Lista de exercícios I – esta é para entregar esta ;)

Modelos Matemáticos em Ecologia e Evolução
NE441 F 046

1. Um população de peixes atlânticos possui três classes muito bem definidas: peixes juvenis e peixes adultos pequenos e peixes adultos grandes. Estes peixes podem investir em crescimento somático (i.e, crescimento corporal) ou em reprodução. A biomassa dessas diferentes classes pode ser estudada ao longo do tempo. A biomassa de juvenis aumenta devido à reprodução de adultos pequenos e adultos grandes, e decresce devido à maturação dos indivíduos e a uma mortalidade constante. Adultos pequenos aumentam sua biomassa de acordo com a maturação de juvenis e devido ao próprio crescimento corporal. Adultos pequenos investem apenas uma parte de sua biomassa na reprodução. A outra parte é investida no crescimento dos indivíduos pequenos que ainda permanecem pequenos antes de atingir a maturidade. A maturação e a mortalidade são dois fatores que decrescem a biomassa de adultos pequenos. Indivíduos adultos grandes crescem em biomassa pela maturação de indivíduos adultos pequenos. O decrescimento da biomassa é devido ao investimento em reprodução a mortalidade e à mortalidade.

$$B_J(t+1) = (1-k_P)\nu_P B_P(t) + \nu_G B_G(t) + \nu_J B_J(t) - \gamma_J B_J(t) - d_J B_J(t) \tag{1}$$

$$B_P(t+1) = \gamma_J B_J(t) + k_P \nu_P B_P(t) - \gamma_P B_P(t) - (1-k_P)\nu_P B_P(t) - d_P B_P(t) \tag{2}$$

$$B_G(t+1) = \gamma_P B_P(t) - \nu_G B_G(t) - d_G B_G(t) \tag{3}$$

a) Interprete os parâmetros (constantes do modelo) dessa população de peixes de acordo com a descrição dada acima

b) Monte a matriz de transição dessa população

c) Interpetre o estado da população se os numéricos dos parâmetros desse modelo são: $\nu_J = 1.2, \nu_P = 1, \nu_G = 0.8, \gamma_J = 0.5, \gamma_P = 0.5, d_J = 0.3, d_P = 0.5, d_G = 0.035, k = 0.6$. Qual é a classe de maior importância neste estado?

d) Suponha que os indivíduos adultos pequenos estejam com falta de recursos e por isso invistam toda a sua energia no crescimento somático ao invés de reproduzir. Como isto altera a biomassa estável? E o que acontece com a população como um todo?

2. A ilha de Komodo na Malásia é povoada por grandes répteis carnívoros que se alimentam de de pequenos mamíferos que são herbívoros. Se assumimos que estes répteis gigantes não tem nenhum influência direta sobre a população de plantas e que as plantas competem entre si pelos recursos e nutrientes disponíveis no ambiente, o sistema de equações diferenciais que descreve esta situação pode ser dado por:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1(1 - bx_1 - cx_2) \tag{4}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -dx_2 + ex_1x_2 - fx_2x_3 \tag{5}$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -gx_3 + hx_2x_3 \tag{6}$$

Os parâmetros a, b, c, d, e, f, g, h são todos positivos. Com base neste modelo e em seus conhecimentos de interações ecológicas reais e teóricas, responda:

a) Quais populações as densidades x_1, x_2 e x_3 representam?

b) Explique o significado dos parâmetros a, b, c, d, e, f, g, h do modelo.

c) Sob quais condições ecológicas que o termo $b = 0$ pode ser considerado uma situação plausível?

d) Considere que existe um ponto de equilíbrio em que $x_1 = 0$. Explique biologicamente quais os valores de x_2 e x_3 que são esperados neste ponto equilíbrio (não faça contas aqui. Procure entender o que $x_1 = 0$ causa em x_2 e x_3.

e) Mostre em que condições o ponto de equilíbrio do item anterior (d) é um ponto de equilíbrio estável. DICA: use o traço da matriz jacobiana para estudar as condições dos parâmetros do modelo que tornam o ponto de equilíbrio acima referido um ponto estável.

f) Interprete biologicamente o que significa a condição dos parâmetros do item acima (e).

3. Suponha que em uma população de tamanho fixo N exista dois tipos de pessoas: pessoas gripadas (g(t)) e pessoas não gripadas (c(t)), de forma que podemos representar essa população da seguinte forma:

$$\frac{dg}{dt} = ac(t)g(t) \tag{7}$$
$$\frac{dc}{dt} = -ac(t)g(t) \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

Considere agora que as pessoas gripadas podem adquirir imunidade contra o vírus da gripe por algum tempo. Eventualmente indivíduos imunes perdem sua imunidade contra o vírus da gripo e podem ficar doentes novamente.

a) Inclua a classe de indivíduos imunes no sistema de equações da população acima

b) Calcule o número básico de reprodução dessa população, R_0, supondo que $a = 2.6$ e que a taxa que indivíduos adquirem imunidade é de 1.5 e que a perda de imunidade se dá a taxa de 1.2. Para fazer isso, lembre-se de considerar que R_0 é considerado o valor limiar a partir do qual o número de infectados em uma população é crescente ($\frac{dg}{dt}$) em uma população que se encontra toda susceptível no início da temporada.

c) A imunidade de rebanho ocorre quando uma certa proporção p da população (ou o rebanho) já foi vacinada ou está naturalmente imune, oferecendo proteção aos indivíduos não vacinados e não imunes. Essa proporção de indivíduos que oferece proteção aos demais (rebanho) corresponde à fração crítica p que as campanhas de vacinação buscam nas populações que conferem à população um valor crítico de R_0. Explique qual é o valor crítico de R_0 e porque. Dados os valores dados no item anterior, interprete a situação dessa população quanto à gripe que estão passando nessa temporada.

d) Calcule agora a proporção da população que deve estar imunizada para que a doença não tenha grandes chances de se espalhar. DICA: Use $R_0(1-p) = c$, onde p é a proporção de imunes na população. Use o valor critico c respondido no item (b)