário ou sequer apropriado. Em particular, no caso do uso da regra da maioria (13.4) os novos spins têm o mesmo tamanho que os spins originais e não se deve re-escalá-los. Ao final, a nova teoria está definida em termos das mesmas variáveis de configuração  $\phi(\mathbf{x}')$  numa rede de mesmo parâmetro de rede  $a$ . Entretanto, a nova teoria descreve a física numa escala de comprimento maior. Escalas de comprimento  $l$  na nova teoria correspondem a comprimentos  $bl$  na teoria anterior.

Vamos fazer agora a suposição de que a nova teoria também tem a forma de Landau. Entretanto, os parâmetros da nova teoria serão diferentes

$$L'[\phi(\mathbf{x}')] = \int d\mathbf{x}' \left\{ \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}') [r' - \nabla'^2] \phi(\mathbf{x}') + \frac{u'}{4} [\phi(\mathbf{x}')]^4 - h' \phi(\mathbf{x}') \right\}. \quad (14.4)$$

Assim, o procedimento descrito acima, define um mapeamento no espaço de funcionais de Landau

$$(r, u, h) \rightarrow R_b(r, u, h) = (r', u', h'). \quad (14.5)$$

Essa transformação é um exemplo de uma transformação do **Grupo de Renormalização**. No caso em que os spins são re-escalados como na Eq. (14.3), o grupo é chamado de linear. Ele é um grupo (mais corretamente um semi-grupo, porque não existe uma inversa) porque podemos compor duas transformações para obter uma terceira

$$R_{b'} R_b = R_{b'b}. \quad (14.6)$$

Na verdade, o mapeamento gera outros termos não presentes na ação inicial, ou seja, a forma de Landau não é preservada exatamente pelas transformações. Por enquanto, no entanto, vamos ignorar essas diferenças e voltaremos a elas mais tarde.

Veja que a função partição calculada com a ação original ou com a ação transformada deve ser **a mesma** (essa propriedade é às vezes chamada de **unitariedade**)

$$Z(r, u, h) = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{x})} \left\{ e^{-\beta L[\phi(\mathbf{x})]} \right\} = Z(r', u', h') = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{x}')} \left\{ e^{-\beta L'[\phi(\mathbf{x}')] } \right\}. \quad (14.7)$$

Como a densidade de energia livre é dada por

$$f = -\frac{T}{N} \ln Z, \quad (14.8)$$

onde  $N$  é o número total de sítios e  $N' = N/b^d$ , segue que

$$f(r', u', h') = b^d f(r, u, h). \quad (14.9)$$

Vamos examinar as conseqüências das hipóteses acima. Suponhamos que escolhemos  $(r, u, h)$  na ação original de tal forma que o sistema esteja muito próximo do ponto crítico. Em variáveis físicas, sabemos que num sistema ferromagnético, temos ao nosso dispor apenas a temperatura e o campo magnético. O ponto crítico corresponde a  $T = T_c$ , ou  $t = 0$  e  $h = 0$ . Assim, a região próxima ao ponto crítico corresponde a  $t \ll 1$  e  $h \ll 1$ . A nova ação efetiva  $L'$  corresponde a um sistema com outros valores dos parâmetros de Landau  $(r', u', h')$ , ou equivalentemente,  $t'$  e  $h'$ . Isso é intuitivo pois, o comprimento de correlação  $\xi$  da ação original é encolhido na descrição da nova ação  $\xi' = \xi/b$ , já que re-escalamos os comprimentos pelo fator  $b$ . Um comprimento de correlação menor corresponde a um sistema “mais longe do ponto crítico” e, portanto, com valores diferentes dos parâmetros físicos tais que  $|t'| > |t|$  e  $|h'| > |h|$ . Assim, podemos escrever

$$t' = R_b t = f_{b1}(t), \quad (14.10)$$

$$h' = R_b h = f_{b2}(h). \quad (14.11)$$

O ponto crítico é caracterizado por  $\xi \rightarrow \infty$ , de tal forma que os parâmetros da teoria não mudam. Em termos das variáveis físicas  $t$  e  $h$  isso implica que  $f_{b1}(0) = 0$  e  $f_{b2}(0) = 0$ . Dizemos que o ponto crítico é um **ponto fixo** do grupo de renormalização. Fisicamente, o ponto crítico é caracterizado pela **invariância de escala** (não existe uma escala de comprimento característica).

Como o GR é, na realidade, uma mudança de escala de comprimento, ele é um ponto fixo da transformação. Linearizando as Eqs. (14.10) e (14.11) em torno do ponto crítico, temos

$$t' = R_b t = \Lambda_b^t t, \quad (14.12)$$

$$h' = R_b h = \Lambda_b^h h, \quad (14.13)$$

onde  $\Lambda_b^t = f'_{b1}(0) > 1$  e  $\Lambda_b^h = f'_{b2}(0) > 1$ . Finalmente, da propriedade de grupo, Eq. (14.6), fazendo  $b' = 1$  temos que

$$R_1 = 1 \Rightarrow \Lambda_1^i = 1, \quad (14.14)$$

onde  $i = t, h$  ou  $\phi$ . Para valores muito grandes de  $b$  podemos tratá-lo aproximadamente como variável contínua. Nesse caso, derivando em relação a  $b'$  a Eq. (14.6) aplicada às Eqs. (14.12-14.13)

$$\Lambda_b^i \Lambda_{b'}^{i'} = b \Lambda_{bb'}^{i'}, \quad (14.15)$$

onde  $\Lambda_b^{i'} = d\Lambda_b^i/db$ . Fazendo  $b' = 1$

$$\frac{d \ln \Lambda_b^i}{db} = \frac{\Lambda_1^{i'}}{b} \Rightarrow \ln \Lambda_b^i = \Lambda_1^{i'} \ln b, \quad (14.16)$$

onde usamos a condição inicial (14.14). Segue que

$$\Lambda_b^i = b^{d_i}, \quad (14.17)$$

onde  $d_i = \Lambda_1^{i'}$ .

Em resumo, próximo do ponto crítico podemos re-escalar as distâncias por um fator  $b$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/b$ . Sob esse re-escalamto, todas as relações permanecem invariantes, desde que um re-escalamto correspondente seja feito das várias quantidades físicas

$$t \rightarrow t' = tb^{d_t}, \quad (14.18)$$

$$h \rightarrow h' = hb^{d_h}, \quad (14.19)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi b^{d_\phi}. \quad (14.20)$$

Em outras palavras, o re-escalamto  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/b$  pode ser “compensado” pelo re-escalamto de  $t, h, \phi$  acima. Os expoentes  $d_t, d_h, d_\phi$ , etc. são as chamadas **dimensões anômalas** da temperatura reduzida, campo magnético, etc. É claro que o comprimento de correlação também deve ser re-escalado pelo mesmo fator  $\xi \rightarrow \xi' = \xi/b$ . Como

$$\xi \sim t^{-\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{d_t}, \quad (14.21)$$

que relaciona a dimensão da temperatura reduzida com o expoente do comprimento de correlação. Vamos considerar agora a densidade de energia livre. O re-escalamto da Eq. (14.9) em termos das variáveis físicas que se re-escalam como nas Eqs. (14.18-14.19) leva a

$$b^d f(t, h) = f(tb^{d_t}, hb^{d_h}). \quad (14.22)$$

Se essa relação é válida pra qualquer  $b$ , podemos tomar  $b = b_0 t^{-1/d_t}$ , de tal forma que

$$f(t, h) = t^{d/d_t} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}\right) = t^{\nu d} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right), \quad (14.23)$$

que é a forma da teoria de escala (12.3) se usarmos a relação de hiper-escala  $2 - \alpha = \nu d$ , e identificarmos

$$\Delta = \frac{d_h}{d_t} = \beta + \gamma \Rightarrow d_h = \frac{\beta + \gamma}{\nu}. \quad (14.24)$$

A função de correlação pode ser analisada de maneira análoga. Ela deve ser re-escalada por um fator  $b^{2d_\phi}$ , pois é obtida pelo produto de dois campos  $\phi$ . Assim (abaixo,  $r$  é o módulo de  $\mathbf{r}$ , não o parâmetro de Landau)

$$G(r, t, h) = \text{Tr}_{\phi(\mathbf{x})} \left\{ e^{-\beta L[\phi(\mathbf{x})]} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \phi(\mathbf{x}) \right\} \quad (14.25)$$

$$= \frac{1}{b^{2d_\phi}} \text{Tr}_{\phi'(\mathbf{x}')} \left\{ e^{-\beta L[\phi'(\mathbf{x}')] } \phi'\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{r}}{b}\right) \phi'\left(\frac{\mathbf{x}}{b}\right) \right\} \quad (14.26)$$

$$= \frac{1}{b^{2d_\phi}} G\left(\frac{r}{b}, t', h'\right). \quad (14.27)$$

Fazendo  $h = 0$  por simplicidade

$$b^{2d_\phi} G(r, t) = G\left(\frac{r}{b}, tb^{d_t}\right). \quad (14.28)$$

No ponto crítico, podemos fazer  $t = 0$  e  $b = b_0 r$ , de tal forma que

$$G(r, t = 0) = b_0^{-2d_\phi} r^{-2d_\phi} G\left(\frac{1}{b_0}, 0\right). \quad (14.29)$$

Comparando com a expressão esperada

$$G(r, t = 0) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (14.30)$$

obtemos

$$2d_\phi = d - 2 + \eta. \quad (14.31)$$

Além disso, se escolhermos  $b^{d_t} t = b_0$  e lembrando que  $d_t = 1/\nu$  segue que  $b = b_0^\nu t^{-\nu}$  e

$$G(r, t) = \frac{1}{b^{d-2+\eta}} G\left(\frac{r}{b}, tb^{1/\nu}\right) \quad (14.32)$$

$$= \frac{1}{(t/b_0)^{-\nu(d-2+\eta)}} G\left(\frac{rb_0^{-\nu}}{t^{-\nu}}, b_0\right) \quad (14.33)$$

$$= \frac{b_0^{-\nu(d-2+\eta)}}{r^{d+2-\eta}} \left(\frac{r}{t^{-\nu}}\right)^{d+2-\eta} G\left(\frac{rb_0^{-\nu}}{t^{-\nu}}, b_0\right) \quad (14.34)$$

$$= \frac{1}{r^{d+2-\eta}} \Gamma\left(\frac{r}{t^{-\nu}}\right), \quad (14.35)$$

que tem a forma (12.16) se usarmos que  $\xi \sim t^{-\nu}$  e donde deduzimos que

$$\Gamma(x) = (b_0^{-\nu} x)^{d+2-\eta} G(b_0^{-\nu} x, b_0). \quad (14.36)$$

Assim, deduzimos todas as relações da teoria de escala, das quais as 4 relações entre expoentes críticos podem ser derivadas. Portanto, a origem da teoria de escala vem da possibilidade de re-escalamto expresso nas Eqs. (14.18-14.20), que formam a base do grupo de renormalização.

## XV. SOLUÇÃO EXATA DO MODELO DE ISING UNIDIMENSIONAL

Vamos aplicar as idéias do GR ao modelo de Ising uni-dimensional. Antes, vamos resolver exatamente o modelo para obtermos um termo de comparação. Embora esse modelo não apresente uma transição de fase a temperatura finita como desejaríamos, ainda assim ele serve de guia fácil para a introdução do grupo de renormalização. O modelo é definido como

$$H_I = -J \sum_{i=1}^L S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^L S_i. \quad (15.1)$$

Vamos supor, por simplicidade, condições periódicas de contorno, tais que  $S_{L+1} = S_1$ , ou seja, a rede tem uma geometria de anel. A função partição do modelo pode ser escrita como

$$Z(T, J, h) = \text{Tr} \{ e^{-\beta H_I} \} = \sum_{S_1=\pm 1} \dots \sum_{S_L=\pm 1} \left\{ \left[ e^{K S_1 S_2 + H(S_1 + S_2)/2} \right] \left[ e^{K S_2 S_3 + H(S_2 + S_3)/2} \right] \dots \left[ e^{K S_L S_1 + H(S_L + S_1)/2} \right] \right\}, \quad (15.2)$$

onde  $K = \beta J$  e  $H = \beta h$ . Percebe-se claramente que temos uma estrutura de produto de  $L$  matrizes idênticas

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} e^{K+H} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-H} \end{pmatrix}, \quad (15.3)$$

onde os elementos da matriz são rotulados pelos valores possíveis dos spins. A matriz  $\mathbf{T}$  é conhecida como **matriz de transferência**, pois ela “transfere” o efeito de um sítio ao próximo. Ela tem uma grande importância em vários contextos de física estatística. Assim, a função partição pode ser imediatamente escrita como o traço (por causa das condições periódicas de contorno) da matriz transferência elevada à potência  $L$

$$Z(T, J, h) = \text{Tr}(\mathbf{T}^L). \quad (15.4)$$

O traço acima pode ser facilmente calculado após a diagonalização de  $\mathbf{T}$  que é uma matriz simétrica e, portanto, pode ser diagonalizada por uma transformação ortogonal. Chamando os auto-valores (reais) de  $\mathbf{T}$  de  $t_1$  e  $t_2$ , podemos escrever

$$Z(T, J, h) = t_1^L + t_2^L. \quad (15.5)$$

Os auto-valores de  $\mathbf{T}$  são

$$t_{1,2} = e^K \left( \cosh H \pm \sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}} \right). \quad (15.6)$$

No limite termodinâmico  $L \rightarrow \infty$ , podemos escrever

$$Z(T, J, h) = t_1^L \left[ 1 + \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^L \right] \rightarrow t_1^L [1 + e^{-\alpha L}], \quad (15.7)$$

onde  $\alpha = \ln(t_1/t_2) > 0$ , já que  $t_1 > t_2$ . Vemos assim que a função partição é determinada exclusivamente pelo maior autovalor da matriz de transferência. Finalmente, obtemos a energia livre por spin

$$f(T, J, h) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ -\frac{T}{L} \ln Z(T, J, h) \right] = -T \ln t_1 = -J - T \ln \left( \cosh H + \sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}} \right), \quad (15.8)$$

que é o resultado procurado.

Várias quantidades importantes podem ser calculadas. Quando  $h = 0$ , temos

$$f(T, J, h) = -J - T \ln(1 + e^{-2K}), \quad (15.9)$$

donde a entropia por spin é

$$s(T) = -\frac{\partial f}{\partial T} = \ln(1 + e^{-2K}) + \frac{e^{-2K}}{1 + e^{-2K}} \left( \frac{2J}{T} \right), \quad (15.10)$$

enquanto que o calor específico é

$$\begin{aligned} c(T) &= T \frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{1 + e^{2K}} \left( \frac{2J}{T} \right) + \frac{e^{2K}}{(1 + e^{2K})^2} \left( \frac{2J}{T} \right)^2 - \frac{1}{1 + e^{2K}} \left( \frac{2J}{T} \right) = \\ c(T) &= \left( \frac{J}{T} \right)^2 \text{sech}^2 \left( \frac{J}{T} \right). \end{aligned} \quad (15.11)$$

Quando  $T \rightarrow 0$ ,

$$c(T) \rightarrow \left( \frac{2J}{T} \right)^2 e^{-2J/T} \rightarrow 0. \quad (15.12)$$

A magnetização por spin é dada por

$$m(T, h) = -\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial H} = \frac{\sinh H + \frac{\sinh H \cosh H}{\sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}}}}{\cosh H + \sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}}} = \frac{\sinh H}{\sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}}}. \quad (15.13)$$

Note que  $m(T, h \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , mostrando que não há magnetização espontânea em qualquer temperatura  $T \neq 0$ , como já havíamos antecipado. Entretanto, quando  $T \rightarrow 0$

$$m(T \rightarrow 0, h) \rightarrow \frac{\sinh H}{|\sinh H|} = \text{sgn}(H), \quad (15.14)$$

mostrando que há magnetização (saturada) em  $T = 0$ . Podemos dizer, portanto, que o modelo de Ising unidimensional tem  $T_c = 0$ . Note como a não analiticidade da magnetização aparece em  $h = 0$ , por causa do limite termodinâmico. Finalmente, a susceptibilidade magnética é dada por

$$\chi(T) = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{T} \left. \frac{e^{-4K} \cosh H}{(\sinh^2 H + e^{-4K})^{3/2}} \right|_{h=0} = \frac{e^{2J/T}}{T}, \quad (15.15)$$

que diverge exponencialmente quando  $T \rightarrow 0$ . Assim, vemos que embora possamos falar de uma transição de fase a  $T_c = 0$ , o comportamento crítico é diferente do convencional, pois as divergências são exponenciais. Essa é uma característica da chamada **dimensão crítica inferior**, que é a dimensão limítrofe abaixo da qual não há transição de fase em uma temperatura finita. A dimensão crítica inferior da classe de universalidade de Ising é  $d_l = 1$ .

Queremos agora calcular a função de correlação. Tomemos primeiramente o valor médio de um spin qualquer  $S_i$ , que sabemos ser igual à expressão na Eq. (15.13). Podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_L=\pm 1} \{ T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \cdots T_{S_{i-1} S_i} S_i T_{S_i S_{i+1}} \cdots T_{S_L S_1} \} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_L=\pm 1} \left( \sum_{S'_i=\pm 1} \right) \{ T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \cdots T_{S_{i-1} S_i} [\delta_{S_i S'_i}] T_{S'_i S_{i+1}} \cdots T_{S_L S_1} \} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_L=\pm 1} \left( \sum_{S'_i=\pm 1} \right) \{ T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \cdots T_{S_{i-1} S_i} [\sigma_{S_i S'_i}^3] T_{S'_i S_{i+1}} \cdots T_{S_L S_1} \}, \end{aligned} \quad (15.16)$$

onde  $\sigma_{ij}^3$  é a matriz de Pauli

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15.17)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ \mathbf{T}^{i-1} \sigma^3 \mathbf{T}^{L-i+1} \} \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ \sigma^3 \mathbf{T}^L \}, \end{aligned} \quad (15.18)$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço. Analogamente ( $r > 0$ )

$$\begin{aligned} \langle S_i S_{i+r} \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ \mathbf{T}^{i-1} \sigma^3 \mathbf{T}^r \sigma^3 \mathbf{T}^{L-i-r+1} \} \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ \sigma^3 \mathbf{T}^r \sigma^3 \mathbf{T}^{L-r} \}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

As expressões (15.18) e (15.19) podem ser calculadas após a transformação ortogonal que diagonaliza  $\mathbf{T}$ . Nesse caso, precisamos encontrar a matriz em que  $\sigma^3$  se transforma. Se  $\mathbf{S}$  é a transformação ortogonal, definimos

$$\mathbf{S} \sigma^3 \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (15.20)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^L & 0 \\ 0 & t_2^L \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{at_1^L + dt_2^L}{t_1^L + t_2^L} \rightarrow a, \end{aligned} \quad (15.21)$$

onde tomamos o limite  $L \rightarrow \infty$  na última passagem. Analogamente

$$\begin{aligned}
\langle S_i S_{i+r} \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^r & 0 \\ 0 & t_2^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{L-r} & 0 \\ 0 & t_2^{L-r} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} at_1^r & bt_2^r \\ ct_1^r & dt_2^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at_1^{L-r} & bt_2^{L-r} \\ ct_1^{L-r} & dt_2^{L-r} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{Z} \text{Tr} \begin{pmatrix} a^2 t_1^L + bct_2^r t_1^{L-r} & abt_1^r t_2^{L-r} + bdt_2^L \\ act_1^L + cdt_2^r t_1^{L-r} & bct_1^r t_2^{L-r} + d^2 t_2^L \end{pmatrix} \\
&= \frac{a^2 t_1^L + bc(t_2^r t_1^{L-r} + t_1^r t_2^{L-r}) + d^2 t_2^L}{t_1^L + t_2^L} \\
&\rightarrow a^2 + bc \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^r.
\end{aligned} \tag{15.22}$$

O valor da função correlação conectada é

$$G(r) = \langle S_i S_{i+r} \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_{i+r} \rangle = bc \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^r = bce^{-r/\xi}, \tag{15.23}$$

onde

$$\xi = \frac{1}{\ln(pt_1/t_2)}, \tag{15.24}$$

que nos dá uma expressão exata para o comprimento de correlação. Usando as expressões anteriores para os auto-valores da matriz de transferência em  $h = 0$

$$\xi^{-1} = \ln \left( \frac{1 + e^{-2K}}{1 - e^{-2K}} \right) = \ln \coth \left( \frac{J}{T} \right). \tag{15.25}$$

No limite em que  $T \rightarrow 0$ ,

$$\xi \approx \frac{e^{2J/T}}{2} \rightarrow \infty. \tag{15.26}$$

Vemos novamente que a divergência de  $\xi$  é exponencial à medida que a temperatura decresce, característica da dimensão crítica inferior.

## XVI. APLICAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO AO MODELO DE ISING UNI-DIMENSIONAL

Devido à simplicidade do modelo de Ising uni-dimensional, a transformação do grupo de renormalização pode ser obtida exatamente. Isso não acontecerá em modelos mais complexos. É importante ter em mente também que o modelo de Ising uni-dimensional não tem uma transição de fase em temperatura finita, pois encontra-se em sua dimensão crítica inferior. Como vimos,  $T_c = 0$  e as divergências são tipicamente exponenciais. A generalização dos conceitos relativos a transições de fase a temperatura finita tem que ser feita com cuidado, como veremos. Mais detalhes sobre as aplicações dessa Seção e a respeito de outros modelos uni-dimensionais podem ser encontrados na Ref. 5.

A idéia é usar variáveis de bloco correspondentes a blocos de 2 spins. Se há inicialmente  $L$  spins, faremos uma soma parcial sobre blocos de 2 spins ficando ao final com um número  $L/2$  de blocos. Essa tarefa é enormemente facilitada pelo uso da matriz de transferência. Assim

$$Z(T, h) = \text{Tr} \mathbf{T}^L = \text{Tr} (\mathbf{T}^2)^{L/2}. \tag{16.1}$$

Assim, vemos que a nova matriz de transferência das variáveis de bloco é simplesmente o quadrado da matriz  $\mathbf{T}$  dos spins originais, Eq. (15.3). Definimos, por conveniência, as variáveis auxiliares

$$u \equiv e^{-K} = e^{-\beta J} \in [0, 1), \tag{16.2}$$

$$v \equiv e^{-H} = e^{-\beta h} \in [0, 1), \tag{16.3}$$

onde restringiremos a discussão a  $h > 0$  devido à simetria  $h \rightarrow -h$ . Nesse caso

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{uv} & u \\ u & \frac{v}{u} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} u^2 + \frac{1}{u^2v^2} & v + \frac{1}{v} \\ v + \frac{1}{v} & u^2 + \frac{v^2}{u^2} \end{pmatrix}. \quad (16.4)$$

Queremos que o sistema mantenha a mesma forma que ele tinha inicialmente. Assim, impomos que

$$\mathbf{T}' = C' \begin{pmatrix} \frac{1}{u'v'} & u' \\ u' & \frac{v'}{u'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + \frac{1}{u^2v^2} & v + \frac{1}{v} \\ v + \frac{1}{v} & u^2 + \frac{v^2}{u^2} \end{pmatrix}, \quad (16.5)$$

onde somos obrigado a introduzir uma nova constante  $C'$  (inicialmente,  $C = 1$ ), pois a Eq. (16.5) corresponde a 3 equações e precisamos de 3 incógnitas. Resolvendo as 3 equações acima obtemos

$$v' = \frac{(u^4 + v^2)^{1/2}}{(u^4 + \frac{1}{v^2})^{1/2}}, \quad (16.6)$$

$$u' = \frac{(v + \frac{1}{v})^{1/2}}{(u^4 + \frac{1}{u^4} + v^2 + \frac{1}{v^2})^{1/4}}, \quad (16.7)$$

$$C' = \left(v + \frac{1}{v}\right)^{1/2} \left(u^4 + \frac{1}{u^4} + v^2 + \frac{1}{v^2}\right)^{1/4}. \quad (16.8)$$

Note que nesse caso, os spins mantêm seus dois valores originais. É fácil ver que essas equações tem um ponto fixo no plano  $(u, v)$  em

$$u^* = 0, \quad (16.9)$$

$$v^* = 1, \quad (16.10)$$

que corresponde a  $J/T = \infty$  e  $h = 0$ . Claramente, esse é o ponto crítico a temperatura zero. Outro ponto fixo ocorre em

$$u^{**} = 1, \quad (16.11)$$

$$v^{**} = \text{qualquer}, \quad (16.12)$$

correspondente a  $J/T = 0$  e  $h$  qualquer. Esse é o ponto fixo de alta temperatura, correspondente ao estado paramagnético fortemente desordenado. O primeiro ponto fixo  $(u^*, v^*)$  é instável, pois pontos ligeiramente afastados dele tendem a se distanciarem indefinidamente dele sob o fluxo do GR.

Vamos analisar a vizinhança do ponto  $(0, 1)$ . Fazendo  $u \ll 1$  e  $v = 1 - w$ , onde  $w \ll 1$ , podemos linearizar as Eqs. (16.6-16.7) para obter

$$v' \equiv 1 - w' = \frac{\sqrt{(1-w)^2 + u^4}}{\sqrt{(1-w)^{-2} + u^4}} \approx (1-2w)^{1/2} (1+2w)^{-1/2} \approx 1 - 2w, \quad (16.13)$$

$$\Rightarrow w' = 2w, \quad (16.14)$$

e

$$u' = \frac{\sqrt{1-w + (1-w)^{-1}}}{[u^4 + u^{-4} + (1-w)^2 + (1-w)^{-2}]^{1/4}} \approx \frac{[2 + \mathcal{O}(w^2)]^{1/2}}{[u^4 + u^{-4} + 2 + \mathcal{O}(w^2)]^{1/4}} \approx \sqrt{2}u (1 + \mathcal{O}(u^4)), \quad (16.15)$$

$$\Rightarrow u' = \sqrt{2}u. \quad (16.16)$$

Assim, em termos das variáveis  $u$  e  $w$ , obtemos (lembrando que  $b = 2$ )

$$\Lambda_2^u = \sqrt{2}, \quad (16.17)$$

$$\Lambda_2^w = 2, \quad (16.18)$$

donde

$$d_u = \frac{\ln \Lambda_2^u}{\ln 2} = \frac{1}{2}, \quad (16.19)$$

$$d_w = \frac{\ln \Lambda_2^w}{\ln 2} = 1. \quad (16.20)$$

Vemos assim que as dimensões procuradas são todas maiores que zero, o que implica que o ponto fixo ( $u^* = 0, v^* = 1$ ) é instável, pois as perturbações em torno dele crescem com o fluxo do GR. A partir dessas dimensões e dos resultados da Seção XIV podemos calcular os expoentes críticos **em termos das variáveis  $u$  e  $v$** , que não são as variáveis originais. Uma aplicação cega das relações entre os expoentes e as dimensões nos dá (lembrando que  $u$  está ligado à temperatura e  $w$ , através de  $v$ , está ligado ao campo magnético)

$$\nu = \frac{1}{d_u} = 2, \quad (16.21)$$

$$\Delta = \frac{d_w}{d_u} = 2, \quad (16.22)$$

$$\alpha = 2 - \nu d = 0, \quad (16.23)$$

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta = 0, \quad (16.24)$$

$$\gamma = 2\Delta + \alpha - 2 = 2, \quad (16.25)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\beta} = \infty, \quad (16.26)$$

$$\eta = 2 - \frac{\gamma}{\nu} = 1. \quad (16.27)$$

Vamos examinar um pouco mais detalhadamente esses valores. Vários deles são obtidos a partir da função partição. Usando o resultado exato, Eq. (15.8), podemos escrever a parte singular da energia livre para  $u \ll 1$  e  $v = 1 - w$  com  $w \ll 1$

$$\begin{aligned} f_s &= -T \ln \left\{ \frac{1}{2} \left( v + \frac{1}{v} \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( v - \frac{1}{v} \right)^2 + u^4 \right]^{1/2} \right\} \\ &\approx -T \ln \left\{ 1 + [w^2 + u^4]^{1/2} \right\} \\ &\approx -T [w^2 + u^4]^{1/2} \\ &\approx -T u^2 \left[ 1 + \frac{w^2}{u^4} \right]^{1/2} \\ &= u^2 \Phi \left( \frac{w}{u^2} \right), \end{aligned} \quad (16.28)$$

onde usamos que, na região crítica,  $w$  é da mesma ordem que  $u^2$  (ver Eqs. (16.19-16.20)) e que  $T \sim 1/\ln u \sim u^0$  na precisão em que trabalhamos. A forma (16.28) é do tipo usado na teoria de escala (14.23) onde

$$\Phi(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad (16.29)$$

e onde  $\alpha = 0$  e  $\Delta = 2$ , como tínhamos obtido nas Eqs. (16.22) e (16.23). Note que são as variáveis

$$u = e^{-J/T}, \quad (16.30)$$

$$w = 1 - e^{-h/T} \approx \frac{h}{T}, \quad (16.31)$$

que aparecem na forma de escala, o que é peculiar ao caso da dimensão crítica inferior. Da forma (16.28), seguem os expoentes  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , ver Seção XII. Note que  $\alpha = 0$  é compatível com a não divergência do calor específico quando  $T \rightarrow 0$ ,  $\beta = 0$  é compatível com o salto do parâmetro de ordem entre  $T = 0$  e  $T \neq 0$  e  $1/\delta = 0$  é compatível com o salto da magnetização de  $h < 0$  para  $h > 0$  em  $T = 0$ . O valor  $\gamma = 2$  nos dá

$$\chi \sim \frac{1}{u^2} \sim e^{2J/T}, \quad (16.32)$$

que é compatível com a Eq. (15.15) (com precisão logarítmica).

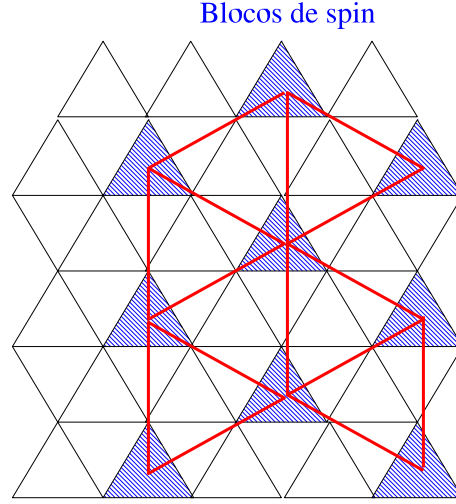


Figura 6: Modelo de Ising na rede triangular. Cada triângulo hachurado azul forma um bloco de 3 spins. A rede de blocos tem parâmetro de rede igual a  $\sqrt{3}$  vezes o parâmetro original.

Os expoentes  $\nu$  e  $\eta$  estão ligados à função de correlação. Da Eq. (15.23) e dos valores de  $t_{1,2}$  com  $h = 0$

$$t_{1,2} = e^K \pm e^{-K} = u^{-1} \pm u, \quad (16.33)$$

obtemos

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \approx 1 - 2u^2, \quad (16.34)$$

$$\Rightarrow G(r) \sim (1 - 2u^2)^r \sim e^{-r/\xi}, \quad (16.35)$$

onde

$$\xi \sim \frac{1}{2u^2} \sim e^{2J/T}, \quad (16.36)$$

como já havia sido obtido e que nos dá  $\nu = 2$  em termos da variável  $u$ , como antecipado na Eq. (16.21). Além disso, comparando com a Eq. (12.16), vemos que a ausência de um pré-fator da exponencial de  $G(r)$  com comportamento de lei de potência nos dá  $d - 2 + \eta = \eta - 1 = 0$ , que finalmente nos leva  $\eta = 1$ , como obtido na Eq. (16.27). Vemos assim que, propriamente reinterpretadas em termos da variável exponencial  $u = e^{-J/T}$ , as relações da teoria de escala e suas conseqüências podem ser aplicadas à dimensão crítica inferior.

## XVII. APLICAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO AO MODELO DE ISING BI-DIMENSIONAL

Vamos mostrar agora uma aplicação do GR ao modelo de Ising bi-dimensional. Nesse caso, a transformação do GR não pode ser obtida exatamente. Entretanto, o modelo agora é mais não trivial, pois tem uma transição de fase “regular” a uma temperatura crítica finita  $T_c \neq 0$  e a aplicação torna-se muito mais interessante. Além disso, temos a solução exata de Onsager que serve como termo de comparação para a precisão do método. Vários GR’s diferentes foram testados para os modelos de Ising bi-dimensionais,<sup>6</sup> em redes quadradas<sup>7-9</sup> e triangulares.<sup>10-12</sup> Nosso tratamento é baseado na Ref. 11.

Considere o modelo de Ising com interações entre primeiros vizinhos na rede triangular com  $N$  sítios. Vamos formar blocos de 3 spins, localizados nos vértices dos triângulos que formam a rede (ver figura 6). A nova rede de blocos também será uma rede triangular com  $N/3$  sítios. Seu novo parâmetro de rede é  $\sqrt{3}$  vezes o parâmetro inicial (tomado como igual a 1). Assim,  $b = \sqrt{3}$ . Nosso grupo será definido a partir da regra da maioria

$$S_I = \text{sgn}(S_{I1} + S_{I2} + S_{I3}), \quad (17.1)$$

onde  $S_{I_i}$  são os 3 spins que formam o bloco  $I$  e  $S_I$  é o spin de bloco da nova rede (usaremos sub-índice maiúsculo  $I, J$ , etc. para os spins de bloco). Note que a regra da maioria nesse caso não produz “empates”, pois o número de spins por bloco é ímpar.

$S_I \setminus S_i$	1	2	3
1	1	1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1
1	1	1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	-1

Tabela II: Tabela de correspondência entre as configurações dos spins originais da rede de Ising triangular e as configurações dos spins de blocos, a partir da regra da maioria 17.1.

Antes de acharmos a transformação do GR, vamos determinar os auto-valores esperados baseado na solução exata de Onsager. O auto-valor da temperatura é obtido a partir de  $\nu = 1 = 1/d_t$ , donde

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^t = 3^{d_t/2} = 3^{1/2\nu} = \sqrt{3} \approx 1.73. \quad (17.2)$$

O auto-valor do campo magnético por sua vez pode ser encontrado a partir de  $d_h = (\beta + \gamma) / \nu = \frac{1}{8} + \frac{7}{4} = \frac{15}{8}$ , donde

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^h = 3^{d_h/2} = 3^{15/16} \approx 2.80. \quad (17.3)$$

Cada bloco de 3 spins tem  $2^3 = 8$  configurações, 4 das quais geram  $S_I = +1$  e as outras 4 geram  $S_I = -1$ . A correspondência está na Tabela II.

O Hamiltoniano transformado  $H'$  é obtido a partir de

$$e^{-\beta H'[S_I]} = \text{Tr}_{S_i} \left\{ e^{-\beta H[S_i]} \prod_I \delta [S_I - \text{sgn} (S_{I1} + S_{I2} + S_{I3})] \right\}. \quad (17.4)$$

É útil separar o Hamiltoniano original em 2 termos: o primeiro, que tomaremos como “Hamiltonian não perturbado”  $H_0$ , contém apenas pares de spins em que ambos pertencem ao mesmo bloco e o segundo, o “Hamiltoniano de perturbação”  $V$ , contendo pares de spins tais que um spin pertence a um bloco e o outro pertence ao bloco vizinho

$$H_0 = K \sum_I \sum_{\langle ij \rangle} S_{Ii} S_{Ij}, \quad (17.5)$$

$$V = K \sum_{\langle IJ \rangle} \sum_{\langle ij \rangle} S_{Ii} S_{Jj}, \quad (17.6)$$

onde  $K = \beta J$  (tomaremos o campo magnético como nulo inicialmente). Podemos agora escrever, definindo o projetor

$$P [S_I, S_i] = \prod_I \delta [S_I - \text{sgn} (S_{I1} + S_{I2} + S_{I3})] \quad (17.7)$$

$$e^{-\beta H'[S_I]} = \text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} e^V P [S_I, S_i] \} = \text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} P [S_I, S_i] \} \frac{\text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} e^V P [S_I, S_i] \}}{\text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} P [S_I, S_i] \}} \equiv Z_0 \langle e^V \rangle_0, \quad (17.8)$$

onde, para um operador qualquer  $O$

$$\langle O \rangle_0 \equiv \frac{\text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} P [S_I, S_i] O \}}{\text{Tr}_{S_i} \{ e^{H_0} P [S_I, S_i] \}}. \quad (17.9)$$

O traço em  $Z_0$  se desacopla em traços sobre os  $N/3$  blocos independentes. O traço de cada bloco é obtido usando-se a Tabela II e é independente do valor de  $S_I$  no bloco

$$Z_b = e^{K+K+K} + 3e^{-K-K+K} = e^{3K} + 3e^{-K}, \quad (17.10)$$

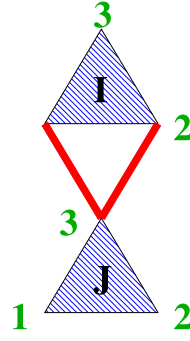


Figura 7: Acoplamentos entre dois blocos adjacentes  $I$  e  $J$  em primeira ordem em teoria de perturbação (ligações em vermelho).

donde

$$Z_0 = Z_b^{N/3}. \quad (17.11)$$

Assim,

$$-\beta H' [S_I] = \frac{N}{3} \ln Z_b + \ln \langle e^V \rangle_0. \quad (17.12)$$

Precisamos agora calcular  $\ln \langle e^V \rangle_0$ . Para isso, vamos fazer teoria de perturbação em  $V$ . Uma alternativa um pouco mais complicada é calcular exatamente o valor esperado acima considerando um cluster de 2 blocos de spin adjacentes  $I$  e  $J$  e igualar o resultado a

$$e^{K' S_I S_J} = \langle e^V \rangle_0. \quad (17.13)$$

Vamos nos concentrar apenas no cálculo perturbativo. Nesse caso,

$$\langle e^V \rangle_0 = 1 + \langle V \rangle_0 + \mathcal{O}(V^2), \quad (17.14)$$

$$\ln \langle e^V \rangle_0 = \langle V \rangle_0 + \mathcal{O}(V^2), \quad (17.15)$$

onde usamos que  $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ . É fácil ver que em  $\langle V \rangle_0$  só há acoplamentos entre blocos vizinhos (ver figura 7). Considere um par  $I$  e  $J$  desses blocos. Os únicos termos de  $\langle V \rangle_0$  relevantes são

$$\langle V \rangle_0 = \langle K S_{J3} (S_{I1} + S_{I2}) \rangle_0 = 2K \langle S_{J3} S_{I1} \rangle_0, \quad (17.16)$$

onde, no último passo, utilizamos a simetria do problema. Como o Hamiltoniano  $H_0$  não acopla os blocos, segue que

$$\langle S_{J3} S_{I1} \rangle_0 = \langle S_{J3} \rangle_0 \langle S_{I1} \rangle_0. \quad (17.17)$$

O cálculo restante é fácil. Temos que

$$\langle S_{I1} \rangle_0 = \frac{1}{Z_b} \text{Tr}_{S_{Ii}} \left\{ S_{I1} e^{K(S_{I1} S_{I2} + S_{I1} S_{I3} + S_{I2} S_{I3})} P[S_I, S_{Ii}] \right\}. \quad (17.18)$$

Fixando  $S_I = 1$ , temos as 4 primeiras configurações da Tabela II, donde

$$\begin{aligned} \langle S_{I1} \rangle_0 &= \frac{1}{Z_b} \{ e^{3K} + (1+1-1)e^{-K} \} \\ &= \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \quad (S_I = 1). \end{aligned} \quad (17.19)$$

Analogamente, para  $S_I = -1$ , considerando as outras 4 configurações da Tabela II temos

$$\begin{aligned} \langle S_{I1} \rangle_0 &= \frac{1}{Z_b} \{ -e^{3K} + (1-1-1)e^{-K} \} \\ &= -\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \quad (S_I = -1). \end{aligned} \quad (17.20)$$

Portanto, podemos escrever de maneira geral

$$\langle S_{I1} \rangle_0 = S_I \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}, \quad (17.21)$$

e das Eqs. (17.16) e (17.17)

$$\langle V \rangle_0 = K' S_I S_J, \quad (17.22)$$

onde

$$K' = 2K \left( \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 \equiv f_t(K). \quad (17.23)$$

Da Eq. (17.12) segue que nessa ordem de aproximação

$$-\beta H' = \frac{N}{3} \ln(e^{3K} + 3e^{-K}) + K' \sum_{\langle IJ \rangle} S_I S_J. \quad (17.24)$$

Essa é a transformação completa do GR que procurávamos. Percebe-se que há um termo independente dos spins de blocos, que é importante para o cálculo da função partição ou da energia livre (correspondente ao termo  $C'$  no modelo uni-dimensional). O segundo termo nos mostra como a constante de acoplamento entre primeiros vizinhos se transforma.

Vamos agora procurar os pontos fixos da transformação do GR. Chamando-os de  $K^*$ , temos que  $K^* = f_t(K^*)$ , donde obtemos imediatamente os dois pontos fixos  $K_p^* = 0$  e  $K_f^* = \infty$ , correspondentes às fases paramagnética e ferromagnética, respectivamente. Além desses, existe um terceiro ponto fixo não trivial

$$\frac{e^{3K^*} + e^{-K^*}}{e^{3K^*} + 3e^{-K^*}} = \frac{e^{4K^*} + 1}{e^{4K^*} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{4K^*} = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow K^* = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}) \approx 0.34. \quad (17.25)$$

Compare esse valor com o valor exato  $K_c = (\ln 3)/4 = 0.27$ . Linearizando em torno desse ponto fixo da maneira usual

$$f'_t(K^*) = 1 + 2(8 - 5\sqrt{2})K^* \approx 1.62 = \Lambda_{\sqrt{3}}^{t(1)}. \quad (17.26)$$

Essa derivada está ligada ao auto-valor da temperatura  $\Lambda_{\sqrt{3}}^t$ . Ele não está tão longe do valor exato 1.73, em vista da simplicidade da aproximação. O cálculo em segunda ordem fornece  $\Lambda_{\sqrt{3}}^{t(2)} \approx 1.77$ .

Podemos também estimar o auto-valor do campo magnético. Para isso, basta um cálculo perturbativo em  $h$ , pois o ponto fixo é  $h^* = 0$ . Podemos incluir o termo do campo magnético em  $H_0$

$$H_0 \rightarrow H_0 - h \sum_I \sum_i S_{Ii}. \quad (17.27)$$

O Hamiltoniano transformado receberá uma contribuição semelhante

$$H' \rightarrow H'_0 - h' \sum_I S_I, \quad (17.28)$$

onde chamamos de  $H'_0$  o Hamiltoniano transformado na ausência de campo magnético. Assim

$$e^{-\beta(H'_0 - h' \sum_I S_I)} = Z_0 \left\langle e^{\beta h \sum_I \sum_i S_{Ii}} e^V \right\rangle_0. \quad (17.29)$$

Expandindo em  $h$  e  $h'$ ,

$$e^{-\beta H'_0} \left( h' \sum_I S_I \right) = h Z_0 \left\langle e^V \sum_I \sum_i S_{Ii} \right\rangle_0. \quad (17.30)$$

Usando agora a Eq. (17.8) temos finalmente

$$h' \sum_I S_I = h \frac{\langle e^V \sum_I \sum_i S_{Ii} \rangle_0}{\langle e^V \rangle_0}. \quad (17.31)$$

Vamos trabalhar em ordem 0 na perturbação. Nesse caso,

$$h' \sum_I S_I = h \left\langle \sum_I \sum_i S_{Ii} \right\rangle_0. \quad (17.32)$$

O traço do lado direito é fácil de calcular. Temos, usando a Eq. (17.21),

$$\left\langle \sum_i S_{Ii} \right\rangle_0 = 3 \langle S_{I1} \rangle_0 = 3 S_I \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}, \quad (17.33)$$

que nos dá

$$h' = 3h \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \equiv f_h(K) h. \quad (17.34)$$

Calculando no ponto fixo  $K^*$ ,

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{h(0)} = f_h(K^*) = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12. \quad (17.35)$$

Compare com o valor exato 2.80. O cálculo em primeira ordem fornece  $\Lambda_{\sqrt{3}}^{h(1)} \approx 3.06$  e em segunda ordem  $\Lambda_{\sqrt{3}}^{h(2)} \approx 2.76$ .

### XVIII. OUTROS RESULTADOS E OPERADORES IRRELEVANTES

Os resultados apresentados na Seção XVII são bastante primitivos. Entretanto, cálculos bastante mais acurados podem ser feitos. Em primeiro lugar, pode-se estender a teoria de perturbação para ordens superiores, como já mencionado naquela Seção. Alternativamente, um outro método poderoso consiste em encontrar numericamente a transformação para o Hamiltoniano renormalizado, analisando-se pequenos aglomerados com um número finito de spins (**aproximação de aglomerados**). Em ambos os casos, a principal modificação encontrada com relação aos resultados da Seção XVII consiste no **aparecimento de novos acoplamentos entre spins que não estavam presentes no Hamiltoniano original**. O GR gera, em princípio, um número infinito de novos termos (consistentes com a simetria do sistema original) envolvendo acoplamentos entre pares de spins com separações arbitrárias (segundos vizinhos, terceiros vizinhos, etc.) e também termos de interação entre 3 ou mais spins. É por isso que devemos encarar o fluxo do GR como um **fluxo num espaço de Hamiltonianos de dimensão infinita**, cujos eixos são os coeficientes dos vários termos passíveis de serem gerados e consistentes com as simetrias do problema. Note que esses novos termos foram ignorados por Kadanoff em seu tratamento original, que introduziu o conceito fundamental de variáveis de bloco. Embora um grande número desses novos termos possa ser levado em conta num cálculo numérico, pode-se questionar a utilidade do método, que aparentemente se torna infinitamente complicado. Entretanto, vamos mostrar que, embora importantes para a obtenção de valores numéricos precisos, a influência desses infinitos termos pode ser muito bem controlada.

Como exemplo, tomemos os resultados em segunda ordem em teoria de perturbação para  $h = 0$  para a rede triangular.<sup>11</sup> Em segunda ordem em teoria de perturbação, acoplamentos entre segundos ( $L$ ) e terceiros vizinhos ( $M$ ) são gerados

$$K' = f_1(K, L, M), \quad (18.1)$$

$$L' = f_2(K, L, M), \quad (18.2)$$

$$M' = f_3(K, L, M). \quad (18.3)$$

Note que uma aplicação consistente deve incluir o efeito da presença de  $L$  e  $M$  no Hamiltoniano original, pois uma segunda iteração do GR já contará com esses termos como sendo não nulos. Os resultados da análise das Eqs. (18.1-18.3) fornecem um ponto fixo trivial não trivial em

$$K^* = 0.28, \quad (18.4)$$

$$L^* = -0.014, \quad (18.5)$$

$$M^* = -0.015. \quad (18.6)$$

A primeira coisa a notar é o pequeno valor dos acoplamentos adicionais no ponto fixo, indicando sua importância secundária. Além disso, calculando as derivadas no ponto fixo (na verdade, as derivadas cruzadas são não nulas e é necessário encontrar seus

auto-valores; discutiremos isso mais adiante) obtém-se, respectivamente

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{t(2)} = 1.78, \quad (18.7)$$

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{2(2)} = 0.23, \quad (18.8)$$

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{3(2)} = -0.12. \quad (18.9)$$

O ponto importante a ser notado aqui é que, excetuando-se o acoplamento de primeiros vizinhos, os outros dois tem  $|\Lambda_{\sqrt{3}}^i| < 1$ , ou seja, sob a iteração sucessiva do GR, os pequenos desvios em relação ao ponto fixo desses acoplamentos **decaem rapidamente a zero** (chamando-os coletivamente de  $g_i$ )

$$R_b^\ell(g_i) = (\Lambda_b^i)^\ell g_i \rightarrow 0, \quad (18.10)$$

quando  $\ell \rightarrow \infty$ . Equivalentemente, os acoplamentos em questão tem dimensão negativa  $d_i < 0$

$$R_b^\ell(g_i) = b^{\ell d_i} g_i \rightarrow 0. \quad (18.11)$$

Esses acoplamentos com dimensão negativa, por diminuírem sob a iteração do GR, são chamados de **operadores ou variáveis irrelevantes** e, em contrapartida, aqueles que têm dimensão positiva são chamados de **relevantes**. No caso do modelo de Ising, apenas o “operador de temperatura” ( $K$ ) e o campo magnético externo ( $h$ ) são relevantes. Referindo-nos à discussão geral da Seção XIV, podemos escrever a transformação da energia livre sob o GR na presença de várias variáveis irrelevantes como

$$b^d f(t, h, g_1, g_2, \dots) = f(tb^{d_t}, hb^{d_h}, g_1 b^{d_1}, g_2 b^{d_2}, \dots). \quad (18.12)$$

Assim como antes, podemos tomar  $b = b_0 t^{-1/d_t}$  e

$$f(t, h, g_1, g_2, \dots) = \frac{t^{d/d_t}}{b_0^d} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}, b_0^{d_1} g_1 t^{|d_1|/d_t}, b_0^{d_2} g_2 t^{|d_2|/d_t}, \dots\right) \quad (18.13)$$

$$\approx \frac{t^{\nu d}}{b_0^d} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^\Delta}, 0, 0, \dots\right), \quad (18.14)$$

$$= t^{\nu d} \Phi\left(\frac{h}{t^\Delta}\right), \quad (18.15)$$

para  $t$  suficientemente pequeno. As mesmas considerações se aplicam às outras formas de escala. Portanto, mesmo no caso em que o Hamiltoniano não mantém sua forma original simples sob a transformação do GR, a presença de um número grande de variáveis irrelevantes não altera a forma de escala assintótica, em que aparecem apenas as variáveis relevantes. Todos os estudos feitos, numéricos ou analíticos, confirmam a existência de apenas duas variáveis relevantes, essencialmente  $t$  e  $h$ , no fluxo do GR da classe de universalidade de Ising. Isso é compatível com a existência de apenas dois parâmetros que precisam ser ajustados para colocar o sistema no seu ponto crítico, a saber, a temperatura e o campo magnético externo. Esse detalhe final fornece a justificativa geral da teoria de escala em todos os seus pontos (existe um importante detalhe, a ser visto mais adiante, referente aos chamados **operadores perigosamente irrelevantes**).

Retornando ao modelo de Ising na rede triangular, cálculos na aproximação de aglomerados fornecem valores para o ponto fixo e as derivadas em crescente grau de precisão à medida que o aglomerado cresce. Os cálculos mais precisos reportados na Ref. 10, feitos num aglomerado de 7 triângulos fornecem os seguintes valores para os auto-valores relevantes

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{t(7cl)} \approx 1.7590, \quad (18.16)$$

$$\Lambda_{\sqrt{3}}^{h(7cl)} \approx 2.8024, \quad (18.17)$$

que devem ser comparados com os valores exatos  $\Lambda_{\sqrt{3}}^t = 1.73205$  e  $\Lambda_{\sqrt{3}}^h = 2.80092$ . A concordância é excelente.

Para a rede quadrada, os resultados na aproximação de aglomerados de 16 spins, separados em 4 quadrados de 4 spins cada um, fornecem acoplamentos entre primeiros e segundos vizinhos e acoplamentos entre 4 spins,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ , respectivamente, tais que o ponto crítico se localiza em<sup>7,8</sup>

$$K_1^{*(4cl)} = 0.307, \quad (18.18)$$

$$K_2^{*(4cl)} = 0.084, \quad (18.19)$$

$$K_3^{*(4cl)} = -0.004, \quad (18.20)$$

mais uma vez confirmando a predominância dos acoplamentos entre primeiros vizinhos. Os 3 auto-valores da matriz de derivadas são

$$\Lambda_2^{t(4cl)} = 1.914, \quad (18.21)$$

$$\Lambda_2^{2(4cl)} = 0.248, \quad (18.22)$$

$$\Lambda_2^{3(4cl)} = 0.137, \quad (18.23)$$

confirmando que, para  $h = 0$ , há apenas uma variável relevante. O expoente  $\nu$  obtido a partir de (18.21) é 0.937 ( $\nu = 1$  da solução de Onsager ou  $\Lambda_2^t = 2$ ). Na presença de um campo magnético, o expoente do gap  $\Delta$  também foi calculado nessa aproximação e obteve-se<sup>9</sup>

$$\Delta^{(4cl)} = 1.9519, \quad (18.24)$$

a ser comparado com o resultado exato  $\Delta = 15/8 = 1.875$ .

## XIX. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE OS FLUXOS DO GR

Através de exemplos resolvidos e de resultados numéricos, pudemos obter uma idéia geral sobre a natureza das transformações geradas pelo GR. Vamos agora tentar sistematizar o que nós já aprendemos.

Vimos que, de modo geral, uma transformação do GR gera um Hamiltoniano de forma arbitrária, contendo em princípio um número infinito de termos. O único requisito desses termos é que tenham uma natureza **local**, isto é, possam ser escrito como uma soma extensiva sobre  $\mathbf{x}$  (por todo o sistema) de termos que dependem apenas de uma vizinhança limitada do ponto  $\mathbf{x}$  (no caso Ising que tratamos, isso significava termos gerais com a forma de produtos de spins numa região compacta do espaço), e que não violem simetrias básicas do sistema. Assim, em princípio, **todos** os termos compatíveis com essas “regras” são gerados por uma transformação do GR. Mesmo que o Hamiltoniano inicial não contenha todos esses termos, algumas poucas iterações do GR acabarão por gerar rapidamente um número infinito desses termos. A iteração do GR pode então ser vista como uma **trajetória** nesse “espaço de Hamiltonianos”, cujos eixos são os vários coeficientes dos possíveis termos gerados. É útil escrever coletivamente  $\mathbf{K} \equiv (K_1, K_2, K_3, \dots)$ , onde os vários  $K_i$  são os coeficientes dos vários termos do Hamiltoniano (vamos usar  $K_2 = h$ , correspondente ao campo magnético). No caso do GR que definimos, em termos de um re-escalamento finito por uma contante fixa  $b$ , os pontos dessa trajetória são discretos  $\mathbf{K}(b^\ell) \equiv \mathbf{K}_\ell$ . Mas podemos imaginar que exista uma continuação analítica para um fluxo contínuo nesse espaço, caso em que teríamos uma trajetória contínua  $\mathbf{K}(b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Alternativamente, para  $b$  muito grande, a separação entre os pontos da trajetória é tão pequena em termos relativos que podemos fazer um tratamento contínuo. Falamos, portanto, do **fluxo do grupo de renormalização** como o conjunto de todas as trajetórias possíveis geradas pelo GR, a partir de todas as “condições iniciais” (ou seja, de todos os Hamiltonianos iniciais) possíveis.

Depois de um número infinito de iterações, geralmente tende-se a um ponto fixo  $\mathbf{K}(b \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbf{K}^*$ . A possibilidade de haver ciclos limites ou comportamento caótico parece não se realizar, embora haja alguns exemplos um pouco artificiais com esses comportamentos. Devemos sempre lembrar que a cada iteração  $\xi \rightarrow \xi' = \xi/b$ , ou seja, o comprimento de correlação diminui de um fator de  $b$ . Assim, o ponto fixo corresponde a  $\xi^* = \xi^*/b$ , cujas únicas soluções são  $\xi = 0$  ou  $\xi = \infty$ . O primeiro caso corresponderá a uma fase termodinâmica estável do sistema com comprimento de correlação finito, enquanto o segundo caso corresponde a um ponto crítico, como já vimos.

Se começarmos a iterar o GR para um Hamiltoniano inicial que difere ligeiramente de um ponto fixo  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^* + \delta\mathbf{K}$ , há duas possibilidades: ou a trajetória levará o Hamiltoniano de volta ao ponto fixo ou ela irá se afastar cada vez mais do ponto fixo, indo terminar em um outro ponto fixo. Assim, podemos caracterizar os pontos fixos como instáveis ou estáveis em relação a pequenos desvios a partir dele. Na verdade, pode haver direções estáveis e direções instáveis nas proximidades dos pontos fixos. A situação lembra em vários aspectos a análise de estabilidade de pontos de equilíbrio de potenciais na Mecânica. Mais precisamente a situação corresponde a uma dinâmica puramente dissipativa, descrita por um sistema de equações dinâmicas do tipo

$$\frac{dK_1}{d\ell} = \beta_1(\mathbf{K}), \quad (19.1)$$

$$\frac{dK_2}{d\ell} = \beta_2(\mathbf{K}), \quad (19.2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots, \quad (19.3)$$

em que podemos encarar a variável  $\ell = \ln b$ , como uma variável “temporal” da dinâmica.

Vimos anteriormente que podemos analisar o fluxo do GR linearizando as equações de transformação em torno de um ponto fixo. Suponhamos que

$$K'_1 = f_1(\mathbf{K}), \quad (19.4)$$

$$K'_2 = f_2(\mathbf{K}), \quad (19.5)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots, \quad (19.6)$$

e vamos linearizar em torno de  $\mathbf{K}^*$ . Escrevendo  $K_i = K_i^* + \delta K_i$  e  $K'_i = K_i^* + \delta K'_i$

$$\delta K'_i = f_i(\mathbf{K}^* + \delta \mathbf{K}) - f_i(\mathbf{K}^*) = \sum_j \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{K})}{\partial K_j} \right|_{\mathbf{K}^*} \delta K_j = \sum_j M_{ij} \delta K_j. \quad (19.7)$$

De modo geral, a iteração “mistura” os vários coeficientes. É interessante tentar “diagonalizar” a matriz de derivadas  $M_{ij}$ . Entretanto, como  $M_{ij}$  não é, de maneira geral, uma matriz simétrica, não há garantias de que a matriz seja diagonalizável, ou seja, que haja uma transformação linear ortogonal que traga a matriz para uma forma diagonal. Portanto, precisaremos distinguir, no caso genérico, entre auto-vetores à direita e à esquerda (vamos supor que os auto-valores sejam reais). Sejam  $\mathbf{e}_D^i$  os autovetores à direita e  $\mathbf{e}_E^j$  os autovetores à esquerda e  $\Lambda_D^i$  e  $\Lambda_E^j$  seus respectivos auto-valores tais que

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_D^i = \Lambda_D^i \mathbf{e}_D^i, \quad (19.8)$$

$$\mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{M} = \Lambda_E^j \mathbf{e}_E^j, \quad (19.9)$$

em notação matricial usual. Tomando a transposta da Eq. (19.9) temos

$$\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{e}_E^j = \Lambda_E^j \mathbf{e}_E^j. \quad (19.10)$$

Comparando as equações seculares correspondentes a (19.8) e (19.10) e lembrando que o determinante de uma matriz é o mesmo que o de sua transposta, segue que os auto-valores à esquerda são os mesmos que os à direita  $\Lambda_D^i = \Lambda_E^i \equiv \Lambda^i$ , embora os auto-vetores correspondentes possam diferir. Entretanto, podemos generalizar a ortogonalidade entre auto-vetores correspondentes a auto-valores diferentes. Tomando o produto escalar pela esquerda de  $\mathbf{e}_E^j$  com a Eq. (19.8) e pela direita de  $\mathbf{e}_D^i$  com a Eq. (19.9) obtemos

$$\mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_D^i = \Lambda^i \mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{e}_D^i, \quad (19.11)$$

$$\mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_D^i = \Lambda^j \mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{e}_D^i. \quad (19.12)$$

Subtraindo (19.12) de (19.11)

$$(\Lambda^i - \Lambda^j) \mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{e}_D^i = 0, \quad (19.13)$$

donde vemos que  $\mathbf{e}_E^j \cdot \mathbf{e}_D^i = 0$  se  $i \neq j$ . Logo, podemos escrever

$$\delta \mathbf{K} = \sum_i h_i \mathbf{e}_D^i, \quad (19.14)$$

$$h_i = \mathbf{e}_E^i \cdot \delta \mathbf{K}, \quad (19.15)$$

e analogamente para  $\delta \mathbf{K}'$ , tal que

$$\sum_i h'_i \mathbf{e}_D^i = \delta \mathbf{K}' = \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K} = \sum_i h_i \Lambda^i \mathbf{e}_D^i \Rightarrow h'_i = \Lambda^i h_i. \quad (19.16)$$

Já vimos que para uma transformação que envolve o parâmetro de re-escalamento  $b$ , a propriedade de semi-grupo do GR impõe que

$$\Lambda^i = b^{d_i} \Rightarrow h'_i = b^{d_i} h_i, \quad (19.17)$$

onde  $d_i$  é a **dimensão** do parâmetro  $h_i$ . O coeficiente  $h_i$  é chamado de campo de escala. Ele aparece como coeficiente de uma combinação linear de operadores obtida a partir de (19.14-19.15).

Os auto-vetores podem ser classificados segundo o sinal de suas dimensões:

## Fluxo típico do Grupo de Renormalização

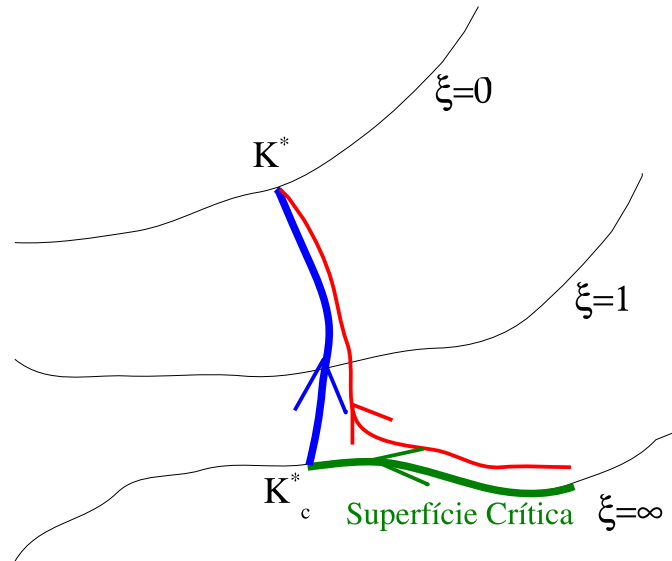


Figura 8: Representação esquemática do fluxo do grupo de renormalização. Existem nesse caso dois pontos fixos: um trivial ( $\xi = 0$ ) em  $K^*$  e um ponto fixo crítico  $K_c^*$  com  $\xi = \infty$ . Pontos na superfície crítica (verde) são todos levados ao ponto fixo  $K_c^*$  e têm  $\xi = \infty$ . A direção azul que leva de  $K_c^*$  a  $K^*$  representa uma direção relevante na vizinhança de  $K_c^*$ . A trajetória em vermelho representa um sistema ligeiramente não-crítico. O transiente permanece por muitas iterações próximo à superfície crítica e é governado por  $K_c^*$  mas acaba por finalmente se desviar em direção a  $K^*$ .

1. Se  $d_i > 0$ , o auto-vetor é chamado de **relevante**. Nesse caso,  $|\Lambda^i| > 1$  e o campo de escala correspondente cresce sob a iteração do GR.
2. Se  $d_i < 0$ , o auto-vetor é chamado de **irrelevante**. Nesse caso,  $|\Lambda^i| < 1$  e o campo de escala decresce sob o fluxo do GR.
3. O caso  $d_i = 0$ , implica que em ordem linear o campo correspondente não muda sob o fluxo do GR. O operador é chamado de **marginal**.

É importante lembrar que a classificação em termos de relevância diz respeito à vizinhança de um ponto fixo dado. Um mesmo operador pode ser relevante num ponto fixo e irrelevante em outro. Depois de várias iterações, se permanecermos na região linear, o efeito dos operadores irrelevantes desaparece e os operadores relevantes se tornarão dominantes. Se os coeficientes iniciais dos operadores relevantes forem diferentes de zero, o fluxo se distanciará do ponto fixo. Caso esses coeficientes sejam zero (e não haja operadores marginais), o fluxo trará o Hamiltoniano de volta ao ponto fixo. O número de auto-valores relevantes de um ponto fixo é chamado de sua **codimensão**. Uma das propriedades mais importantes dos pontos fixos de várias teorias, como a classe de universalidade de Ising, é que a codimensão dos pontos fixos críticos é um número finito pequeno (2 no caso Ising).

As direções correspondentes aos campos de escala irrelevantes de um ponto fixo crítico geram a chamada **superfície crítica**. Todos os pontos da superfície crítica são levados ao ponto fixo crítico. Segue que todos os Hamiltonianos na superfície crítica têm  $\xi = \infty$ . Se o sistema começar o fluxo muito próximo da superfície crítica, ou seja, se os campos de escala relevantes forem pequenos, o fluxo se desenrolará próximo à superfície crítica por um longo “tempo” (ou seja, por muitas iterações) e o fluxo será durante esse transiente indistinguível de um fluxo na superfície crítica. Ao final, os campos de escala relevantes crescerão o suficiente para que o fluxo se distancie significativamente da superfície crítica e se desvie do ponto fixo crítico (ver figura 8). Nesse caso, dizemos que o fluxo é governado pelo ponto fixo crítico, pois vimos na Seção XVIII que todos os expoentes da região crítica correspondente a esse ponto fixo são obtidos a partir das dimensões dos operadores relevantes.

Pontos fixos completamente estáveis, ou seja, que não têm direções relevantes representam fases termodinâmicas do sistema. Todos os Hamiltonianos na sua vizinhança são levados a ele e estão na mesma fase do sistema. O conjunto de todos os pontos no espaço de Hamiltonianos que são levados a um ponto fixo é chamado de sua **bacia de atração**.

Já vimos que a classe de universalidade de Ising apresenta 2 operadores relevantes, um associado à temperatura reduzida  $t$  e outro associado ao campo magnético  $h$ . Fisicamente, precisamos ajustar 2 parâmetros externos, a temperatura e o campo

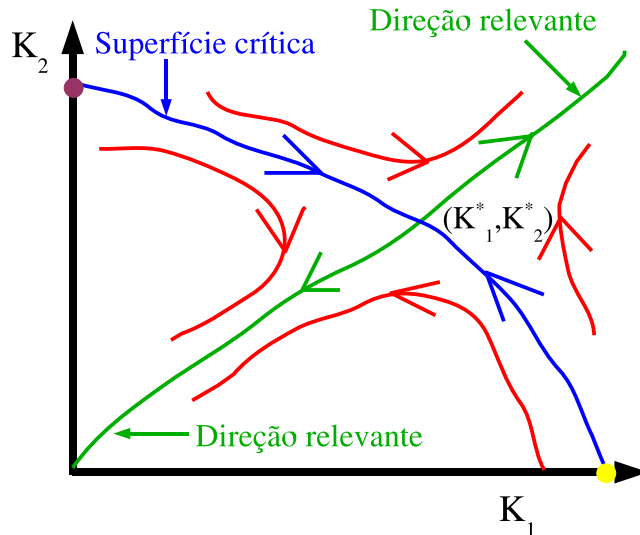


Figura 9: Corte no espaço de parâmetros de um Hamiltoniano geral no plano  $K_1, K_2$  (acoplamentos entre primeiros e segundos vizinhos, respectivamente). O ponto fixo crítico  $(K_1^*, K_2^*)$  é a interseção entre a superfície crítica (curva azul, direção irrelevante) e a direção relevante (curva verde). As linhas vermelhas representam fluxos quaisquer. Todos os pontos na curva azul são atraídos para o ponto crítico. Os outros pontos estão na bacia de atração dos pontos fixos de alta temperatura (fase paramagnética)  $K_1 = K_2 = 0$  e de baixa temperatura  $K_1 = K_2 = \infty$  (fase ferromagnética). A bolinha amarela marca o ponto crítico do modelo de Ising com interação entre primeiros vizinhos apenas, em que  $K_2 = 0$  e a bolinha vinho marca o ponto crítico do modelo de Ising com interação entre segundos vizinhos apenas, onde  $K_1 = 0$ .

magnético para colocarmos o sistema no ponto crítico. Sistemas diferentes corresponderão a Hamiltonianos iniciais diferentes. Se todos pertencerem à mesma classe de universalidade e forem ajustados aos seus pontos críticos respectivos, eles corresponderão a pontos diferentes na superfície crítica. Pequenos desvios do ponto crítico serão governados por um mesmo ponto fixo e, portanto, terão os mesmos expoentes críticos. Essa é a origem do fenômeno da universalidade.

Pontos tri-críticos (como no problema da lista) são caracterizados pela presença de 3 direções relevantes, pois é necessário ajustar 3 parâmetros externos para atingirmos o ponto crítico.

Vimos na Seção XVIII que o ponto fixo crítico do modelo de Ising bi-dimensional é caracterizado por vários operadores  $K_i^*$ . Podemos exemplificar melhor as considerações acima se fizermos um corte no plano  $(K_1, K_2)$ , onde  $K_1$  e  $K_2$  correspondem a acoplamentos entre primeiros e segundos vizinhos. Nesse caso, o ponto fixo crítico corresponde a  $K_1^*$  e  $K_2^*$  (ver figura 9). A superfície crítica é a linha azul da figura. Todos os pontos nessa linha estão na bacia de atração do ponto fixo crítico. A linha verde representa a direção relevante, que leva aos pontos fixos estáveis de alta e baixa temperaturas ( $K_1 = K_2 = 0$  e  $K_1 = K_2 = \infty$ , respectivamente). Existe uma outra direção relevante, ao longo do eixo  $h$ , que sai do plano da figura. O ponto representado pela bolinha amarela, com  $K_2 = 0$  representa o modelo de Ising com interação entre primeiros vizinhos apenas, no seu ponto crítico. Já o ponto em vinho, com  $K_1 = 0$  representa o modelo de Ising com interação entre segundos vizinhos apenas, também no seu ponto crítico. Apesar de serem modelos diferentes, ambos tem o mesmo comportamento crítico, governado pelo mesmo ponto fixo crítico  $(K_1^*, K_2^*)$ , assim como todos os modelos com ambos os acoplamentos no Hamiltoniano original pertencentes à linha azul da figura. Eis aí o fenômeno da universalidade e sua tradução em termos do fluxo do grupo de renormalização.

Vamos agora descrever o fluxo global do GR para o modelo de Ising bi-dimensional no plano  $(K_1 \equiv K, h)$ . Ele pode ser obtido em primeira ordem em teoria de perturbação a partir das equações de transformação da Seção XVII adicionadas do resultado para a transformação do campo magnético em primeira ordem, que pode ser obtido a partir da Ref. 11, a saber

$$h' = 3 \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \left( 1 + \frac{16Ke^{2K}}{(e^{3K} + 3e^{-K})^2} \right) h. \quad (19.18)$$

Além do ponto fixo crítico em  $C = (K^* \approx 0.34, h^* = 0)$ , obtemos os pontos fixos paramagnético  $P = (K_P^* = 0, h^* = 0)$  e ferromagnético  $F = (K_F^* = \infty, h^* = 0)$ . A análise que fizemos esclareceu a estrutura do fluxo na vizinhança do ponto fixo crítico, que é instável em relação a quaisquer perturbações no plano  $(K, h)$ . Os pontos fixos estáveis  $P$  e  $F$  são estáveis na direção  $h = 0$ , mas instáveis quanto a desvios de  $h$  em relação a zero. A estrutura global está mostrada na figura 10.

A estrutura do fluxo nas proximidades dos pontos  $P$  e  $F$  pode ser analisada por linearização das Eqs. de transformação (17.23)

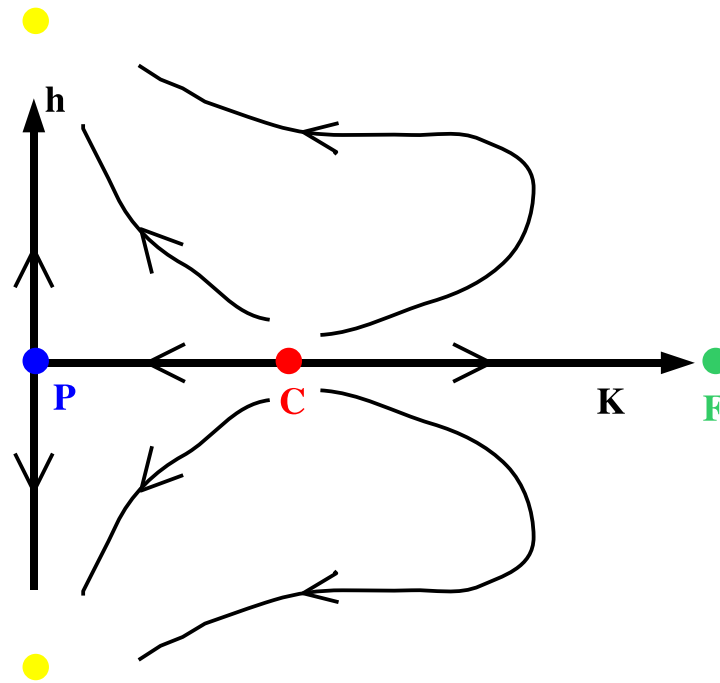


Figura 10: Fluxo do grupo de renormalização para o modelo de Ising bidimensional no plano  $(K, h)$ , onde  $K = \beta J$  é o acoplamento entre primeiros vizinhos e  $h$  é o campo magnético aplicado. O ponto fixo crítico  $C = (K^*, h = 0)$  (ponto vermelho) é completamente instável no plano. Os pontos fixos paramagnético  $P = (K_P^* = 0, h^* = 0)$  (ponto azul) e ferromagnético  $F = (K_F^* = \infty, h^* = 0)$  (ponto verde) são estáveis na linha  $h = 0$  mas instáveis com respeito a um campo magnético não nulo. Nesse caso, o fluxo leva o sistema aos pontos fixos em amarelo.

e (19.18). Obtemos que em  $P$

$$\Lambda_P^t = 0.5, \quad (19.19)$$

$$\Lambda_P^h = 1.5, \quad (19.20)$$

enquanto que em  $F$

$$\Lambda_F^t = 2, \quad (19.21)$$

$$\Lambda_F^h = 3. \quad (19.22)$$

Devemos notar que a direção  $K$  (temperatura) é irrelevante nos dois pontos fixos, apesar de  $\Lambda_F^t > 1$ , como mostrado na figura 10. Isso porque, no caso singular de  $F$ ,  $K_F^* = \infty$  e um auto-valor maior que 1 implica que os desvios em relação a  $K_F^* = \infty$ , ou seja, valores finitos de  $K$ , tendem a crescer sob o GR e, portanto, a se aproximar de  $K_F^* = \infty$ . Além disso, os auto-valores do campo magnético são ambos maiores que 1, apontando a relevância das perturbações em relação a  $h = 0$ .

A linha  $h = 0$  para  $K > K^*$  corresponde à linha de coexistência entre as fases ferromagnéticas com magnetizações invertidas uma em relação à outra. Já vimos que essa é uma linha de transições de primeira ordem. Nesse caso, uma análise geral mostra que, em torno do ponto fixo correspondente ( $F$  no caso),  $\Lambda^h = b^d$ , como mostraremos a seguir. Consideremos a maneira como a magnetização por spin do sistema se transforma sob o GR

$$m(\mathbf{h}) = - \left. \frac{\partial f(\mathbf{h})}{\partial h} \right|_{h=0^+} \quad (19.23)$$

$$= -b^{-d} \left. \frac{\partial f(\mathbf{h}')}{\partial h} \right|_{h=0^+} \quad (19.24)$$

$$= -b^{-d} \left. \frac{\partial h'}{\partial h} \frac{\partial f(\mathbf{h}')}{\partial h'} \right|_{h'=0^+} \quad (19.25)$$

$$= \frac{\Lambda_b(\mathbf{h})}{b^d} m(\mathbf{h}'), \quad (19.26)$$

onde

$$\Lambda_b(\mathbf{h}) = \left. \frac{\partial h'}{\partial h} \right|_{h=0^+}, \quad (19.27)$$

e escrevemos as quantidades físicas em termos do campos de escala, denotados coletivamente por  $\mathbf{h}$ . Iterando  $\ell$  vezes o GR

$$m(\mathbf{h}) = \prod_{i=0}^{\ell} \left[ \frac{\Lambda_b(\mathbf{h}^{(i)})}{b^d} \right] m(\mathbf{h}^{(\ell+1)}). \quad (19.28)$$

Tomando  $\ell \rightarrow \infty$ , alcançamos o ponto fixo em cuja bacia de atração encontra-se o sistema examinado. Suponhamos que esse ponto fixo seja o ponto  $F$ , de tal forma que o sistema esteja em seu estado ferromagnético com quebra espontânea de simetria ( $T < T_c, h = 0$ ). Nesse caso,  $m(\mathbf{h}^{(\infty)}) = 1$  e

$$m(\mathbf{h}) = \prod_{i=0}^{\ell} \left[ \frac{\Lambda_b(\mathbf{h}^{(i)})}{b^d} \right] \neq 0. \quad (19.29)$$

Para que o produtório acima seja finito deve-se ter

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_b(\mathbf{h}^{(i)})}{b^d} = 1 \Rightarrow \Lambda_b(\mathbf{h}^{(\infty)}) = \Lambda_{bF}^h = b^d, \quad (19.30)$$

em conformidade com a Eq. (19.22). É interessante notar que, de maneira geral, pode-se mostrar que  $d_i \leq d$ , de tal forma que o auto-valor acima, característico de linhas de transição de fase de primeira ordem, satura a desigualdade. Além disso, a fórmula (19.29) pode ser usada ao longo da trajetória para calcular a magnetização espontânea do sistema.

## XX. GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DO MODELO GAUSSIANO

Nosso objetivo agora é definir o grupo de renormalização no espaço  $\mathbf{k}$ , que nos permitirá posteriormente obter a expansão em  $\epsilon$ . Como problema preliminar mais simples faremos a análise do modelo gaussiano, que é um modelo não-interagente, com  $n$  componentes. Ele corresponde, como já vimos, ao modelo de Landau com  $u = 0$

$$L = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) (r - \nabla^2) \phi_i(\mathbf{x}) - h_i \phi_i(\mathbf{x}) \right], \quad (20.1)$$

onde a soma sobre os componentes  $i = 1, 2, \dots, n$  será mantida implícita. No espaço  $\mathbf{k}$ , a ação fica

$$L = \int_0^\Lambda \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r + k^2) |\phi_i(\mathbf{k})|^2 - h_i \phi_i(\mathbf{0}) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \right], \quad (20.2)$$

onde introduzimos a notação

$$\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \equiv \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(|\mathbf{k}| - \Lambda_1) \Theta(\Lambda_2 - |\mathbf{k}|), \quad (20.3)$$

e tomamos o “cutoff” ultravioleta em  $\mathbf{k}$  como sendo  $\Lambda$ . A soma parcial do GR consistirá em somar sobre os modos  $\mathbf{k}$  tais que  $\Lambda/b < |\mathbf{k}| < \Lambda$ , com  $b > 1$ . Vamos então separar os modos de spins de acordo com o valor de seus vetores de onda e re-definir

$$\tilde{\phi}_i(\mathbf{k}) = \phi_i(\mathbf{k}), \quad \text{para } \frac{\Lambda}{b} < |\mathbf{k}| < \Lambda, \quad (20.4)$$

mantendo a nomenclatura inalterada para os modos com  $|\mathbf{k}| < \Lambda/b$ . A ação pode ser separada em dois termos envolvendo variáveis “rápidas” ( $\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})$ ) e “lentas” ( $\phi_i(\mathbf{k})$ )

$$L = L_{0l} + L_{0r}, \quad (20.5)$$

$$L_{0l} = \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r + k^2) |\phi_i(\mathbf{k})|^2 - h_i \phi_i(\mathbf{0}) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \right], \quad (20.6)$$

$$L_{0r} = \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r + k^2) |\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})|^2 \right]. \quad (20.7)$$

O primeiro passo do GR consiste em integrar sobre os modos rápidos

$$Z(r, h) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-(L_{0l} + L_{0r})} \quad (20.8)$$

$$= \int \prod_{0 < |\mathbf{k}| < \Lambda/b} d\phi_i(\mathbf{k}) e^{-L_{0l}} \prod_{\Lambda/b < |\mathbf{k}| < \Lambda} d\tilde{\phi}_i(\mathbf{k}) e^{-L_{0r}} \quad (20.9)$$

$$= Z_r(r) \int \prod_{0 < |\mathbf{k}| < \Lambda/b} d\phi_i(\mathbf{k}) e^{-L_{0l}}, \quad (20.10)$$

onde

$$Z_r(r) = \exp \left\{ -\frac{n}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln(r + k^2) \right\}. \quad (20.11)$$

A contribuição de  $Z_r$  é de apenas uma constante para a energia livre, que sempre existe, como já vimos anteriormente. Vamos ignorá-la. A nova ação é então a ação da Eq. (20.6). Agora, re-definimos as distâncias ou, equivalentemente, os vetores de onda

$$\mathbf{k}' = b\mathbf{k}, \quad (20.12)$$

de tal forma que o cutoff original é recuperado

$$L_{0l} = \int_0^{\Lambda} \frac{b^{-d} d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r + b^{-2} k'^2) |\phi_i(b^{-1} \mathbf{k}')|^2 - h_i \phi_i(\mathbf{0}) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \right]. \quad (20.13)$$

Finalmente, re-escalamos o spin de forma a preservar a forma do termo do Laplaciano

$$\phi_i(b^{-1} \mathbf{k}') \equiv z \phi'_i(\mathbf{k}'). \quad (20.14)$$

A escolha que preservará o coeficiente do gradiente é

$$z = b^{1+d/2}. \quad (20.15)$$

Ao final, a ação renormalizada será

$$L' = \int_0^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (z^2 b^{-d} r + k'^2) |\phi'_i(\mathbf{k}')|^2 - z h_i \phi'_i(\mathbf{0}) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \right] \quad (20.16)$$

$$= \int_0^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r' + k'^2) |\phi'_i(\mathbf{k}')|^2 - h'_i \phi'_i(\mathbf{0}) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \right]. \quad (20.17)$$

A ação gaussiana preserva sua forma sob o GR. Os valores renormalizados de seus parâmetros são

$$r' = z^2 b^{-d} r = b^2 r, \quad (20.18)$$

$$h' = z h = b^{1+d/2} h, \quad (20.19)$$

e os expoentes correspondentes são

$$d_r = 2, \quad (20.20)$$

$$d_h = 1 + \frac{d}{2}. \quad (20.21)$$

Vemos assim que ambos os termos são relevantes em relação ao ponto fixo  $r = 0$  e  $h = 0$ , que corresponde ao ponto crítico, cuja ação é

$$L_{crit} = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) (-\nabla^2) \phi_i(\mathbf{x}) \right]. \quad (20.22)$$

Na verdade, a ação (20.22) descreve o ponto crítico para  $d > 4$ , pois nesse caso o termo de interação entre as flutuações pode ser desprezado, como indica o critério de Ginzburg. Existe um outro ponto fixo em  $r = \infty$  e  $h$  qualquer. Esse ponto fixo é estável (a Eq. (20.18) garante que qualquer  $r$  finito tende a crescer) e  $h$  pode ser qualquer porque o valor infinito de  $r$  faz com que o termo em  $h$  (e o termo do Laplaciano) seja(m) irrelevante(s). Nesse ponto fixo, a ação fica

$$L_{para} = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{r}{2} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right], \quad (20.23)$$

e representa uma fase paramagnética ( $T \rightarrow \infty$ ), pois o valor do campo num ponto não depende do valor em outro ponto vizinho.

## XXI. EXPOENTES GAUSSIANOS E OPERADORES PERIGOSAMENTE IRRELEVANTES

Os valores de  $d_r = d_t$  e de  $d_h$  podem ser usados para obter os vários expoentes críticos, *assumindo que a forma de escala usual da energia livre e da função de correlação de dois pontos seja válida*. Obtemos

$$\nu = \frac{1}{d_t} = \frac{1}{2}, \quad (21.1)$$

$$\Delta = \frac{d_h}{d_t} = \frac{2+d}{4}, \quad (21.2)$$

$$\alpha = 2 - d\nu = 2 - \frac{d}{2}, \quad (21.3)$$

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta = \frac{d-2}{4}, \quad (21.4)$$

$$\gamma = \Delta - \beta = 1, \quad (21.5)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\beta} = \frac{d+2}{d-2}, \quad (21.6)$$

$$\eta = 2 - \frac{\gamma}{\nu} = 0. \quad (21.7)$$

Quando devemos esperar que o comportamento crítico seja dado pela teoria gaussiana? Nossa análise da Seção X sugere que a teoria de Landau descreva o comportamento crítico acima da dimensão crítica superior  $d_{uc} = 4$ , pois vimos que a influência das flutuações é desprezível na região crítica se  $d > 4$  (critério de Ginzburg). A análise dos expoentes obtidos assumindo a teoria de Landau mais flutuações gaussianas nos dá todos os expoentes de campo médio usuais, exceto  $\alpha = 2 - d/2$  (ver Seção X, especialmente a Eq. (10.10)). Ou seja, as flutuações não modificam os expoentes de campo médio, exceto talvez  $\alpha$ . Na verdade, nem mesmo  $\alpha$  é modificado, já que em  $d = 4$ , obtemos  $\alpha = 0$ , que é o expoente de campo médio usual, enquanto que se  $d > 4$ , a contribuição das flutuações gaussianas dá  $\alpha < 0$ . Como  $\alpha < 0$  indica um comportamento *menos singular* do calor específico, em relação ao valor da teoria de Landau pura ( $\alpha = 0$ ), a contribuição das flutuações gaussianas é sub-dominante e, portanto, desprezível. Portanto, deveríamos esperar obter, para o comportamento crítico acima da dimensão 4, todos os expoentes de campo médio. Comparando agora os expoentes de campo médio, com os expoentes da teoria gaussiana, observamos que, embora os expoentes  $\nu$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  sejam iguais, os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  apenas concordam com os valores de campo médio ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$  e  $\delta = 3$ ) em  $d = d_{uc} = 4$ , mas dão valores incorretos para  $d > 4$ . Isso sugere que a teoria gaussiana pode nos dar o comportamento correto acima de  $d = 4$ , desde que possamos explicar a discrepância em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ .

Por que a teoria gaussiana pode descrever o comportamento crítico acima de  $d = 4$ ? Vamos relembrar o resultado da Seção XIII, Eq. (13.18), que nos diz que à medida que  $t \rightarrow 0$ , o termo quártico efetivo

$$g \propto t^{(d-4)/2} u \rightarrow 0 \text{ se } d > 4. \quad (21.8)$$

Isso é confirmado pela análise do termo quártico sob o GR. Com efeito, devemos fazer no termo quártico as mesmas transformações feitas acima, ou seja, re-escalar distâncias  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/b$  (ou  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = b\mathbf{k}$ ) e o campo

$$\phi_i(b^{-1}\mathbf{k}') \equiv b^{1+d/2}\phi'_i(\mathbf{k}'), \quad (21.9)$$

$$\phi_i(b\mathbf{x}') \equiv b^{1-d/2}\phi'_i(\mathbf{x}'), \quad (21.10)$$

onde o fator multiplicativo do campo expresso no espaço real é diferente daquele do campo no espaço  $\mathbf{k}$ , refletindo o fator de  $d^d\mathbf{x}$  (ou  $d^d\mathbf{k}$ ) que relaciona um e outro. Assim

$$\int d^d\mathbf{x} \frac{u}{4} [\phi_i^2(\mathbf{x})]^2 \rightarrow \int b^d d^d\mathbf{x}' \frac{u}{4} b^{4-2d} [\phi_i'^2(\mathbf{x}')]^2 = b^{4-d} \int d^d\mathbf{x}' \frac{u}{4} [\phi_i'^2(\mathbf{x}')]^2, \quad (21.11)$$

$$\Rightarrow u' = b^{4-d}u. \quad (21.12)$$

Isso mostra que

$$d_u = 4 - d < 0 \text{ se } d > 4. \quad (21.13)$$

O termo quártico é realmente **irrelevante** se  $d > 4$  e a teoria gaussiana deveria dar o comportamento crítico em dimensões superiores a 4.

O que há de errado no cálculo dos expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ? A teoria de escala derivada do fluxo do GR demonstrada na Seção XVIII nos mostra como lidar com a presença de operadores irrelevantes. Vamos particularizar aquela análise para o caso aqui tratado,

em que assumiremos que o termo quártico é o único termo irrelevante. Tomando  $b = b_0 t^{-1/d_t}$

$$f(t, h, u) = \frac{t^{d/d_t}}{b_0^d} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}, b_0^{d_u} u t^{|d_u|/d_t}\right). \quad (21.14)$$

Usualmente, simplesmente assumimos que a função  $f(t, h, u)$  é finita em  $f(t, h, 0)$  e assim temos a equação de escala na sua forma habitual. Entretanto, pode acontecer de a função  $f(t, h, u)$  ser singular quando  $u \rightarrow 0$ . Vamos supor que, quando  $u \rightarrow 0$ ,

$$f(t, h, u) \rightarrow \frac{g(t, h)}{u^\mu}, \quad (21.15)$$

onde  $\mu > 0$ . Nesse caso, não podemos simplesmente ignorar a presença do operador irrelevante. No limite em que  $t \rightarrow 0$ , a Eq. (21.14) nos dá

$$f(t, h, u) = \frac{t^{d/d_t}}{b_0^d} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}, b_0^{d_u} u t^{|d_u|/d_t}\right) \rightarrow \frac{t^{d/d_t} g\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}\right)}{b_0^d b_0^{d_u \mu} u^\mu t^{|d_u| \mu / d_t}} = t^{d/d_t - |d_u| \mu / d_t} \Phi\left(\frac{h}{t^{d_h/d_t}}\right), \quad (21.16)$$

que é uma forma modificada da relação de escala usual. Usando que  $d_t = 2$  e  $|d_u| = d - 4$  para  $d > 4$ , obtemos

$$2 - \alpha = \frac{d - \mu |d_u|}{d_t} = \frac{d - \mu(d - 4)}{2}. \quad (21.17)$$

Assim, vemos que o valor do expoente  $\alpha$  é radicalmente modificado se a energia livre for uma função singular do parâmetro irrelevante. Dizemos, nesse caso, que  $u$  é uma **variável perigosamente irrelevante**.

Devemos nos perguntar, portanto, se essa dependência singular realmente ocorre e se ela leva a que os expoentes críticos do modelo gaussiano concordem com a teoria de campo de Landau para  $d > 4$ . A resposta é sim e a razão é a seguinte. A primeira dica sobre o que acontece vem de percebermos que os expoentes  $\beta$  e  $\delta$  só são definidos no estado ordenado, para  $T < T_c$ . Consideremos agora a teoria de Landau no estado ordenado. Sabemos que, nesse caso, a equação de estado é dada pela Eq. (9.4) da Seção IX

$$r\phi_0 + u\phi_0^3 = h, \quad (21.18)$$

e a densidade de energia livre é então obtida a partir do valor de  $\phi_0$  acima e da Eq. (9.9)

$$f(r, h, u) = \frac{r}{2}\phi_0^2 + \frac{u}{4}\phi_0^4 - h\phi_0, \quad (21.19)$$

onde devemos lembrar que  $r \propto t < 0$ . Escrevendo

$$\phi_0 \equiv \left(-\frac{r}{u}\right)^{1/2} \bar{\phi}_0 \equiv \left(\frac{h}{u}\right)^{1/3} \tilde{\phi}_0, \quad (21.20)$$

e levando em (21.18) obtemos

$$\bar{\phi}_0^3 - \bar{\phi}_0 = \frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}}, \quad (21.21)$$

$$\tilde{\phi}_0^3 - \left(\frac{|r|^{3/2}}{u^{1/2} h}\right)^{2/3} \tilde{\phi}_0 = 1, \quad (21.22)$$

donde deduzimos que ambos os parâmetros re-escalados  $\bar{\phi}_0$  e  $\tilde{\phi}_0$  são funções apenas da razão  $u^{1/2} h / |r|^{3/2}$

$$\phi_0 = \left(\frac{|r|}{u}\right)^{1/2} \bar{\phi}_0 \left(\frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}}\right) = \left(\frac{h}{u}\right)^{1/3} \tilde{\phi}_0 \left(\frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}}\right). \quad (21.23)$$

Levando agora esse resultado na Eq. (21.19), obtemos

$$f(r, h, u) = -\frac{|r|}{2} \frac{|r|}{u} \bar{\phi}_0^2 + \frac{u}{4} \frac{|r|^2}{u^2} \bar{\phi}_0^4 - h \left(\frac{|r|}{u}\right)^{1/2} \bar{\phi}_0, \quad (21.24)$$

$$= \frac{|r|^2}{u} \left[ -\frac{1}{2} \bar{\phi}_0^2 + \frac{1}{4} \bar{\phi}_0^4 - \frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}} \bar{\phi}_0 \right] \quad (21.25)$$

$$= \frac{|r|^2}{u} F\left(\frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}}\right) = \left(\frac{h^4}{u}\right)^{1/3} \tilde{F}\left(\frac{u^{1/2} h}{|r|^{3/2}}\right). \quad (21.26)$$

A Eq. (21.26) mostra que a dependência com o parâmetro  $u$  é uma dependência singular, embora ligeiramente mais complicada que a da Eq. (21.15). Fisicamente, o que acontece é que o parâmetro  $u$  é essencial para manter a estabilidade da teoria de Landau quando  $r < 0$  e ele não pode ser simplesmente posto igual a zero. Usando agora o re-escalamento dos parâmetros da teoria, temos (fazendo  $r \propto t$ )

$$f(t, h, u) = \frac{t^{d/d_t}}{b_0^d} f\left(b_0^{d_t}, b_0^{d_h} \frac{h}{t^{d_h/d_t}}, b_0^{d_u} u t^{|d_u|/d_t}\right) \quad (21.27)$$

$$= \frac{b_0^{2d_t - d - d_u} t^{(d - |d_u|)/d_t}}{u} F\left(\frac{b_0^{(d_u + 2d_h - 3d_t)/2} u^{1/2} h}{t^{(d_h - |d_u|/2)/d_t}}\right). \quad (21.28)$$

$$\equiv t^{2-\alpha} \Phi'\left(\frac{h}{t^\Delta}\right). \quad (21.29)$$

Dessa expressão, identificamos imediatamente (lembrando que  $d_h = 1 + d/2$ )

$$\alpha = 2 - \frac{d - |d_u|}{d_t} = 0, \quad (21.30)$$

$$\Delta = \frac{2d_h - |d_u|}{2d_t} = \frac{3}{2}. \quad (21.31)$$

Além disso, refazendo a análise da Seção XII, obtemos também

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta = \frac{1}{2}, \quad (21.32)$$

$$\gamma = \Delta - \beta = 1, \quad (21.33)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\beta} = 3, \quad (21.34)$$

que concordam perfeitamente com os expoentes de campo médio. A análise da função de correlação também fornece

$$\nu = \frac{1}{d_t} = \frac{1}{2}, \quad (21.35)$$

$$\eta = 2 - \frac{\gamma}{\nu} = 0. \quad (21.36)$$

Portanto, levando em conta a dependência singular da densidade de energia livre com o parâmetro irrelevante  $u$ , obtemos os todos os expoentes corretamente, justificando assim a descrição gaussiana acima da dimensão crítica superior 4. A análise acima mostra que o GR não resolve completamente o problema. Às vezes é necessário obter mais informações sobre a física do sistema antes de deduzirmos todo o comportamento crítico através do GR.

## XXII. GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DO MODELO DE LANDAU E EXPANSÃO EM $\epsilon$

A análise das Seções XX e XXI mostrou que o termo quártico é irrelevante acima e relevante abaixo de 4 dimensões. Assim, a introdução da perturbação quártica no modelo gaussiano é inócua para  $d > 4$  mas introduz uma direção relevante no espaço de Hamiltonianos para  $d < 4$ . Como a dimensão 4 é a dimensão limítrofe, isso sugere que, *se pudermos fazer uma continuação analítica na dimensionalidade*, ao cruzarmos  $d = 4$  algo bastante drástico deve ocorrer. Por outro lado, se houver uma dependência contínua com a dimensionalidade, pode-se imaginar que a teoria em, digamos,  $d = 3.99$  dimensões seja razoavelmente controlável ou, pelo menos, mais controlável que em  $d = 3$ . Essa é a idéia por trás da expansão em  $\epsilon \equiv 4 - d$ . Existe assim uma esperança de que, ao obtermos as quantidades relevantes, como por exemplo os expoentes críticos, como uma série de potências em  $\epsilon$ , talvez a extrapolação  $\epsilon \rightarrow 1$  seja capaz de fornecer resultados bons para  $d = 3$ . Realmente, como vamos ver mais adiante, logo abaixo de  $d = 4$ , o ponto fixo crítico gaussiano se desdobra em 2 novos pontos fixos, um gaussiano com codimensão 3 (e, portanto, incapaz de descrever o ponto crítico procurado) e um outro não-gaussiano com a codimensão correta 2. Esse último, chamado de ponto fixo de Wilson-Fisher, permanece arbitrariamente próximo do gaussiano para  $\epsilon$  pequeno

$$r^* \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad (22.1)$$

$$u^* \sim \mathcal{O}(\epsilon). \quad (22.2)$$

Logo, uma análise perturbativa em  $u$  pode ser feita nas proximidades desse ponto fixo. Essa é a estratégia que iremos seguir. A expansão em  $\epsilon$  e a descoberta desse ponto fixo não-trivial foi feita por K. G. Wilson e M. E. Fisher na Ref. 13.

Os passos que devemos seguir são essencialmente os mesmos usados no caso gaussiano, exceto que, na presença do termo quártico e em vista do exposto acima, iremos prosseguir em teoria de perturbação em  $u$ . Assim, o hamiltoniano original é

$$L = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) (r - \nabla^2) \phi_i(\mathbf{x}) + \frac{u}{4} [\phi_i^2(\mathbf{x})]^2 \right], \quad (22.3)$$

onde omitiremos o campo magnético inicialmente, por simplicidade. No espaço  $\mathbf{k}$ , a ação fica  $L = L_0 + L_1$ , onde  $L_0$  é o mesmo da Eq. (20.2), enquanto que

$$L_1 = \frac{u}{4} \int_0^\Lambda \prod_{m=1}^4 \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \phi_i(\mathbf{k}_1) \phi_i(\mathbf{k}_2) \phi_j(\mathbf{k}_3) \phi_j(\mathbf{k}_4). \quad (22.4)$$

Note a estrutura dos sub-índices  $i, j$ . Devemos agora separar os modos lentos  $\phi_i(\mathbf{k})$ , com  $|\mathbf{k}| < \Lambda$ , dos modos rápidos  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})$  pertencentes à “casca de momentos”  $\Lambda/b < |\mathbf{k}| < \Lambda$ , com  $b > 1$ . Na parte quadrática, há um completo desacoplamento entre esses dois tipos de modos, como já foi mostrado na Seção XX, Eqs. (20.5-20.7). A parte quártica (Eq. (22.4)), entretanto, gera acoplamentos entre os modos. Logo, podemos escrever

$$L[\phi_i, \tilde{\phi}_i] = L_{0l}[\phi_i] + L_{0r}[\tilde{\phi}_i] + L_1[\phi_i, \tilde{\phi}_i], \quad (22.5)$$

$$Z(r, u) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-(L_{0l} + L_{0r} + L_1)} \quad (22.6)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{-L_{0l}} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-L_{0r}} e^{-L_1} \quad (22.7)$$

$$= Z_r(r) \int \mathcal{D}\phi e^{-L_{0l}} \langle e^{-L_1} \rangle_{\tilde{\phi}}, \quad (22.8)$$

onde usamos a definição da Eq. (20.11) e

$$\langle O \rangle_{\tilde{\phi}} \equiv \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-L_{0r}} O}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-L_{0r}}} = \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-L_{0r}} O}{Z_r(r)}, \quad (22.9)$$

Como antes, vamos simplesmente ignorar a contribuição de  $Z_r(r)$ , que é apenas uma constante não-singular. Note a similaridade com a formulação da Seção XVII, Eqs. (17.8-17.9). O objetivo agora é calcular (perturbativamente) o traço parcial da Eq. (22.8), re-escalar os momentos como na Eq. (22.48) de forma a recuperar o “cutoff”  $\Lambda$ , re-escalar os campos como na Eq. (22.49) para manter invariante o termo do Laplaciano e “ler” na ação final a expressão dos parâmetros renormalizados.

Vamos definir

$$e^{-\Delta L[\phi_i]} \equiv \langle e^{-L_1[\phi_i, \tilde{\phi}_i]} \rangle_{\tilde{\phi}}. \quad (22.10)$$

Para separarmos em  $L_1[\phi_i, \tilde{\phi}_i]$  os modos lentos e rápidos, devemos fazer a substituição

$$\int_0^\Lambda \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} \phi_i(\mathbf{k}_m) \longrightarrow \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} \phi_i(\mathbf{k}_m) + \int_{\Lambda/b}^\Lambda \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_i(\mathbf{k}_m) \quad (22.11)$$

nas quatro integrações da Eq. (22.4). A ação  $\Delta L$ , pode ser obtida através da chamada **expansão em cumulantes**

$$-\Delta L = \ln \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \langle (-L_1[\phi_i, \tilde{\phi}_i])^p \rangle_{\tilde{\phi}} \right\} \quad (22.12)$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \langle L_1^p[\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}}^c, \quad (22.13)$$

onde o super-escrito  $c$  denota um cumulante. Os primeiros cumulantes (os únicos que calcularemos aqui) podem ser obtidos facilmente da expansão do logaritmo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4). \quad (22.14)$$

Obtém-se

$$\langle L_1 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}}^c = \langle L_1 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}} \quad (22.15)$$

$$\langle L_1^2 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}}^c = \langle L_1^2 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}} - \langle L_1 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}}^2, \quad (22.16)$$

donde

$$\Delta L = \langle L_1 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}} - \frac{1}{2} \left\{ \langle L_1^2 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}} - \langle L_1 [\phi_i, \tilde{\phi}_i] \rangle_{\tilde{\phi}}^2 \right\} + \mathcal{O}(u^2). \quad (22.17)$$

(Observação: O cumulante de ordem geral, pode ser obtido iterando-se e invertendo-se as expressões

$$\langle M^p \rangle = \sum_P \prod_{\alpha} \langle M^{n_{\alpha}} \rangle^c, \quad (22.18)$$

onde  $\sum_P$  é uma soma sobre todas as partições de  $M^p$  em fatores  $M^{n_{\alpha}}$  tais que  $\sum_{\alpha} n_{\alpha} = p$ . Por exemplo,

$$\langle M \rangle = \langle M \rangle^c, \quad (22.19)$$

$$\langle M^2 \rangle = \langle M^2 \rangle^c + \langle M \rangle^c \langle M \rangle^c = \langle M^2 \rangle^c + \langle M \rangle^2, \quad (22.20)$$

$$\langle M^3 \rangle = \langle M^3 \rangle^c + 3 \langle M \rangle^c \langle M^2 \rangle^c + \langle M \rangle^3 \quad (22.21)$$

$$= \langle M^3 \rangle^c + 3 \langle M \rangle \langle M^2 \rangle - 2 \langle M \rangle^3, \quad (22.22)$$

etc.)

Veremos que, para um cálculo de ordem  $\epsilon$  dos expoentes, os cumulantes da Eq. (22.17) serão suficientes. A substituição (22.11) na Eq. (22.4) gerará todas as combinações de ordem quártica possíveis, que podemos descrever esquematicamente como

$$\phi\phi\phi\phi, \quad \tilde{\phi}\phi\phi\phi, \quad \tilde{\phi}\tilde{\phi}\phi\phi, \quad \tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}\phi, \quad \tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}. \quad (22.23)$$

O cálculo do traço desses produtos de operadores é enormemente facilitado pelo teorema de Wick. Note que o traço é feito sobre os campos  $\tilde{\phi}$  (ver Eq. (22.9)) onde

$$L_{0r} [\tilde{\phi}_i] = \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (r + k^2) |\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})|^2 \right]. \quad (22.24)$$

O teorema de Wick nos dá a prescrição para o cálculo de

$$\left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \tilde{\phi}_{i_3}(\mathbf{k}_3) \tilde{\phi}_{i_4}(\mathbf{k}_4) \dots \tilde{\phi}_{i_N}(\mathbf{k}_N) \right\rangle_{\tilde{\phi}}. \quad (22.25)$$

Primeiramente, devemos obter o valor para  $N = 2$ , chamado de uma “contração” entre dois operadores,

$$\left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \right\rangle_{\tilde{\phi}} = \delta_{i_1 i_2} \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{(2\pi)^d}{r + k_1^2} \equiv \delta_{i_1 i_2} \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) (2\pi)^d G^{(0)}(\mathbf{k}_1). \quad (22.26)$$

A partir desse resultado, podemos escrever o resultado para qualquer  $N$ : o traço em (22.25) é nulo se  $N$  é ímpar e, se  $N$  é par, é igual à soma sobre os produtos de todas as contrações possíveis de pares de operadores de (22.25). Por exemplo

$$\left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \tilde{\phi}_{i_3}(\mathbf{k}_3) \tilde{\phi}_{i_4}(\mathbf{k}_4) \right\rangle_{\tilde{\phi}} = \left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \left\langle \tilde{\phi}_{i_3}(\mathbf{k}_3) \tilde{\phi}_{i_4}(\mathbf{k}_4) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \quad (22.27)$$

$$+ \left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_3}(\mathbf{k}_3) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \left\langle \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \tilde{\phi}_{i_4}(\mathbf{k}_4) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \quad (22.28)$$

$$+ \left\langle \tilde{\phi}_{i_1}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_{i_4}(\mathbf{k}_4) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \left\langle \tilde{\phi}_{i_2}(\mathbf{k}_2) \tilde{\phi}_{i_3}(\mathbf{k}_3) \right\rangle_{\tilde{\phi}}. \quad (22.29)$$

A prova do teorema de Wick pode ser obtida a partir das expressões (11.6) e (11.8) da Seção XI, que podem ser re-escritas no nosso contexto aqui como

$$\left\langle \exp \left[ \int d\mathbf{x} j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right] \right\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) G^{(0)-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x} j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) G^{(0)-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \right]}, \quad (22.30)$$

$$= \exp \left[ \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} j(\mathbf{x}) G^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) j(\mathbf{y}) \right]. \quad (22.31)$$

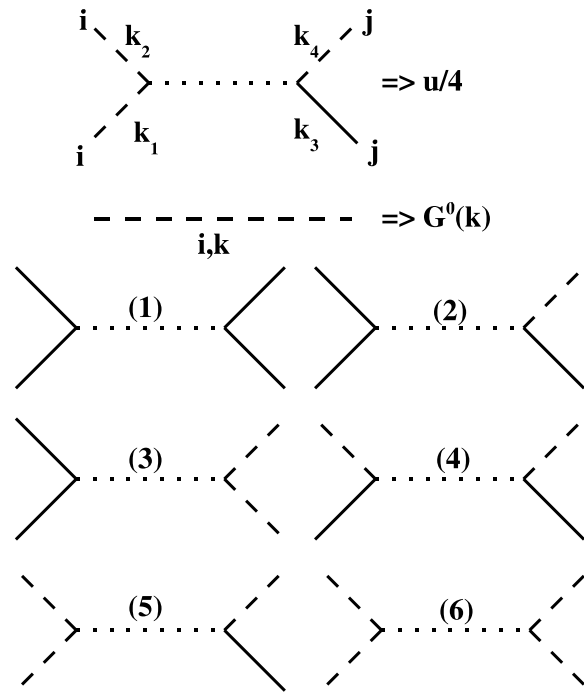


Figura 11: Representação esquemática dos elementos dos diagramas de Feynman para a expansão perturbativa em  $u$ . Cada linha pontilhada representa um termo quártico. A ele deve-se associar um fator de  $u/4$ . A soma total dos momentos  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$  e os sub-índices se conservam nos extremos da linha pontilhada. Cada linha contínua representa um operador “lento”  $\phi_i(\mathbf{k})$  e cada linha tracejada uma contração de operadores “rápidos”  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})$ , cujo valor é  $(2\pi)^d G^{(0)}(\mathbf{k})$ . Todas as combinações de linhas contínuas e tracejadas são possíveis para cada termo de interação, como exemplificado na figura (numeradas de 1 a 6) e na Eq. (22.23).

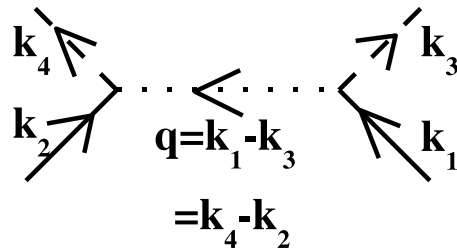


Figura 12: Representação esquemática da conservação de “momentos” em uma linha de interação. A diferença entre os momentos final e inicial em uma extremidade ( $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ ) é “transferida” para a outra extremidade ( $\mathbf{q} = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2$ ).

Expandindo as exponenciais dos dois lados da expressão acima e igualando os coeficientes das potências de  $j(\mathbf{x})$ , obtemos o teorema de Wick.

O teorema de Wick aplicado ao cálculo dos traços que aparecem na expansão em cumulantes da Eq. (22.17) pode ser posto em forma diagramática de maneira simples. Associamos linhas contínuas aos campos não traçados  $\phi_i(\mathbf{k})$ , linhas tracejadas às contrações de campos rápidos  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{k})$  e cada termo quártico (22.4) será denotado por uma linha pontilhada. Cada extremo da linha pontilhada tem uma linha chegando e outra saindo, ambas com o mesmo sub-índice de componente, ver a Eq. (22.4) e a figura 11. Cada uma das 4 linhas que se ligam às extremidades das linhas pontilhadas de interação quártica pode ser contínua ou tracejada. Todas as possibilidades são mostradas na figura 11. A cada linha, contínua ou tracejada, associamos um vetor de onda (“momento”)  $\mathbf{k}$  e os momentos são conservados nas interações:  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$  (ver figura 12). Isso é facilitado associando-se direções e momentos às linhas pontilhadas de tal forma que a diferença entre os momentos das linhas de uma extremidade ( $\mathbf{q}$ ) seja “transferida” à outra extremidade, ver figura 12.

Vamos exemplificar esses diagramas com o cálculo do cumulante de primeira ordem, Eq. (22.15). Devido ao teorema de Wick, os termos  $\tilde{\phi}\phi\phi\phi$  e  $\tilde{\phi}\tilde{\phi}\phi\phi$  não contribuem, pois têm um número ímpar de termos a serem contraídos. A contração de

termos em  $\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}$  nos dá uma constante, que temos desprezado todo o tempo. O termo  $\phi\phi\phi\phi$  não tem nenhum campo rápido e seu valor esperado é igual a ele próprio. Ele dará origem ao termo quártico habitual entre os campos lentos, só que com o cutoff diminuído

$$\frac{u}{4} \int_0^{\Lambda/b} \prod_{m=1}^4 \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \phi_i(\mathbf{k}_1) \phi_i(\mathbf{k}_2) \phi_j(\mathbf{k}_3) \phi_j(\mathbf{k}_4). \quad (22.32)$$

As únicas contribuições não triviais virão dos termos com dois campos lentos e dois rápidos dos tipos (recuperando os sub-índices)  $\tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_i \phi_j \phi_j$  e  $\tilde{\phi}_i \phi_i \tilde{\phi}_j \phi_j$ . Após as contrações, eles darão origem a termos *quadráticos* nos campos lentos

$$\left\langle \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_i \phi_j \phi_j \right\rangle_{\tilde{\phi}} \propto \phi_j \phi_j, \quad (22.33)$$

$$\left\langle \tilde{\phi}_i \phi_i \tilde{\phi}_j \phi_j \right\rangle_{\tilde{\phi}} \propto \phi_j \phi_j, \quad (22.34)$$

que por sua vez irão modificar o termo quadrático da ação original. Assim, por exemplo, o termo

$$\frac{u}{4} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \int_0^{\Lambda/b} \prod_{m=1}^3 \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} \left\langle \tilde{\phi}_i(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}_i(\mathbf{k}_2) \phi_j(\mathbf{k}_3) \phi_j(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right\rangle_{\tilde{\phi}} \quad (22.35)$$

dá origem a

$$n \frac{u}{4} \left[ \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\mathbf{k}) \right] \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} |\phi_j(\mathbf{k})|^2. \quad (22.36)$$

O fator de  $n$  vem da soma sobre  $i$ . Existem 2 termos como esse, vindos da contração dos  $\tilde{\phi}_i$  e dos  $\tilde{\phi}_j$ , portanto devemos multiplicar a expressão (22.36) por um fator de 2

$$n \frac{u}{2} \left[ \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\mathbf{k}) \right] \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} |\phi_j(\mathbf{k})|^2. \quad (22.37)$$

Analogamente, podemos contrair um  $\tilde{\phi}_i$  com um  $\tilde{\phi}_j$  e teremos um termo

$$4 \times \frac{u}{4} \left[ \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\mathbf{k}) \right] \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} |\phi_j(\mathbf{k})|^2, \quad (22.38)$$

onde o fator de  $n$  está ausente e devemos multiplicá-lo por um fator de 4, pois há 4 maneiras diferentes de contrair um  $\tilde{\phi}_i$  com um  $\tilde{\phi}_j$ . Assim, a contribuição total para o termo quadrático é

$$\int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{\Delta r^{(1)}}{2} |\phi_j(\mathbf{k})|^2, \quad (22.39)$$

onde

$$\Delta r^{(1)} = (n+2) u \left[ \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\mathbf{k}) \right], \quad (22.40)$$

que representa uma adição ao parâmetro  $r$  em primeira ordem em  $u$ . A representação diagramática dos dois termos, Eqs. (22.37) e (22.38) é mostrada na figura 13. Diagramaticamente, cada laço (“loop”) de linha tracejada dá origem a um fator de  $n$ .

Em primeira ordem, apenas o parâmetro  $r$  é afetado. Entretanto, a fim de acharmos o ponto fixo não-trivial, é necessário prosseguir e calcular o cumulante de segunda ordem em  $u$ . Os diagramas agora possuirão duas linhas pontilhadas, correspondendo a duas inserções do termo quártico. Vamos usar o fato de que, no cálculo de **cumulantes**, não devemos incluir diagramas desconectados, ou seja, aqueles formados por partes desconectadas entre si, um teorema conhecido como “linked cluster theorem”. Assim, podemos encontrar todos os diagramas conectados de segunda ordem combinando duas linhas pontilhadas de interação quártica de todos os 6 tipos mostrados na figura 11 através de contrações de linhas tracejadas. O número de diagramas agora é consideravelmente maior.

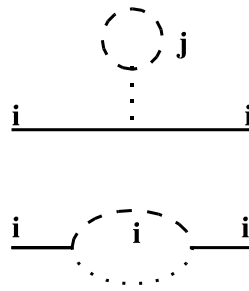


Figura 13: Representação diagramática dos dois termos que contribuem para o cumulante de primeira ordem, Eqs. (22.37) e (22.38), respectivamente. Note que o primeiro termo escala com um fator de  $n$ , que vem do laço (“loop”) tracejado.

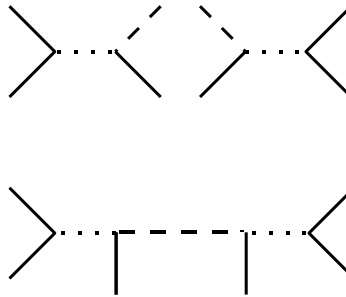


Figura 14: Diagrama conectado de segunda ordem gerado por uma interação do tipo 2 com outra interação do mesmo tipo (ver figura 11).

Uma interação do tipo 1 (ver figura 11) não pode ser conectada com nenhuma outra interação de forma a gerar um diagrama conectado. Uma interação do tipo 2, com apenas uma “perna” tracejada, só pode ser combinada com uma interação com um número ímpar de “pernas”, como é o caso das interações do tipo 2 ou 5 (teorema de Wick). Na figura 14, mostramos o único diagrama do tipo 2-2 e na figura 15 os 2 diagramas 2-5. O diagrama da figura 14 tem 6 “pernas” contínuas e representa um termo de ordem 6, envolvendo o produto de 6 campos “lentos”, ausente na ação inicial mas gerado pelo GR em segunda ordem em teoria de perturbação em  $u$ . Pode-se mostrar que esse termo é irrelevante nos pontos fixos de interesse e só afeta a posição desses em  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , por isso vamos ignorá-lo. Os 2 diagramas da figura 15 têm 4 “pernas” contínuas e são uma correção ao termo quártico, proporcional a  $u^2$ . Entretanto, eles são identicamente nulos. Isso porque, devido à conservação de momentos nas linhas pontilhadas, a linha contínua externa da direita tem o mesmo momento que a linha tracejada horizontal interna com sub-índice  $i$ . Como a primeira deve ter  $|\mathbf{k}| < \Lambda/b$  (modo “lento”) e a outra deve ter  $\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda/b$  (modo “rápido”), segue que o valor dos diagramas é zero.

Prosseguindo, podemos combinar interações do tipo 3 com interações do tipo 3, 4 e 6. Há um diagrama do tipo 3-3 (figura 16), um do tipo 3-4 (figura 17) e dois do tipo 3-6 (figura 18). Os diagramas 3-3 e 3-4 renormalizam o termo quártico e farão parte da contribuição mais importante, como veremos. Os diagramas 3-6 renormalizam o termo quadrático em segunda ordem em  $u$ . Eles não contribuem nem para a determinação do ponto fixo não trivial nem para os expoentes críticos em ordem  $\epsilon$  (lembre-se que mostraremos que  $u^* \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ ), por isso iremos ignorá-los.

Diagramas conectados adicionais são gerados pela combinação de interações do tipo 4 com interações do tipo 4 ou 6. O diagrama do tipo 4-4 é mostrado na figura 19, enquanto que os dois diagramas do tipo 4-6 são mostrados na figura 20. O primeiro renormaliza o termo quártico e é importante. Para os outros dois valem as considerações feitas a respeito dos diagramas do tipo 3-6.

Finalmente, restam os diagramas gerados a partir da combinação das linhas de interação do tipo 5 com outra linha de interação do mesmo tipo. Quatro diagramas conectados diferentes são gerados (figura 21). Todos eles contribuiriam para a renormalização do termo quadrático em segunda ordem em  $u$ . Entretanto, a consideração da conservação de momentos nos mesmos moldes que aquela feita a respeito dos diagramas da figura 15 leva à conclusão de que esses diagramas também se anulam.

Esses são todos os diagramas em  $\mathcal{O}(u^2)$ . Resumindo, os diagramas não-nulos que contribuem para o cumulante de segunda ordem são: (i) um diagrama do tipo 2-2 para a interação sêxtupla, que é irrelevante nos pontos fixos gaussianos e de Wilson-Fisher; (ii) um diagrama do tipo 3-3, um diagrama do tipo 3-4 e um diagrama do tipo 4-4 para o termo quártico e (iii) um diagrama do tipo 3-6 e um diagrama do tipo 4-6 para o termo quadrático, mas que não contribuem para o cálculo em  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Passemos agora para o cálculo dos diagramas do item (ii) acima.

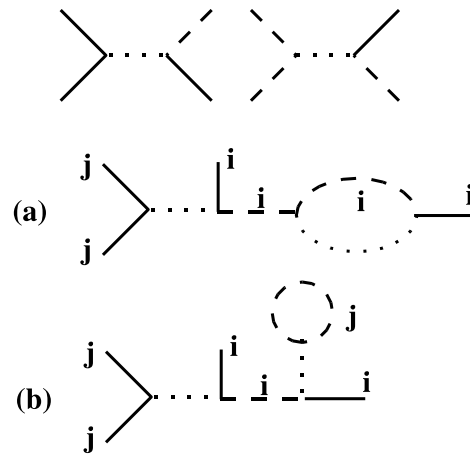


Figura 15: Diagramas conectados de segunda ordem gerados por uma interação do tipo 2 com uma interação do tipo 5 (ver figura 11).

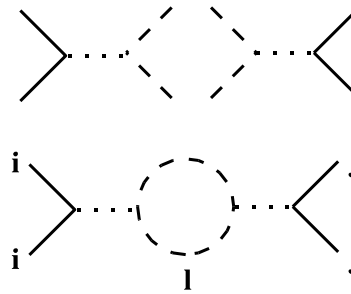


Figura 16: Diagrama conectado de segunda ordem gerado por uma interação do tipo 3 com outra interação do mesmo tipo (ver figura 11).

O diagrama da figura 16 tem um laço e é de ordem  $n$ . Além disso, levando em conta que há 2 tipos de interações do tipo 3 (tomando como linhas tracejadas aquelas que saem de uma ou outra extremidade da linha pontilhada) e que para cada par de contrações de linhas tracejadas há duas maneiras de fazê-las, são geradas  $2 \times 2 \times 2 = 8$  combinações, e o diagrama tem um fator multiplicativo de  $8n$ . Seu valor numérico é

$$\Gamma_{33}^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) = \left(\frac{u}{4}\right)^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\mathbf{p}) G^{(0)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3), \quad (22.41)$$

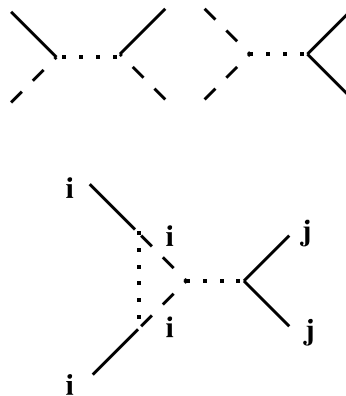


Figura 17: Diagrama conectado de segunda ordem gerado por uma interação do tipo 3 com uma interação do tipo 4 (ver figura 11).

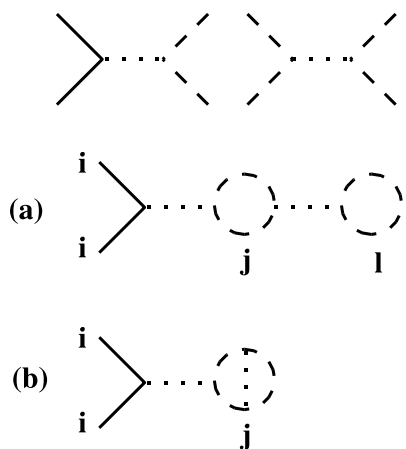


Figura 18: Diagramas conectados de segunda ordem gerados por uma interação do tipo 3 com uma interação do tipo 6 (ver figura 11).

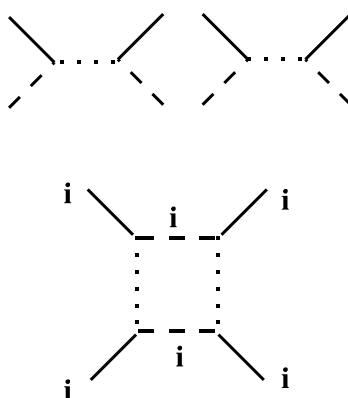


Figura 19: Diagrama conectado de segunda ordem gerado por uma interação do tipo 4 com outra interação do mesmo tipo (ver figura 11).

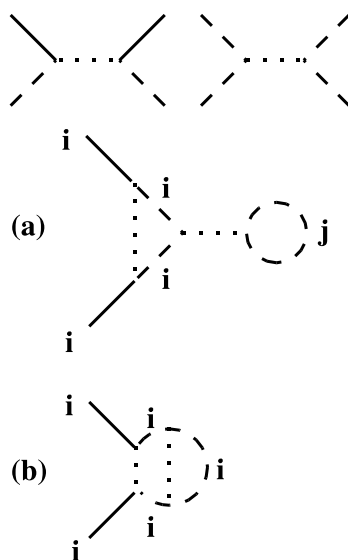


Figura 20: Diagramas conectados de segunda ordem gerados por uma interação do tipo 4 com uma interação do tipo 6 (ver figura 11).

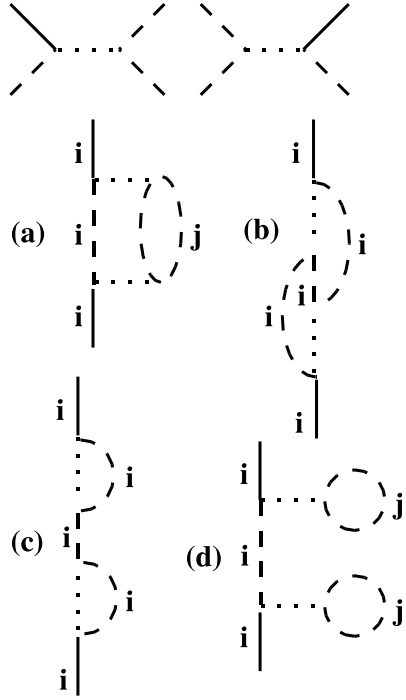


Figura 21: Diagramas conectados de segunda ordem gerado por uma interação do tipo 5 com outra interação do mesmo tipo (ver figura 11).

onde  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$  é o momento transferido na interação, como definido na figura 12. O termo acima nos dá uma interação quártica “não-local” por causa da dependência com os momentos externos  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_3$ . Entretanto, essa dependência é *irrelevante* nos pontos fixos de interesse, como pode ser mostrado *a posteriori*. Por isso, vamos ignorar essa dependência e fazer  $\mathbf{q} = 0$

$$\Gamma_{33}^{(2)} \approx \left(\frac{u}{4}\right)^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} [G^{(0)}(\mathbf{p})]^2 = \left(\frac{u}{4}\right)^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r + |\mathbf{p}|^2)^2}. \quad (22.42)$$

Analogamente, o diagrama da figura 17 envolve uma interação do tipo 3 com outra do tipo 4. Esse diagrama não contém nenhum laço de linhas tracejadas e por isso escala com  $n^0$ . Enquanto existem 2 tipos de interações do tipo 3 é fácil ver que existem 4 tipos de interações do tipo 4 (correspondendo às 4 escolhas diferentes com uma linha tracejada em cada extremo da linha pontilhada). Levando em conta que cada contração de 2 linhas tracejadas de uma interação com 2 linhas tracejadas da outra interação pode ser feita de 2 maneiras diferentes e que existe uma contribuição em que a linha de interação da direita é do tipo 3 e a da esquerda do tipo 4 e outra em que a da esquerda é do tipo 4 e a da direita do tipo 2, o fator multiplicativo será  $2 \times 4 \times 2 \times 2 = 32$ . O valor numérico do diagrama é o mesmo que o outro, Eq. (22.42), onde fazemos a mesma aproximação de desprezar a dependência com os momentos externos. Finalmente, o diagrama da figura 19 escala com  $n^0$  e tem fator multiplicativo  $4 \times 4 \times 2 = 32$ . Colecionando todas as contribuições (não esquecendo o termo  $-1/2$  da Eq. (22.17))

$$\frac{\Delta u^{(2)}}{4} = -\frac{1}{2} 8(n+8) \left(\frac{u}{4}\right)^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r + |\mathbf{p}|^2)^2} = -\frac{u^2}{4} (n+8) \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r + |\mathbf{p}|^2)^2}, \quad (22.43)$$

$$\Delta u^{(2)} = -u^2 (n+8) \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r + |\mathbf{p}|^2)^2}. \quad (22.44)$$

Ao final, até a segunda ordem em teoria de perturbação, teremos uma nova ação renormalizada dada por

$$L' = L'_0 + L'_1, \quad (22.45)$$

$$L'_0 = \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{[r + \Delta r^{(1)} + \Delta r^{(2)} + k^2]}{2} |\phi_j(\mathbf{k})|^2, \quad (22.46)$$

$$L'_1 = \frac{[u + \Delta u^{(2)}]}{4} \int_0^{\Lambda/b} \prod_{m=1}^3 \frac{d^d \mathbf{k}_m}{(2\pi)^d} \phi_i(\mathbf{k}_1) \phi_i(\mathbf{k}_2) \phi_j(\mathbf{k}_3) \phi_j(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \quad (22.47)$$

Agora, re-definimos as distâncias ou, equivalentemente, os vetores de onda

$$\mathbf{k}' = b\mathbf{k} \Rightarrow d^d \mathbf{k} = b^{-d} d^d \mathbf{k}', \quad (22.48)$$

de tal forma que o cutoff original é recuperado e re-escalamos o spin de forma a preservar a forma do termo do Laplaciano

$$\phi_i(b^{-1} \mathbf{k}') \equiv z \phi'_i(\mathbf{k}'). \quad (22.49)$$

Como o termo do Laplaciano só é modificado em  $\mathcal{O}(u^2)$

$$z^2 b^{-d-2} [1 + \mathcal{O}(u^2)] = 1 \Rightarrow z = b^{1+d/2+\mathcal{O}(u^2)}. \quad (22.50)$$

Como  $u^* \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  podemos fazer  $z = b^{1+d/2}$  se quisermos calcular tudo até  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Usando esse valor de  $z$ , obtemos os parâmetros transformados

$$r' = b^{-d} z^2 [r + \Delta r^{(1)} + \Delta r^{(2)}] = b^2 [r + (n+2) I_1(r, d, b, \Lambda) u + \mathcal{O}(u^2)], \quad (22.51)$$

$$u' = b^{-3d} z^4 [u + \Delta u^{(2)}] = b^{4-d} u [1 - (n+8) I_2(r, d, b, \Lambda) u + \mathcal{O}(u^2)], \quad (22.52)$$

onde

$$I_{1,2}(r, d, b, \Lambda) = \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r + |\mathbf{p}|^2)^{1,2}}. \quad (22.53)$$

Vamos proceder sob a hipótese de que  $r^* \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  e  $u^* \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  e mostrar que os resultados assim obtidos são consistentes. Nesse caso, o ponto fixo não trivial é tal que

$$r^* = b^2 [r^* + (n+2) I_1(r^*, 4 - \epsilon, b, \Lambda) u^* + \mathcal{O}(u^{*2})], \quad (22.54)$$

$$u^* = b^\epsilon u^* [1 - (n+8) I_2(r^*, 4 - \epsilon, b, \Lambda) u^* + \mathcal{O}(u^{*2})], \quad (22.55)$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) r^* = -(n+2) I_1(r^*, 4 - \epsilon, b, \Lambda) u^* + \mathcal{O}(u^{*2}), \quad (22.56)$$

$$b^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \ln b + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 - (n+8) I_2(r^*, 4 - \epsilon, b, \Lambda) u^* + \mathcal{O}(u^{*2}). \quad (22.57)$$

É evidente que precisamos da integral da Eq. (22.53) para  $r = \epsilon = 0$  ( $m = 1, 2$ )

$$I_m(0, 4, b, \Lambda) = \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^4 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\mathbf{p}|^{2m}} \quad (22.58)$$

$$= \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{dp}{p^{2m-3}} = \begin{cases} \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right), & m = 1 \\ \frac{1}{8\pi^2} \ln b, & m = 2 \end{cases} \quad (22.59)$$

onde usamos que

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (22.60)$$

é a superfície da esfera em  $d$  dimensões, o que dá  $S_4 = 2\pi^2$ . Levando o resultado (22.59) nas Eqs. (22.56-22.57) encontramos o ponto fixo de Wilson-Fisher em ordem  $\epsilon$

$$u^* = \frac{8\pi^2}{n+8}\epsilon, \quad (22.61)$$

$$r^* = -\frac{n+2}{2(n+8)}\Lambda^2\epsilon, \quad (22.62)$$

que independe de  $b$  como esperado e confirma a hipótese de que ambos os valores são  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

Claramente, o ponto fixo gaussiano é também um ponto fixo da transformação (22.51-22.52). Calculando a matriz das derivadas no ponto fixo gaussiano

$$\begin{pmatrix} \delta r_g \\ \delta u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & (n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}(b^2-1) \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & b^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_g \\ \delta u_g \end{pmatrix}, \quad (22.63)$$

onde  $\delta r_g = r$  e  $\delta u_g = u$ . Os auto-valores são

$$\Lambda_1^g = b^2 \Rightarrow d_1^g = 2, \quad (22.64)$$

$$\Lambda_2^g = b^\epsilon \Rightarrow d_2^g = \epsilon, \quad (22.65)$$

ambos positivos. Portanto, ele é duplamente instável no plano  $(r, u)$ , enquanto que o ponto crítico corresponde a um ponto fixo instável apenas nas direções  $r$  e  $h$  (codimensão 2).

O cálculo análogo no ponto fixo de Wilson-Fisher nos dá

$$\left. \frac{\partial r'}{\partial r} \right|_{r^*, u^*} = b^2 [1 - (n+2)I_2(0, 4, b, \Lambda)u^* + \mathcal{O}(\epsilon^2)] = b^2 \left[ 1 - \frac{n+2}{n+8}(\ln b)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \approx b^{2-\frac{n+2}{n+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \quad (22.66)$$

$$\left. \frac{\partial r'}{\partial u} \right|_{r^*, u^*} = (n+2)b^2 I_1(0, 4, b, \Lambda) = (n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}(b^2-1) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (22.67)$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial r} \right|_{r^*, u^*} = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (22.68)$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial u} \right|_{r^*, u^*} = b^\epsilon [1 - 2(n+8)I_2(0, 4, b, \Lambda)u^* + \mathcal{O}(\epsilon^2)] = b^\epsilon [1 - 2\epsilon \ln b + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \approx b^{-\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)}. \quad (22.69)$$

O fluxo do GR no regime linear em torno do ponto fixo de Wilson-Fisher é dado por ( $\delta r_{WF} = r - r^*$  e  $\delta u_{WF} = u - u^*$ )

$$\begin{pmatrix} \delta r_{WF} \\ \delta u_{WF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{2-\frac{n+2}{n+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)} & (n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}(b^2-1) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & b^{-\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{WF} \\ \delta u_{WF} \end{pmatrix}. \quad (22.70)$$

Os auto-valores são

$$\Lambda_1^{WF} = b^{2-\frac{n+2}{n+8}\epsilon} \Rightarrow d_1^{WF} = 2 - \frac{n+2}{n+8}\epsilon, \quad (22.71)$$

$$\Lambda_2^{WF} = b^{-\epsilon} \Rightarrow d_2^{WF} = -\epsilon, \quad (22.72)$$

e o auto-vetor 2 é irrelevante! Mostramos assim, até ordem  $\epsilon$ , que o ponto fixo de Wilson-Fisher tem codimensão 2, como desejado. Os auto-vetores à direita podem também ser obtidos. O auto-vetor correspondente à direção relevante  $\Lambda_1$  é

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}(\epsilon^2) & (n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}(b^2-1) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & 1 - b^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1^{WF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{pmatrix}. \quad (22.73)$$

A direção irrelevante é

$$\begin{pmatrix} b^2 - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) & (n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}(b^2-1) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2^{WF} = \begin{pmatrix} -(n+2)\frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (22.74)$$

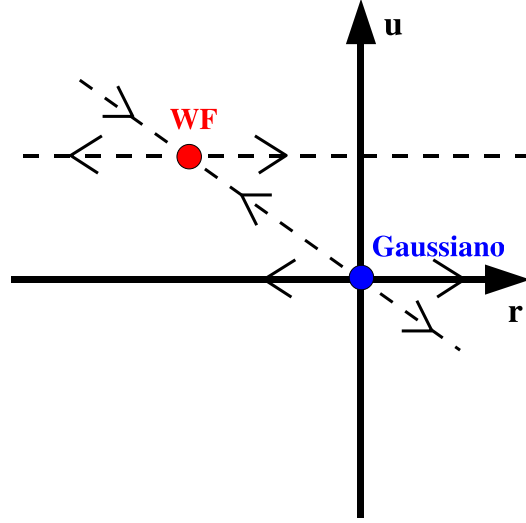


Figura 22: Fluxo global do grupo de renormalização mostrando os pontos fixos gaussianos (azul) e de Wilson-Fisher (vermelho), bem como as direções relevantes e irrelevantes a partir de cada um deles.

O cálculo análogo no ponto fixo gaussiano dá para as duas direções relevantes o mesmo resultado que o ponto fixo de Wilson-Fisher

$$\mathbf{v}_1^g = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2^g = \begin{pmatrix} -(n+2) \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (22.75)$$

Com isso, podemos desenhar o fluxo global do GR.

O auto-valor na direção do campo magnético  $h$  é dado em ordem mais baixa pelo mesmo resultado do ponto fixo gaussiano  $d_h = 1 + d/2 = 3 - \epsilon/2$ . Assim, obtemos

$$\nu = \frac{1}{d_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \epsilon \right], \quad (22.76)$$

$$\Delta = \frac{d_h}{d_1} = \frac{1}{2} \left[ 3 + \frac{n-1}{n+8} \epsilon \right], \quad (22.77)$$

$$\alpha = 2 - d\nu = \frac{4-n}{2(n+8)} \epsilon, \quad (22.78)$$

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)} \epsilon, \quad (22.79)$$

$$\gamma = \Delta - \beta = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \epsilon, \quad (22.80)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\beta} = 3 + \epsilon, \quad (22.81)$$

$$\eta = 2 - \frac{\gamma}{\nu} = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \epsilon^2. \quad (22.82)$$

O expoente  $\eta$  é  $\sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$  e sua obtenção requer um cálculo mais complexo, que não faremos aqui. A expansão em  $\epsilon$  já foi levada até  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  ( $\mathcal{O}(\epsilon^4)$  para  $\eta$ )<sup>14</sup>. A convergência é não-uniforme e provavelmente a série é apenas assintótica. Os resultados obtidos, bem como outros obtidos com técnicas alternativas são mostrados na Tabela III.

---

\* Electronic address: emiranda@ifi.unicamp.br

Expoente	$\mathcal{O}(\epsilon)[1]$	$\mathcal{O}(\epsilon^2)[1]$	$\mathcal{O}(\epsilon^3)[1]$	Padé-Borel	GR em $d = 3$	Expansão de altas temperaturas
$\gamma(n = 1)$	1.167	1.244	1.19	$1.235 \pm 0.004$	$1.241 \pm 0.002$	$1.245 \pm 0.003$
$\nu(n = 1)$	0.589	0.634	0.606	$0.628 \pm 0.02$	$0.630 \pm 0.0015$	$0.638 \pm 0.002$
$\eta(n = 1)$	0.019	0.037	0.029	$0.0333 \pm 0.0001$	$0.031 \pm 0.001$	$0.041 \pm 0.01$
$\gamma(n = 3)$	1.227	1.346	1.325			$1.375 \pm 0.020$
$\eta(n = 3)$	0.021	0.039	0.032			$0.043 \pm 0.014$

Tabela III: Expoentes críticos do modelo de Ising tri-dimensional. As 3 primeiras colunas dão o expoente na expansão em  $\epsilon$  em sucessivas ordens de aproximação ([1] O cálculo de  $\eta$  é sempre uma ordem superior ao indicado)<sup>14</sup>. A quarta coluna (Padé-Borel) dá o valor obtido através de técnicas de ressonância da série em todas as ordens<sup>15</sup>. A quinta coluna dá o cálculo em dimensão fixa  $d = 3$  em série perturbativa em  $u$ . A última coluna dá o valor obtido através de expansões de altas temperaturas<sup>14</sup>.

- <sup>1</sup> B. Widom, J. Chem. Phys. **43**, 3892 (1965).  
<sup>2</sup> B. Widom, J. Chem. Phys. **43**, 3898 (1965).  
<sup>3</sup> A. Z. Patashinskii and V. L. Pokrovskii, Sov. Phys. JETP **19**, 667 (1964).  
<sup>4</sup> L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).  
<sup>5</sup> D. R. Nelson and M. E. Fisher, Ann. Phys. (NY) **91**, 226 (1975).  
<sup>6</sup> K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).  
<sup>7</sup> M. Nauenberg and B. Nienhuis, Phys. Rev. Lett. **33**, 944 (1974).  
<sup>8</sup> M. Nauenberg and B. Nienhuis, Phys. Rev. Lett. **33**, 1598 (1974).  
<sup>9</sup> B. Nienhuis and M. Nauenberg, Phys. Rev. B **11** (1975).  
<sup>10</sup> T. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen, Phys. Rev. Lett. **31**, 1411 (1973).  
<sup>11</sup> T. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen, Physica **71**, 17 (1974).  
<sup>12</sup> T. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, London, 1976), vol. 6, chap. 7, p. 425.  
<sup>13</sup> K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).  
<sup>14</sup> E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, London, 1976), vol. 6, chap. 3, p. 125.  
<sup>15</sup> G. Parisi, J. Stat. Phys. **23**, 49 (1980).