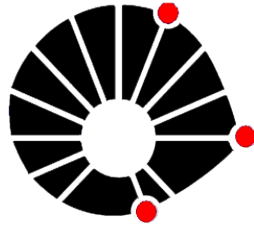


## RELATÓRIO FINAL F609



**UNICAMP**

ESTUDO DO CAOS NO PÊNDELO COMPOSTO E A MONTAGEM DE UM  
PÊNDELO MAGNÉTICO CAÓTICO.



**Aluna:** Tatyana G. Stankevicius RA 064614

(tatyana@ifi.unicamp.br)

**Orientador:** Mauro de Carvalho

(mauro@ifi.unicamp.br)

**Coordenador:** José Joaquim Lunazzi

# ÍNDICE

RESUMO .....	3
OBJETIVOS .....	3
INTRODUÇÃO .....	4
PÊNULO CAÓTICO .....	5
PÊNULO MAGNÉTICO CAÓTICO .....	7
CONCLUSÃO .....	8
APÊNDICE I.....	10
COMENTÁRIOS DO ORIENTADOR.....	13
REFERÊNCIAS.....	13
AGRADECIMENTOS.....	13

## RESUMO

O caos está presente em nosso cotidiano: não só associado a situações que há perda de controle, mas também em coisas simples como fumaça de cigarro em ascensão, torneiras gotejando, ritmos cardíacos, epidemias, populações em ecossistemas e até em preços de mercadorias.

Para os cientistas, a palavra caos assume outra acepção. Utiliza-se caos para sistemas imprevisíveis.[1]

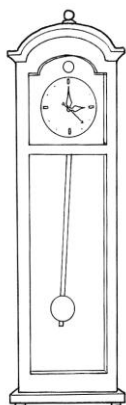


Figura 1: relógio de pêndulo

O sistema físico mais comum no nosso dia a dia, que podemos associar a caos, é o pêndulo, elemento que era facilmente visualizado nos relógios de pêndulo (figura 1), cujo princípio foi concebido por Galileu, embora tenha sido Huygens, um cientista holandês, que o materializou em 1656[2]. No entanto, esse pêndulo é linear para pequenos ângulos de oscilação: o tempo é marcado baseado na regularidade da oscilação.

Trataremos de pêndulos não lineares: o pêndulo duplo (ou composto), formado por dois pêndulos simples, e o pêndulo magnético cujo movimento caótico ocorre devido à presença de ímãs em sua proximidade.

## OBJETIVOS

Esse trabalho consiste de duas partes:

A primeira delas consiste em observar o movimento de um pêndulo composto e estudar o determinismo em um sistema mecânico, na maneira como seu movimento passa de um movimento linear para um movimento não linear, e de um movimento não linear para um movimento caótico. O resultado dessas observações são imagens do momento em que o caos é alcançado e comparação entre as posições do pêndulo, a cada variação de tempo;

A segunda parte consiste na construção de um pêndulo magnético, que oscila caoticamente, com materiais simples: uma base e haste de madeira, ímãs de neodímio e parafuso.

## INTRODUÇÃO

O pêndulo duplo consiste de um pêndulo simples acoplado a outro (figura 2), sendo um exemplo de sistema físico simples que pode exibir um comportamento caótico, exibindo dois graus de liberdade no pêndulo inferior (apêndice I).

Esse sistema exibe um rico comportamento dinâmico: abandonando-se o pêndulo inferior, dependendo da altura abandonada, é possível observar ou um movimento periódico, um movimento não periódico (não linear) ou ainda um movimento caótico, que é provocado devido a transferência de energia potencial gravitacional para energia cinética de rotação.

Podemos descrevê-lo em vários termos: [3]

Tomemos os pêndulos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , acoplados a hastes de massas desprezíveis e de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ . Sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos, como mostrado na figura e seja  $g$  a aceleração da gravidade. A origem das coordenadas está no ponto de pivô do pêndulo superior.

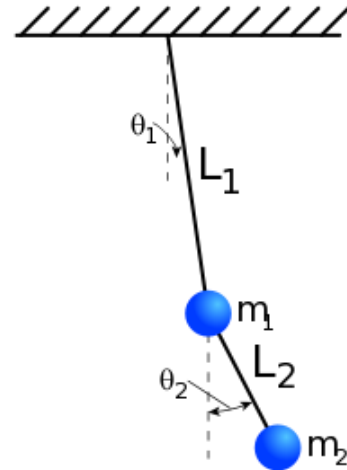


Figura 2: pêndulo duplo

A partir de considerações trigonométricas escrevemos as expressões das posições  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  em termos dos ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (4)$$

Derivando-se as expressões em relação ao tempo, obtemos as equações para a velocidade das partículas. Derivando-se novamente, obtemos as equações para as acelerações.

A energia potencial gravitacional ( $V$ ) é dada, então, por:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (5)$$

$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2, \quad (6)$$

E, portanto, a energia cinética ( $T$ ) pode ser dada:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (8)$$

O sistema é então regido por uma função chamada Lagrangeana (apêndice I).

Assistindo ao vídeo, é muito fácil ter uma idéia de caos e notar certos detalhes: Sistemas caóticos são não-lineares e extremamente sensíveis a pequenas variações nas suas condições num dado instante. Variando-se gradativamente a altura em que é abandonado, nota-se que somente a certas alturas mais altas (grande amplitude) ele passa a exibir o comportamento caótico.

## DETERMINISMO E PREVISIBILIDADE

A maioria das leis da Física é descrita matematicamente por equações. Resolvendo as equações, sabe-se como um sistema se comporta em cada instante de tempo. Estas equações podem ser resolvidas se duas coisas são conhecidas: o sistema e as condições deste em certo instante de tempo. A idéia de que as condições iniciais do sistema determinam seu comportamento futuro é denominado determinismo. E a natureza, pelo menos a que está a nossa volta, é determinista: A queda dos corpos, a órbita da Lua e dos planetas, o choque entre corpos, as ondas sonoras e as eletromagnéticas, entre outras coisas, podem ser compreendidas à luz do determinismo. São sistemas previsíveis.

Porém, como vimos, há sistemas que são imprevisíveis. No entanto, o próprio determinismo contém a resposta da imprevisibilidade de tantos sistemas. Como foi dito, a previsibilidade de um sistema depende de conhecê-lo em certo instante de tempo. Se você não o conhece, o sistema é imprevisível. Isso deve-se ao fato de não ser possível construir instrumentos de medição perfeitos, pois sempre há uma incerteza intrínseca em relação às medidas. Ou seja, de acordo com o princípio de Heisenberg, se não conhecermos as condições iniciais do sistema, não podemos fazer previsão alguma sobre ele. Porém, o princípio só é relevante quando trabalhamos com partículas.

## SENSIBILIDADE E O CAOS

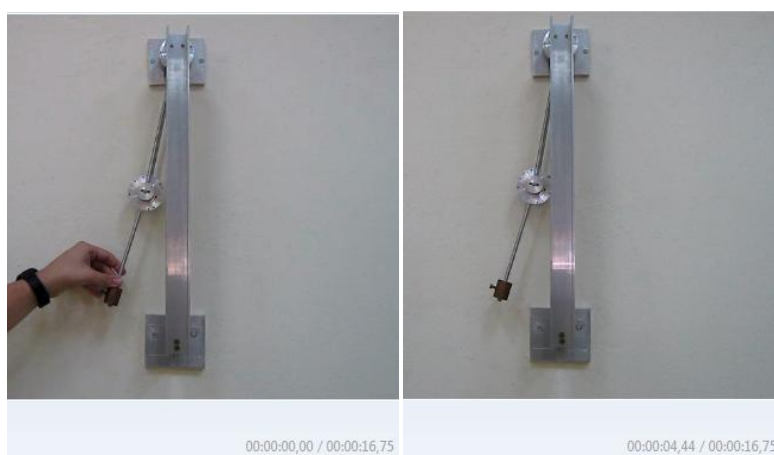
Os sistemas que estamos lidando (pêndulos magnético e duplo) são sistemas em que uma pequena variação nas condições iniciais gera grandes diferenças na evolução temporal deles. Como sempre existe um erro associado à medição, o sistema calculado e o medido terão evoluções temporais muito diferentes, mesmo que comecem “quase” idênticos. Ou seja, o sistema é sensível às condições iniciais. É esta

sensibilidade às condições iniciais, exibida por muitos sistemas, que é denominada caos. Geralmente o que torna o sistema caótico é a interdependência entre diferentes variáveis. Podemos, então, estabelecer um índice que indique o grau de imprevisibilidade do sistema calculado a partir da sensibilidade do sistema às condições iniciais. Ele é denominado coeficiente de Lyapunov. Quanto maior o coeficiente de Lyapunov, mais sensível o sistema é e, o sistema só é considerado caótico se o coeficiente de Lyapunov for maior do que 1. Assim, os sistemas caóticos são imprevisíveis, mas não tanto quanto podem parecer à primeira vista.

## PÊNDULO CAÓTICO

Como descrito nos objetivos, observei e estudei o movimento do pêndulo caótico que existe no LIEF (Laboratório de Instrumentação para o Ensino de Física <http://portal.ifi.unicamp.br/extensao/laboratorio-de-instrumentacao-para-o-ensino-de-fisica> ).

A princípio, abandonei-o de pequenas alturas, fazendo com que o pêndulo descrevesse um movimento de pequena amplitude. Abandonei várias vezes da mesma altura, de modo a repetir o movimento. Esse movimento, com o auxílio de um cronômetro, mostrou-se periódico ( $T \approx 1,18$  s). Além disso, para mesmo “estágio” do movimento (altura máxima alcançada, antes de inverter o movimento), vimos que o pêndulo se encontra na mesma posição, ou seja: a pequenas amplitudes de abandono, podemos determinar a posição que o pêndulo estará daqui a um período caracterizando, assim, um sistema determinista. Seguem duas imagens, da mesma filmagem do pêndulo abandonado a uma pequena altura. Esperei o pêndulo completar um período, depois outro período e obtive as imagens a partir do vídeo, com o auxílio do programa *Windows movie maker* da seguinte forma: voltando no tempo do vídeo, encontrei a posição em que a velocidade do pêndulo é nula.



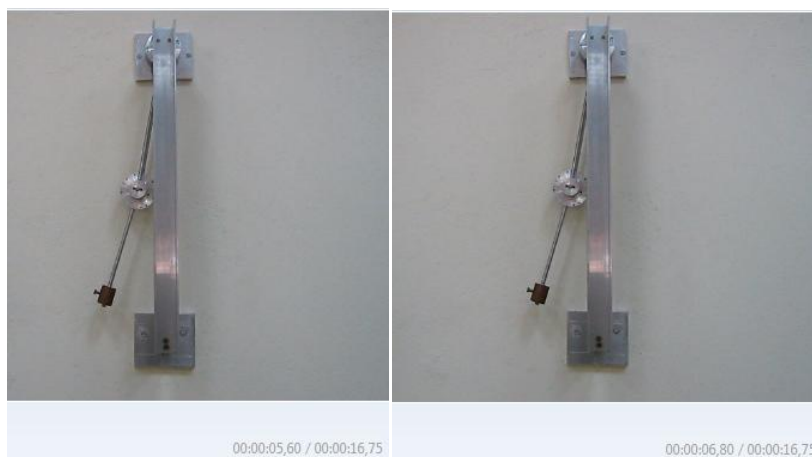


Figura 3: abandono do pêndulo, e próximas três posições após três períodos. Os tempos estão marcados na figura e foram retirados do vídeo.

Abandonando-se, em seguida, de uma altura maior, o pêndulo de baixo passa a descrever um movimento não periódico: as amplitudes do movimento tornam-se diferentes, como podem ser vistas nas quatro imagens abaixo:



Figura 4: situações de amplitude máxima na ida (esquerda) e na volta (direita)

Essas imagens foram obtidas a partir do vídeo e registram o instante em que o pêndulo se encontra na amplitude máxima (ou seja, na velocidade nula). É facilmente observável que o pêndulo inferior descreve um ângulo maior na ida, do que na volta. Essa variação do ângulo gera uma variação no tempo de oscilação: cronometramos meio período (desde a liberação até a amplitude máxima, e de uma amplitude máxima à outra).

Se fosse periódico, esses períodos seriam iguais, no entanto, eles apresentaram tempos distintos. Isso implica na não linearidade do objeto. A não – linearidade pode ser vista nas figuras abaixo. No entanto, ainda é um sistema determinístico: existem equações que podem nos fazer descobrir a posição do tempo em cada instante.



Figura 5: imagens seguidas de um mesmo intervalo de tempo para o pêndulo não linear porém, determinístico.

A diferença de tempos entre o primeiro, segundo e terceiro quadros é de 1,24s. No entanto, é visível que o ângulo  $\theta_2$  difere nas três imagens.

Ainda observando o pêndulo, nota-se que a partir de certa altura, o pêndulo “ameaça” girar, ou seja, passar a descrever um movimento caótico. Além disso, quanto maior a altura, menor o tempo desta “ameaça”. Seguem imagens do exato momento em que o pêndulo gira, caracterizando o movimento caótico:



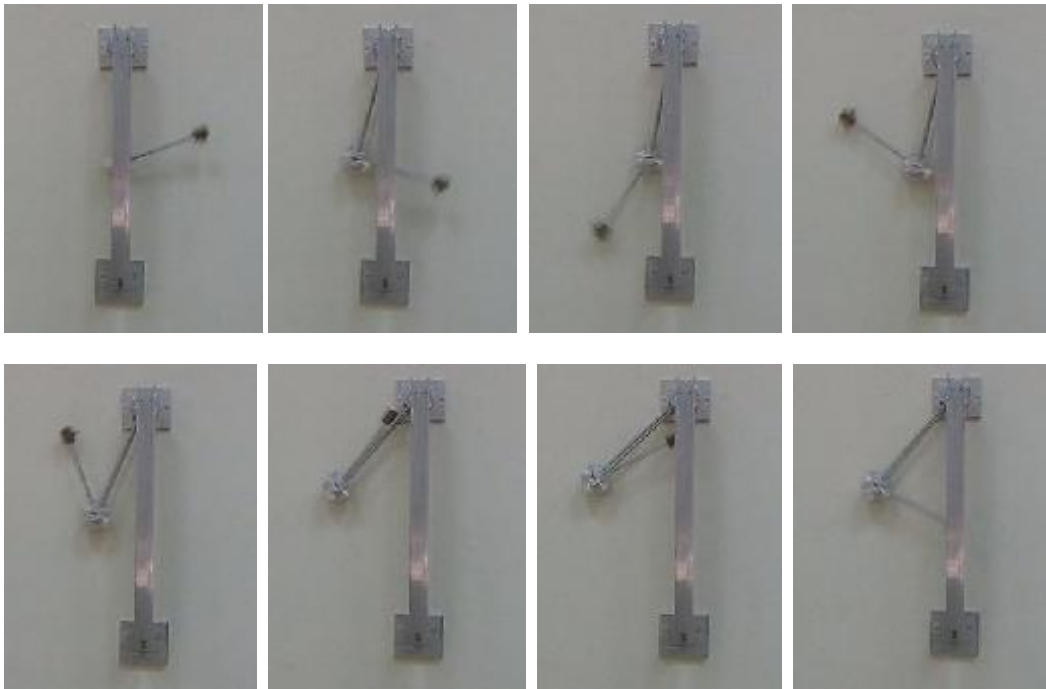


Figura 6: Sequência de imagens antes e depois do exato momento em que o movimento passa a ser caótico, representado pela sexta imagem. (da esquerda para a direita, de cima para baixo).

Para mostrar que não é possível determinar a posição do pêndulo quando há caos, tirei uma sequência de 6 imagens com diferença de tempo de 1s para mostrar a imprevisibilidade do pêndulo:



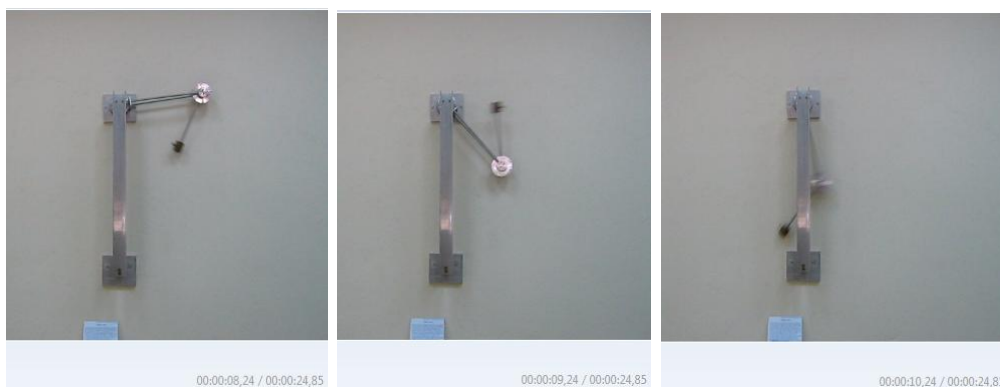


Figura 7: Imagens para mostrar a imprevisibilidade do pêndulo duplo quando ele passa a exibir movimento caótico.

## PÊNDULO MAGNÉTICO CAÓTICO

Nessa parte do trabalho, desenvolvi um modelo de construção simples para o pêndulo magnético caótico. A idéia do trabalho é prover uma ferramenta simples de observação, que pode ser facilmente construída e levada em sala de aula.

Os materiais utilizados foram: suporte e haste em madeira, ímãs de neodímio de 22mm de diâmetro, parafuso furado com um ímã colado de 3mm de diâmetro (utilizado como prumo) e fio de nylon, de espessura 0,2mm. Foram testadas várias espessuras de fios, sendo obtido o melhor resultado para o fio mais fino: há uma menor interferência na oscilação.

Abaixo temos um esquema da montagem e, em seguida, uma foto:

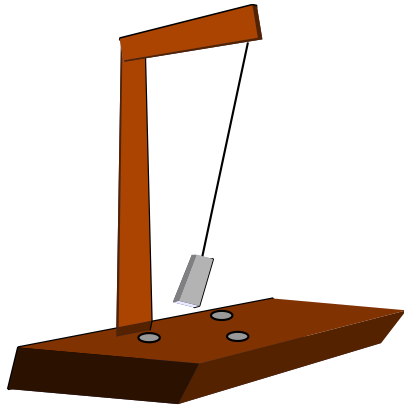


Figura 8: Esquema 3D do pêndulo magnético



Figura 9: Fotografia da montagem

Utilizando o fio de nylon fino, além de proporcionar-lhe movimento tri-dimensional, reduzimos a energia gasta no movimento de rotação da haste. É importante também que os ímãs sejam iguais e que seus campos não sejam tão intensos e nem muito fracos. Não muito intensos porque logo a energia de translação do pêndulo seria transformada em energia magnética. Nem muito fracos porque aí o pêndulo se comportaria como um pêndulo comum. Se os magnetos forem diferentes, o pêndulo tenderá a oscilar em torno do mais fraco, dessa maneira privilegiando um dado ponto do espaço.

Para mostramos isso, pegamos dois ímãs, equivalentes ao que foi colado no parafuso (3mm de diâmetro), e os colocamos no sistema. A partir disso, foi difícil estabelecer o movimento caótico novamente e, além disso, conseguimos também mostrar que o sistema, ao sofrer uma pequena variação nos parâmetros iniciais, deixa de apresentar comportamento caótico. Segue uma imagem:



Figura 10: Montagem, com quantidade de ímãs alterada

## CONCLUSÃO

Como resultados, tivemos que é possível mostrar que um corpo macroscópico pode exibir tanto os comportamentos linear, não linear, bem como o comportamento caótico, e que é possível verificar se um sistema é determinista ou não. Obtivemos esse resultado para o pêndulo duplo.

Outro resultado obtido foi com o pêndulo magnético: mostramos a sensibilidade do sistema às condições iniciais e obtivemos um movimento caótico bem definido, ou seja, que pode ser facilmente interpretado como tal. Esse movimento durou cerca de quatro minutos.

## APÊNDICE I

Utilizando-se as equações 1 a 8, temos a Lagrangeana:

$$L \equiv T - V$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Para  $\theta_1$ , temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (12)$$

Logo a equação diferencial de Euler- Lagrange para  $\theta_1$ :

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0. \quad (13)$$

Dividindo-se por  $l_1$ , fica:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0. \quad (14)$$

Similarmente, para  $\theta_2$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \sin \theta_2, \quad (17)$$

Então, a equação de Euler-Lagrange para  $\theta_2$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g \sin \theta_2 = 0. \quad (18)$$

Dividindo-se ambos os lados por  $l_2$ , temos:

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0. \quad (19)$$

A dupla de equações diferenciais (de segunda ordem) 14 e 19 podem ser resolvidas numericamente para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , escolhendo-se alguns parâmetros particulares e condições iniciais. Podemos plotar as soluções[1]: o gráfico revela um movimento bem complicado

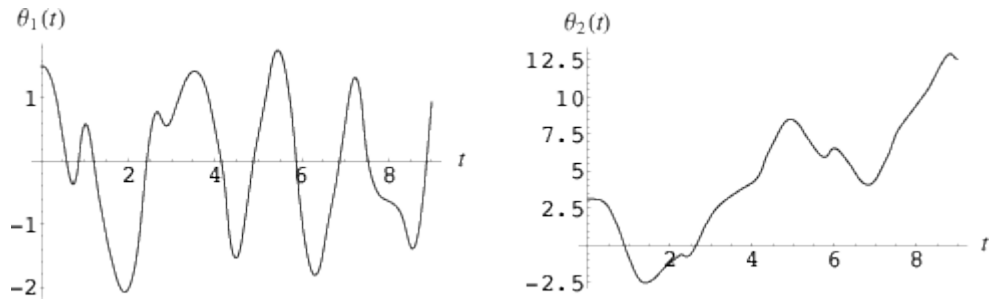


Figura 8: gráfico dos dados plotados para o pêndulo duplo

Até o instante plotado, o pêndulo descreve um movimento não linear, porém não é um movimento caótico. O movimento caótico não pode ser previsto. Para ser caótico, é necessário provar que qualquer variação em algum dos parâmetros do movimento altera completamente o comportamento de  $\theta$  versus  $t$ . Essa pequena alteração nos parâmetros pode ser vista no vídeo.

Podemos, também, escrever as equações com o formalismo hamiltoniano. As equações para o momento ficam:

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (20)$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (21)$$

A Hamiltoniana é dada, então, por:

$$H = \theta_i p_i - L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2. \quad (22)$$

Resolvendo as equações 20 e 21 para  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  e substituindo de volta na equação 22, simplificando-se temos:

$$H = \frac{l_2^2 m_2 p_{\theta_1}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2 - 2m_2 l_1 l_2 p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 m_2 [m_1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2) m_2]} - m_2 gl_2 \cos \theta_2 - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1. \quad (23)$$

Isso nos leva às equações de Hamilton:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{l_2 p_{\theta_1} - l_1 p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (24)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{l_1(m_1 + m_2)p_{\theta_2} - l_2 m_2 p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2^2 m_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (25)$$

$$\dot{p}_{\theta_1} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - C_1 + C_2 \quad (26)$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -m_2 gl_2 \sin \theta_2 + C_1 - C_2, \quad (27)$$

Onde

$$C_1 \equiv \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (28)$$

E

$$C_2 \equiv \frac{l_2^2 m_2 p_1^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) p_2^2 - l_1 l_2 m_2 p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (29)$$

Descrevendo assim, matematicamente o movimento do pêndulo composto. Nota-se que a descrição matemática é complexa, assim como o movimento descrito pelo pêndulo.

## COMENTÁRIOS DO ORIENTADOR

"O trabalho da Tatyana foi muito bem feito e estudado. Ela trabalhou bem na teoria desde o início e teve sucesso no resultado da parte experimental. O Relatório está claro e muito bem apresentado. Ótimo trabalho."

## REFERÊNCIAS



[1] Baker G. L. e Gollub J. P. , Chaotic Dynamic: an Introduction, 2nd ed.(Cambridge University Press, N. Y., 1996) capítulos 1, 2 e 3.

[2] <http://www.horadomundo.com/cultura/historia.jsp>

[3] <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Professor Mauro pela montagem e confecção do suporte para o pêndulo magnético.