Relatório de iniciação científica

Hiero De Paula, 136095
Orientador: Prof. G. G. Cabrera
Instituto de Física *'Gleb Wataghin'*, Unicamp

Dezembro 2016

Introdução

Supercondutividade é o fenômeno de resistência elétrica nula e expulsão do campo magnético em certos metais e minérios quando estes são submetidos a temperaturas abaixo de uma temperatura crítica. A supercondutividade "convencional" teve seu entendimento durante a década de 50 através de duas importantes teorias com diferentes perspectivas: a teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau e a teoria microscópica BCS.

Diferentemente dos condutores, na teoria BCS a condução elétrica de um supercondutor não se dá através da excitação de elétrons à banda de condução, mas sim pela condensação de pares destes, chamados pares de Cooper[3]. Como elétrons são férmions de spin $\frac{1}{2}$, o spin total de um par de Cooper é inteiro e, portanto, condensa-se conforme a estatística de Bose-Einstein. Neste tipo de condensado, as partículas são consideradas indistinguíveis e em baixas temperaturas ocupam o estado fundamental. Os pares de Cooper podem, portanto, ser descritos por uma '*grande função de onda*' ϕ e sua densidade por $\phi^*\phi$[1].

No decorrer do desenvolvimento da teoria de supercondutores a teoria de Ginzburg-Landau pôde ser derivada da teoria BCS, e uma interpretação de seus parâmetros pode ser feita através de considerações microscópicas. Com base na teoria de transições de fase de segunda ordem de Lev Landau, a energia livre de um supercondutor na teoria de G-L pode ser expandida (1) em termos de um parâmetro de ordem ϕ que se anula na fase de alta temperatura ($T > Tc$) e adquire valor diferente de zero abaixo da transição ($T < Tc$)[2]. Este parâmetro foi reconhecido mais tarde como sendo a função de onda macroscópica dos pares de Cooper, e a transição de fase supercondutora foi caracterizada em termos da concentração de pares.

A equação da energia livre de G-L tem a mesma forma que a Lagrangiana de um campo escalar complexo com simetria de *gauge* local U(1) na situação estática e sua condição de equilíbrio é o valor esperado do estado de vácuo deste campo. Supercondutividade pode portanto ser observada da perspectiva da teoria quântica de campos escalares como uma ilustração do mecanismo abeliano de Higgs, um caso de quebra espontânea de simetria.

$$F = F_n + \alpha(T - T_c)|\phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\phi|^4 + |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 \tag{1}$$

Metodologia

Esta primeira parte da iniciação científica foi desenvolvida como um estudo dirigido com o objetivo de ser uma introdução à teoria de campos escalares e sua abordagem à supercondutividade. Foram feitas reuniões em média a cada quinze dias para discutir a teoria e dar novas direções ao estudo. O conteúdo compreendeu a leitura do cap. 21 do livro The Feynman Lectures on Physics, Vol. III [1] como uma introdução ao fenômeno da supercondutividade, cap. 3 e 8 do livro Quantum field theory [4] (com exceção da teoria não-abeliana) para a introdução à teoria de campos escalares, simetrias de gauge e suas consequências, quebra espontânea de simetria e sua relação com a teoria da supercondutividade, e também das duas primeiras seções do cap. 9 do livro Superconductivity [2] para a fenomenologia da teoria de Ginzburg-Landau. A seguir os resultados são discutidos mais detalhadamente, com ênfase no conteúdo coberto em [4] dado que este foi o pilar deste trabalho.

Desenvolvimento

Iniciamos desenvolvendo a formulação Lagrangiana para campos escalares $\phi(x^\mu)$ aplicando o princípio variacional a uma ação $S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu)d^4x$ e obtendo *equação de Euler-Lagrange* para campos escalares

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right] = 0. \tag{2}$$

Sabendo que campos escalares obedecem a equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0, \tag{3}$$

a Lagrangiana apropriada tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{4}$$

Em seguida exploramos uma das importantes consequências do princípio variacional, o *teorema de Noether*, que afirma que se a ação é invariante por transformações X^μ_ν, Φ_μ respectivamente sobre x^μ e $\phi(x^\mu)$, existem uma ou mais quantidades conservadas. No processo para dar a descrição matemática do teorema duas quantidades foram definidas: a corrente generalizada

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Phi_\mu - \theta^\mu_\kappa X^\kappa_\nu \tag{5}$$

no qual θ^μ_ν é o tensor energia-momento [1] e a carga generalizada

$$Q_\nu = \int_V J^0_\nu d^3x \tag{6}$$

que define as quantidades conservadas. Vimos que para conservação de carga elétrica, as simetrias internas Φ_μ do campo formam o grupo unitário U(1) e este tem então necessidade de ser bidimensional e, portanto, complexo. As transformações que mantêm invariância da ação são chamadas de transformações de *gauge*, e as simetrias internas são definidas como de primeira ordem (globais), se o campo se transforma da mesma maneira em todos os pontos do espaço-tempo, e de segunda ordem (locais) se são diferentes para cada evento. Conservação de carga elétrica se dá por simetrias locais, e, para que se mantenha a invariância da ação, foi necessária a introdução de um campo A_μ acoplado a ϕ de maneira que a Lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi + U(\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{7}$$

com potencial $U(\phi) = -m^2\phi^*\phi$ e onde $D_\mu := (\partial_\mu - ieA_\mu)$ é a derivada covariante de *gauge* mínimamente acoplada. As equações de Maxwell podem ser obtidas pela variação de A_μ na equação de Euler-Lagrange, da Lagrangiana (7) e da antisimetria de $F_{\mu\nu}$. Esta é a densidade de Lagrangiana da eletrodinâmica escalar, com e sendo a carga elétrica e $F_{\mu\nu}$ o tensor eletromagnético. Pela ausência do termo de massa (coeficiente do termo quadrático) de A_μ em (7) é possível observar que a simetria requer que o campo de *gauge* introduzido seja não massivo, o que no contexto da eletrodinâmica quântica significa a ausência de massa do fóton.

A conclusão destas considerações foi de que a eletrodinâmica é, portanto, uma teoria de *gauge* abeliana e uma nova interpretação do campo eletromagnético é de que este é o campo que precisa ser introduzido na teoria de campos escalares para garantir invariância sob transformações de *gauge* locais U(1).

Após este desenvolvimento sobre teoria de campos o próximo passo foi estudar o fenômeno de quebra espontânea de simetria e como a descrição da transição de fase supercondutora na teoria de G-L é um caso desta quebra. Na discussão deste mecanismo a escolha de um potencial $U(\phi) = -m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2$ que mantém a simetria U(1) da Lagrangiana foi feita para que fosse tratado um caso não trivial. Vimos que o mínimo deste potencial acontece em $\phi = \phi^* = 0$ se $m^2 > 0$, $|\phi|^2 = -m^2(2\lambda)^{-1} = a^2$ se $m^2 < 0$ e que na teoria quântica de campos esta condição se refere ao valor esperado para o vácuo do campo. O potencial para o caso $m^2 < 0$ mostrado na fig. 1 possui estado de vácuo infinitamente degenerado e é conhecido pelo nome de *potencial de chapéu mexicano*. Este processo de perda de simetria de um estado quando um parâmetro atinge um valor crítico é chamado de *quebra espontânea de simetria*.

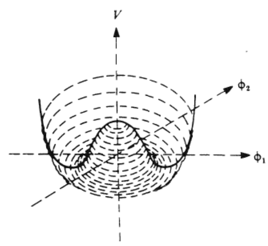

Figura 1: Potencial chapéu mexicano

Para o caso da simetria global este processo faz com que no estado de vácuo a Lagrangiana do campo escalar tome a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - 4\lambda a^2\phi_1^2 - \sqrt{2}\lambda\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{8}$$

[1] O tensor energia-momento é definido como $\theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$

e a componente ϕ_1 do campo adquira então massa $2a\sqrt{\lambda}$ enquanto que ϕ_2 se torna ausente de massa. A partícula associada por quantização do campo ϕ_2 é conhecida como *bóson de Goldstone* e de forma geral a quebra espontânea de uma simetria contínua global implica na sua existência. Este fenômeno no qual 2 campos escalares massivos tornam-se 1 campo escalar massivo e 1 campo ausente de massa pela quebra espontânea de simetria global U(1) é conhecido como *modo abeliano de Goldstone.* No caso de simetria local a quebra desta resulta que a Lagrangiana tome a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \textit{termos de acoplamento} \tag{9}$$

e neste caso os campos A_μ e ϕ_1 adquirem massa enquanto que o campo ϕ_2 desaparece. O fóton então adquire massa como se tivesse "absorvido" o campo ϕ_2 para isto. Este mecanismo no qual 2 campos escalares massivos tornam-se 1 campo escalar massivo e 1 fóton massivo é chamado de *modo abeliano de Higgs.*

A seguir voltamos a nossa atenção para a supercondutividade. Consideramos o caso estático e na ausência de campos elétrostáticos ($V = 0$) no qual a Lagrangiana (7) toma a forma

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2 + m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4. \tag{10}$$

Da leitura do cap. 9 de *Superconductivity* [2] sobre a teoria de G-L, observamos que (10) tem a forma (1) da energia livre de Ginzburg-Landau com $m^2 = \alpha(T - T_c)$ e o campo ϕ que é a função de onda macroscópica como parâmetro de ordem. O quanta do campo escalar são portanto os pares de Cooper. Quando $T > T_c$ temos $m^2 > 0$ e o mínimo da energia livre em $\phi = 0$, indicando não haver formação de pares. Quando $T < T_c$ temos $m^2 < 0$ e o mínimo em $|\phi|^2 = -m^2(2\lambda)^{-1} > 0$ que implica numa concentração de pares não nula, que é a forma como a condução elétrica se apresenta na supercondutividade. Pela invariância de (10) sob transformações locais do grupo U(1) e do teorema de Noether, temos uma corrente conservada $\mathbf{j}$ que para $T < T_c$ se torna $\mathbf{j} = -k^2\mathbf{A}$. Esta é a *equação de London* da supercondutividade. Como $\mathbf{E} = 0$, obtemos da lei de Ohm $\mathbf{E} = R\mathbf{j}$ que $R = 0$, que define supercondutividade. Outra característica, o *efeito Meissner*, também pode ser derivado da equação de London e da lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$. Temos então

$$\nabla^2\mathbf{B} = k^2\mathbf{B} \tag{11}$$

que por simplicidade, em uma dimensão, tem como solução $\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_0e^{-kx}$ e, portanto, o campo magnético decai dentro do supercondutor. Por fim (11) na forma covariante de Lorentz é $\Box A_\mu = -k^2A_\mu$, isto mostra que A_μ sob estas condições satisfaz a equação de Klein-Gordon (3) e portanto dentro de um supercondutor o fóton adquire massa k, característica do mecanismo de Higgs. Estes resultados caracterizam supercondutividade[1] e podemos concluir que este fenômeno é resultado de uma quebra espontânea de simetria.

Conclusão

Os resultados apresentados neste relatório mostram que o eletromagnetismo se manifesta como uma teoria de *gauge* e como a supercondutividade pode ser derivada da teoria de campos escalares como uma quebra espontânea da invariância deste *gauge.* Uma provável continuação do trabalho seria estudar outras características de supercondutores da perspectiva da teoria de campos, como o efeito Josephson, o campo crítico, a quantização de fluxo magnético e linhas de vórtice, se estes resutados estiverem ao alcance do meu conhecimento.

Referências

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics.* Number v. 3 in The Feynman Lectures on Physics. Pearson/Addison-Wesley, 1963.

[2] J.B. Ketterson and S.N. Song. *Superconductivity.*

[3] Charles Kittel. *Introduction to solid state.* John Wiley & Sons, 1966.

[4] Lewis H. Ryder. *Quantum field theory.* Cambridge university press, 1996.