Lista de exercícios – não é para entregar esta ;)

Modelos Matemáticos em Ecologia e Evolução
NE441 F 046

1. Suponha uma população fictícia de organismos que vivem 2 anos. Indivíduos com idade 1 (juvenis) tem uma taxa de 0.5 de nascimento, enquanto organismos de 2 anos (adultos) geram em média 2 indivíduos. A probabilidade de sobrevivência de 1 para 2 anos é 0.5. Após 2 anos, o indivíduo morre.

a) Monte a matriz de Leslie para esse problema.

b) Se no tempo 0 a população começa com 0 adultos e 1 juvenil, qual é o numero de adultos e juvenis daqui 3 anos. E se começarmos com 0 juvenis e 1 adulto. Qual classe de idade parece ter maior importancia?

c) Encontre a taxa de crescimento a longo termo e a estrutura etária estável dessa população. Compare os resultados com o calculado para o tempo t=3 na letra b (anterior).

2. Suponha uma população de um certo molusco cuja tabela de vida pode ser descrita da seguinte forma:

Tabela 1: Tabela de vida de uma população hipotética de moluscos

$Idade - x$	S_x	b_x
0	500	0.0
1	400	2.5
2	40	3.0
3	0	0.0

a) Calcule a taxa de sobreviventes em cada idade x em relação ao início dessa população ($l(x)$), quantos filhos um indivíduo produz ao longo de sua vida nesta população estudada (R_0) e estime o tempo de geração desta população (G).

b) Escreva a matriz de Leslie desse problema e estime a distribuição etária estável dessa população.

3. Suponha uma população que sofre efeito Allee quando em densidades abaixo de 10 indivíduos. Se o crescimento dessa população é de 0.8 indivíduos por unidade de tempo, e a capacidade suporte é de 100 indivíduos:

a) escreva a equação diferencial que descreve como esta população cresce com o tempo

b) encontre os pontos de equilíbrio do problema

c) estude a estabilidade de cada ponto de equilíbrio encontrado em b)

d) Faça o gráfico de taxa de crescimento da população pelo tamanho da população e relacione os pontos de equilíbrio e suas respectivas qualidades e estabilidade graficamente.

4. Considere o modelo de presa predador em que a presa tem um crescimento logístico na ausência do predador e que o predador tem uma reposta funcional do tipo II ao caçar suas presas:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{\beta + x} \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{cxy}{\beta + x} - dy \tag{2}$$

a) Verifique que o equilíbrio interno é dado por $x^* = \frac{\beta d}{c-d}$ e $y^* = \frac{r}{b}\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)(\beta + x^*)$

Uma forma de avaliarmos a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema de duas equações é por meio dos valores de traço e determinante da matriz jacobiana avaliada no equilíbrio. O traço de uma matriz é simplesmente a soma dos elementos de sua diagonal principal. O valor do traço corresponde à soma dos autovalores da matriz. O determinante de uma matrix $2x2$ é simplesmente a multiplicação dos elementos da diagonal principal menos a multiplicação dos elementos da diagonal secundária. O determinante corresponde à multiplicação dos autovalores da matriz. Dado que o traço T de uma matriz é a soma dos autovalores dessa mesma matriz e o determinante D é a multiplicação dos autovalores da matriz, podemos concluir que um ponto de equilíbrio é estável ao avaliarmos a linearização do sistema em sua vizinhança se $T < 0$ e $D > 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz jacobiana avaliada no equilíbrio. Sabemos que este equilíbrio é estável se ambos forem valores menores que zero. Portanto a multiplicação $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e a soma $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$.

b) Por meio da análise de traço e determinante da matriz, mostre que o ponto de equilíbrio interno é estável se $\frac{K-\beta}{2} < \frac{\beta d}{c-d}$.

c) Cite e explique duas situações que podem gerar uma resposta funcional do tipo II.

5. Suponha duas espécies 1 e 2 que competem por recursos tem suas dinâmicas de densidade descritas pelo modelo clássico de competição. Suponha que a espécie 2 tem capacidade suporte $K_2 = 100$ e que o efeito que a espécie 1 tem sobre a espécie 2 é de $\beta' = 0.5$. Suponha ainda que o efeito que a espécie 2 tem sobre a espécie 1 é $\beta = 1.5$.

a) Qual deve ser a capacidade suporte mínima da população 1 para que as espécies 1 e 2 coexistam em um equilíbrio estável?

b) O que ocorre se a capacidade suporte da espécie 1 é de 250 indivíduos? Explique sua reposta em termos de qual equilíbrio é estável nesta situação.